Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Equazioni di collinearità

Dispense

Introduzione

Le equazioni di collinearità traducono la particolare relazione che lega tre punti notevoli

- il punto-oggetto P
- la sua immagine, il punto-immagine π
- il centro di presa O

è cioè il fatto che appartengono alla stessa retta, cioè sono collineari.

I SR coinvolti

Il SR oggetto (N, X, Y, Z): il SR nel quale si vogliono avere le coordinate dei punti misurati

Il SR di riferimento immagine (O, x, y, z): il SR tridimensionale che ha origine nel centro di presa, l'asse z diretto come l'asse della camera, il piano (x, y) conseguentemente parallelo al piano focale

I due sistemi sono roto-traslati.

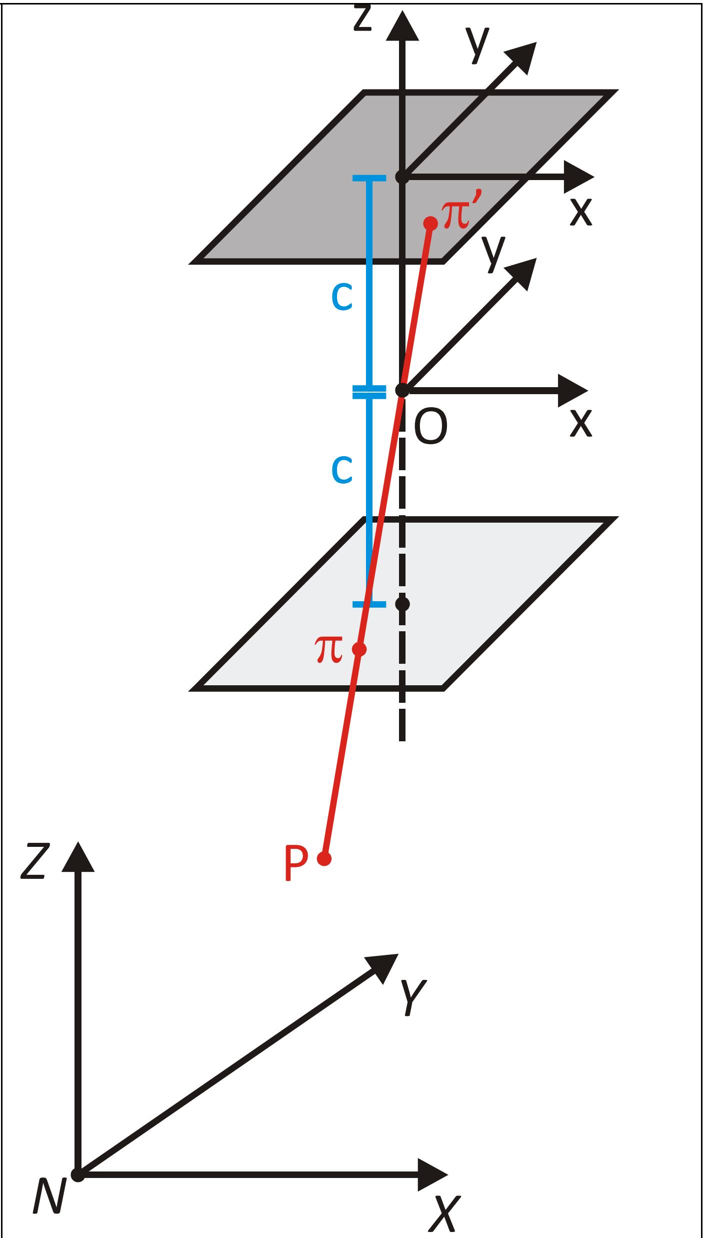
Consideriamo un SR ausiliario che ha origine in N ed è parallelo a (O, x, y, z): indichiamolo con (N, X', Y', Z')

I SR coinvolti – 2

Illustrazione del SR oggetto (N, X, Y, Z) e di quello immagine (O, x, y, z). Sono anche mostrati i piani focali dell'immagine positiva e negativa.

Il SR ausiliario (N, X', Y', Z') non è mostrato.

[sr_oggetto_sr_immagine.cd, wmf]



Soluzione per passi

Rapporto fra (N,X',Y',Z') e (O,x,y,z): rapporto fra le coordinate oggetto ausiliarie di P e le coordinate immagine di π, essendo P e π punti diversi ma legati dalla relazione di collinearità insieme con O.

Rapporto fra (N,X,Y,Z) e (N,X',Y',Z'): rapporto fra le coordinate oggetto e le coordinate oggetto ausiliarie dello stesso punto P; si tratta di un problema di trasformazioni di coordinate.

Per combinazione, rapporto fra (N,X,Y,Z) e (O,x,y,z)

`[sr_oggetto_sr_immagine.cd, wmf]`

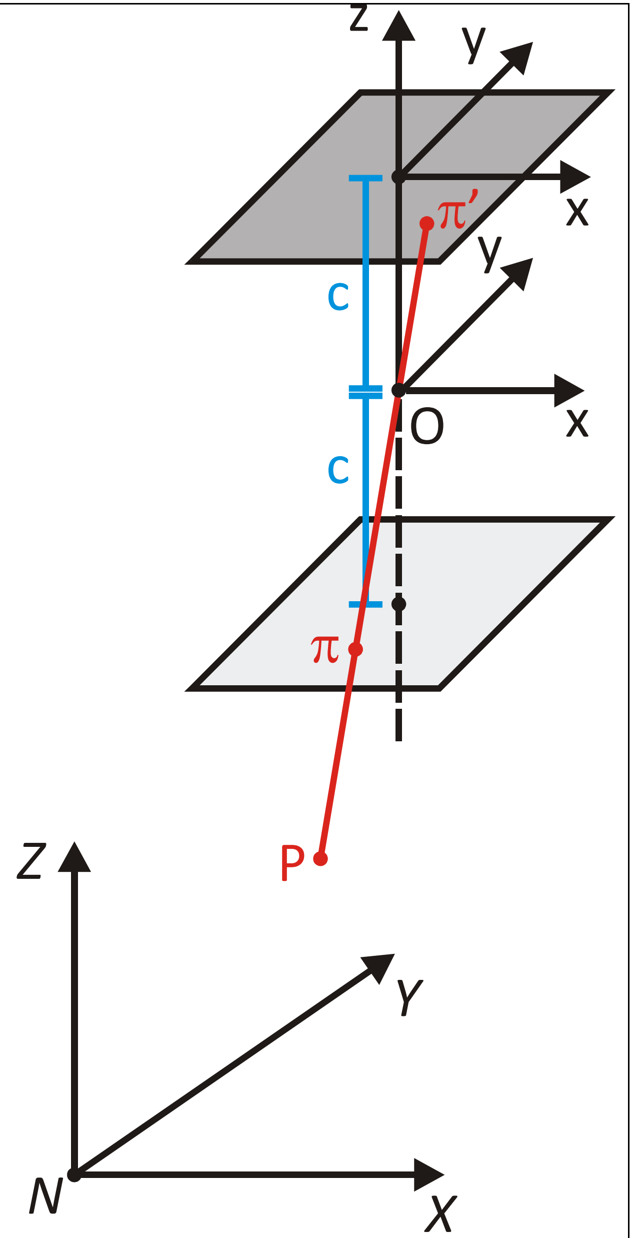
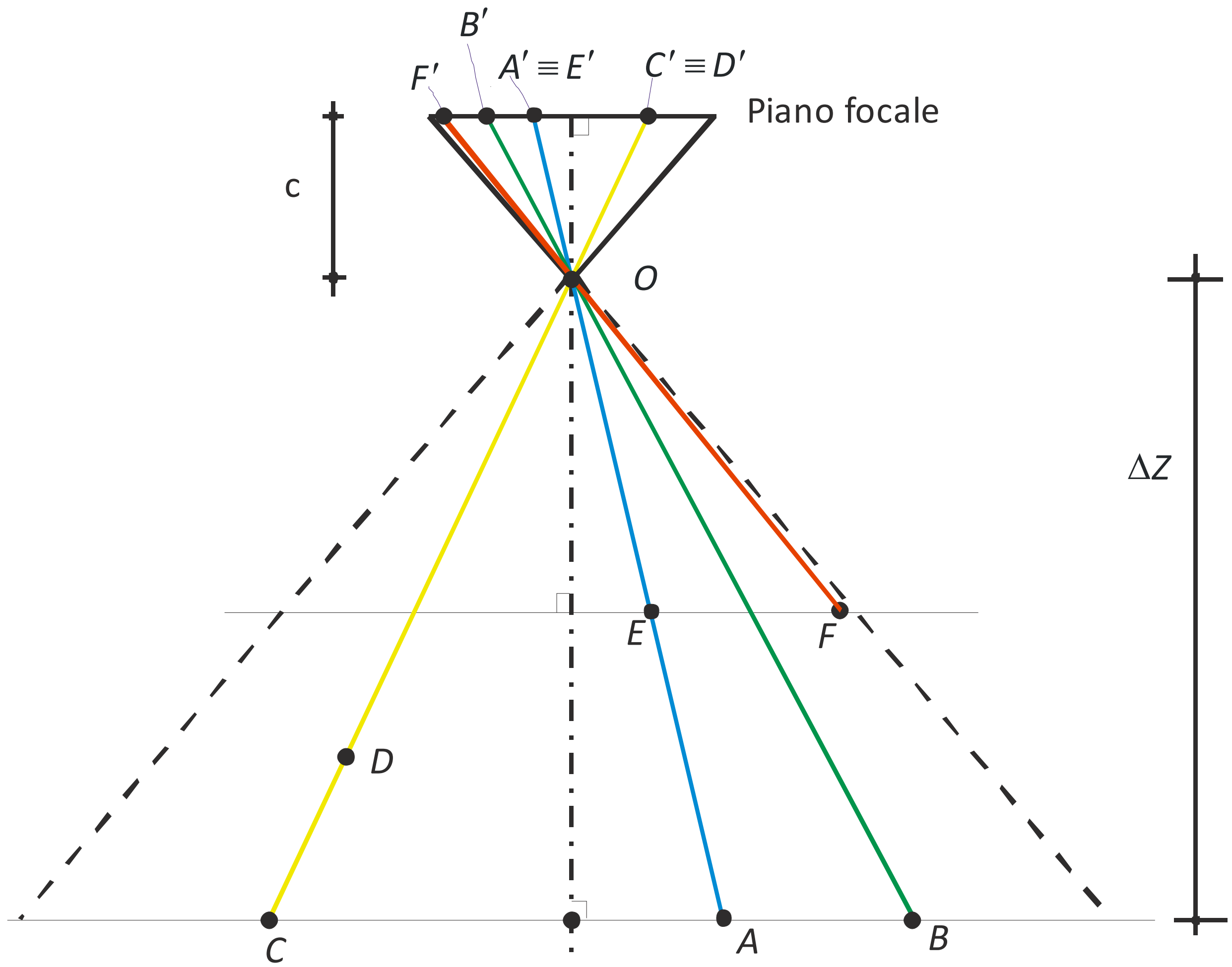


Immagine geometricamente positiva e negativa – 1

L'immagine negativa è quella prodotta durante l'acquisizione ed è caratterizzata geometricamente dal fatto che il piano dell'immagine si trova *dopo* (visto dal raggio di luce che viaggia dal punto-oggetto al punto-immagine) il centro di presa *O*, ad una distanza *c* detta *lunghezza focale*, che dipende dalle caratteristiche geometriche della camera impiegata.



Si tratta di un'immagine nella quale le relazioni spaziali, destra-sinistra, sopra-sotto sono invertite rispetto alla realtà.

Immagine geometricamente positiva e negativa – 2

Nell'immagine negativa le relazioni spaziali, destra-sinistra, sopra-sotto sono invertite rispetto alla realtà.

Se si considerano i punti A e B e le loro proiezioni, A' e B', si può verificare ciò.

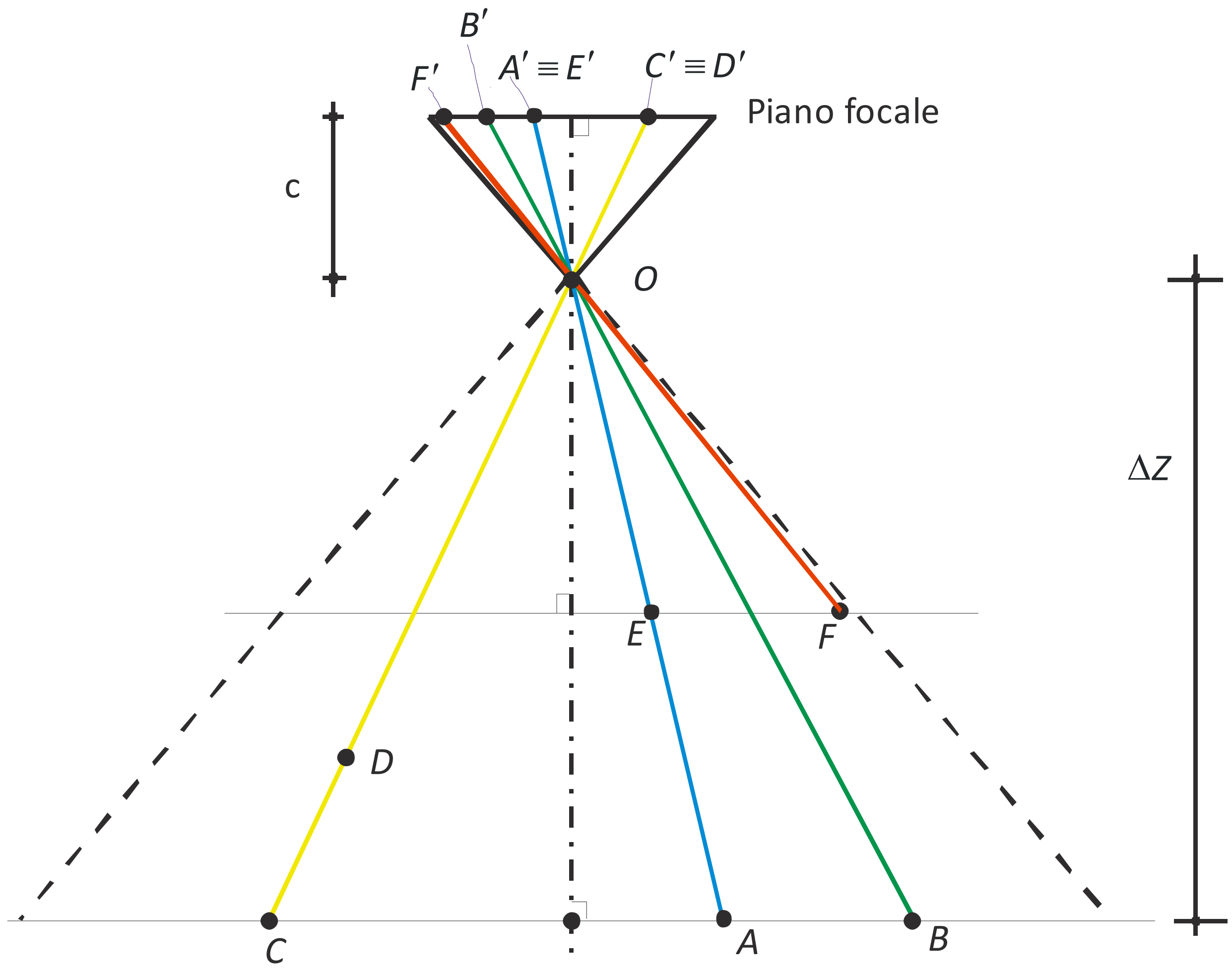


Immagine geometricamente positiva e negativa – 3

L'*immagine positiva* è ottenuta nel laboratorio fotografico e corrisponde a quella che si formerebbe su un piano parallelo al precedente ma collocato *prima* del centro O, a una distanza c.

Arricchire disegno: inserire il piano della positiva.

Relazione fra le coordinate immagine sulla positiva e sulla negativa - 1

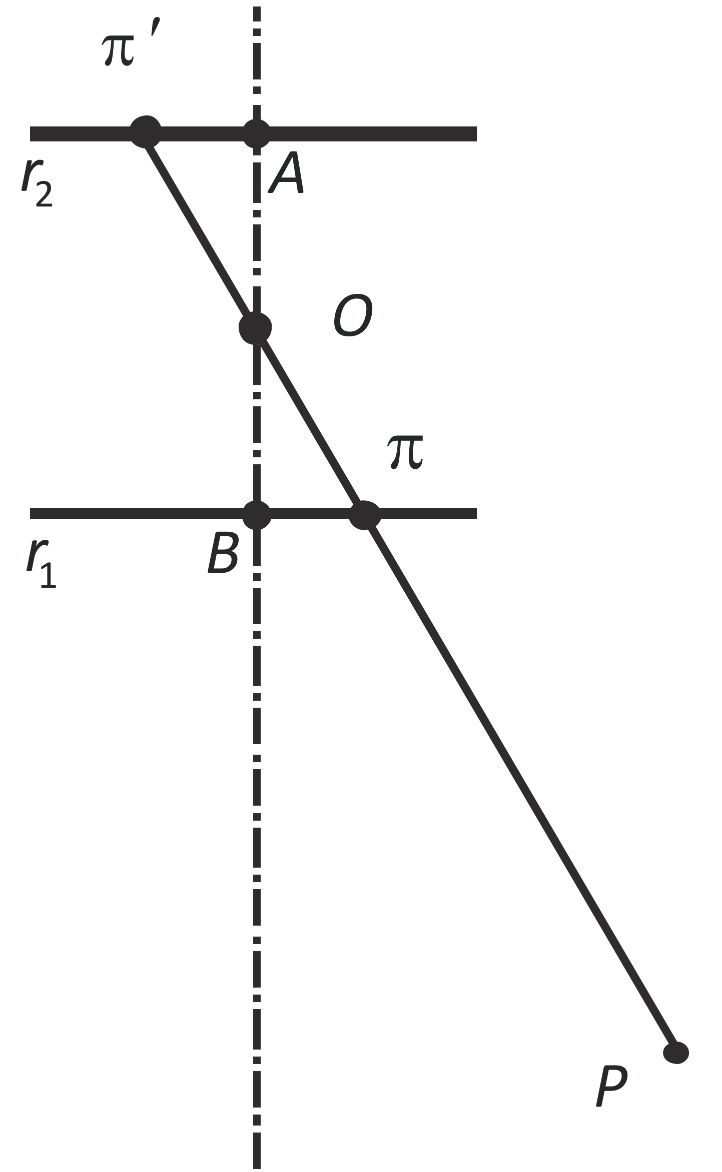
La retta $\overrightarrow{AB}$ rappresenta l'asse dell'obiettivo.

Il piano della negativa è ortogonale alla retta $\overrightarrow{AB}$ e si trova ad una distanza c dal centro di presa O, *sopra* di esso.

Il piano della positiva è ortogonale alla retta $\overrightarrow{AB}$ e si trova ad una distanza c dal centro di presa O, *sotto* di esso.

Sezioniamo con un qualunque piano β contenente la retta $\overrightarrow{AB}$.

[relazione_coordinate_positiva_negativa.cdr]



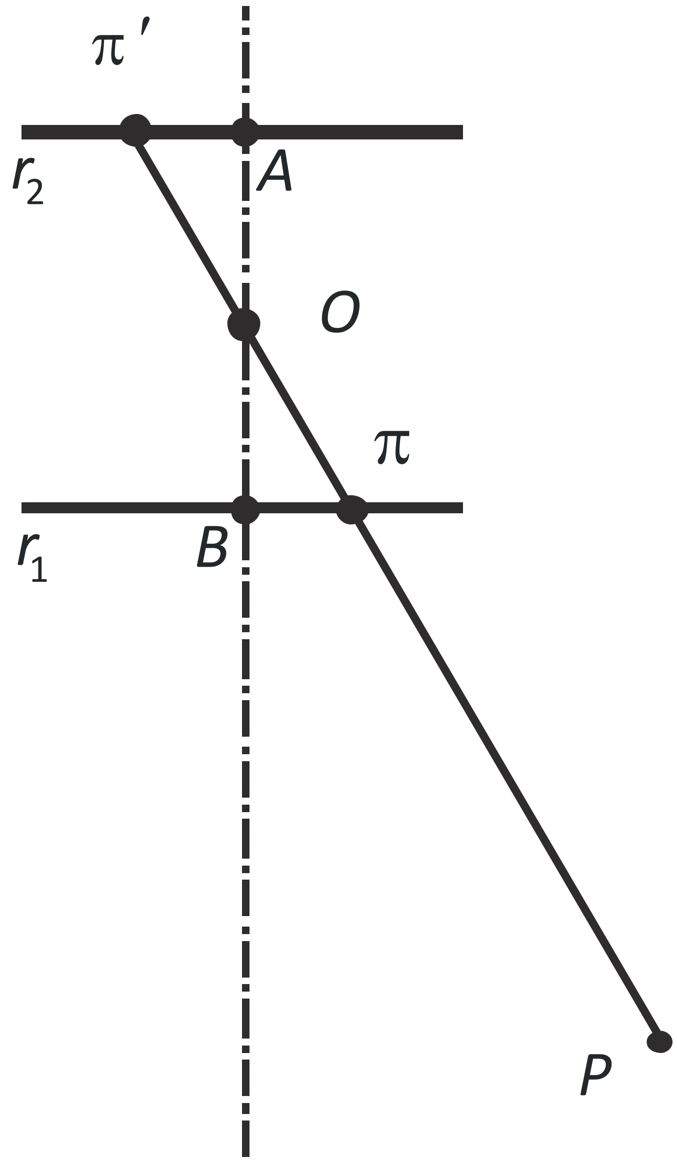
Relazione fra le coordinate immagine sulla positiva e sulla negativa - 2

La retta $\overrightarrow{OP}$ interseca i due piani determinando i punti π sulla positiva e π' sulla negativa.

I triangoli $\Delta(OA\pi')$ e $\Delta(OB\pi)$ sono simili in quanto opposti al vertice. Sono addirittura uguali perché i lati $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ sono uguali a c per costruzione.

Di conseguenza i lati $\overline{B\pi}$ e $\overline{A\pi'}$ coincidono

[relazione_coordinate_positiva_negativa.cdr]



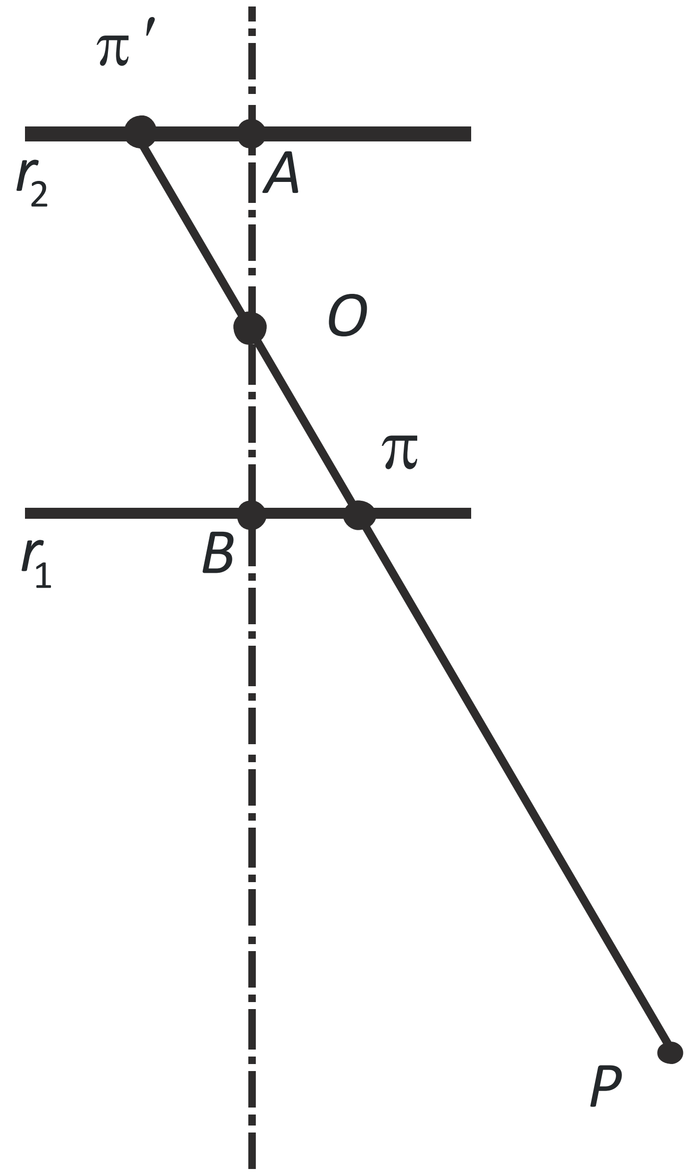
Relazione fra le coordinate immagine sulla positiva e sulla negativa - 3

Esiste un SR immagine, avente l'origine in O, asse z parallelo all'asse della camera e diretto verso l'alto; assi x e y paralleli ai piani focali e tali da determinare una terna destrorsa.

Le conclusioni delle slide precedente sono vere qualunque sia il piano β con cui si seziona.

In particolare sono vere quando le rette r_1 e r_2 staccate da β sui piani focali coincidono con gli assi x e y del SR immagine.

[relazione_coordinate_positiva_negativa.cdr]



Relazione fra le coordinate immagine sulla positiva e sulla negativa - 4

Consideriamo il caso in cui le rette r_1 e r_2 sono parallele all'asse x immagine, che supporremo puntare verso destra, senza perdita di generalità.

Indichiamo con x la coordinata immagine di π.

Indichiamo con x' la coordinata immagine di π'.

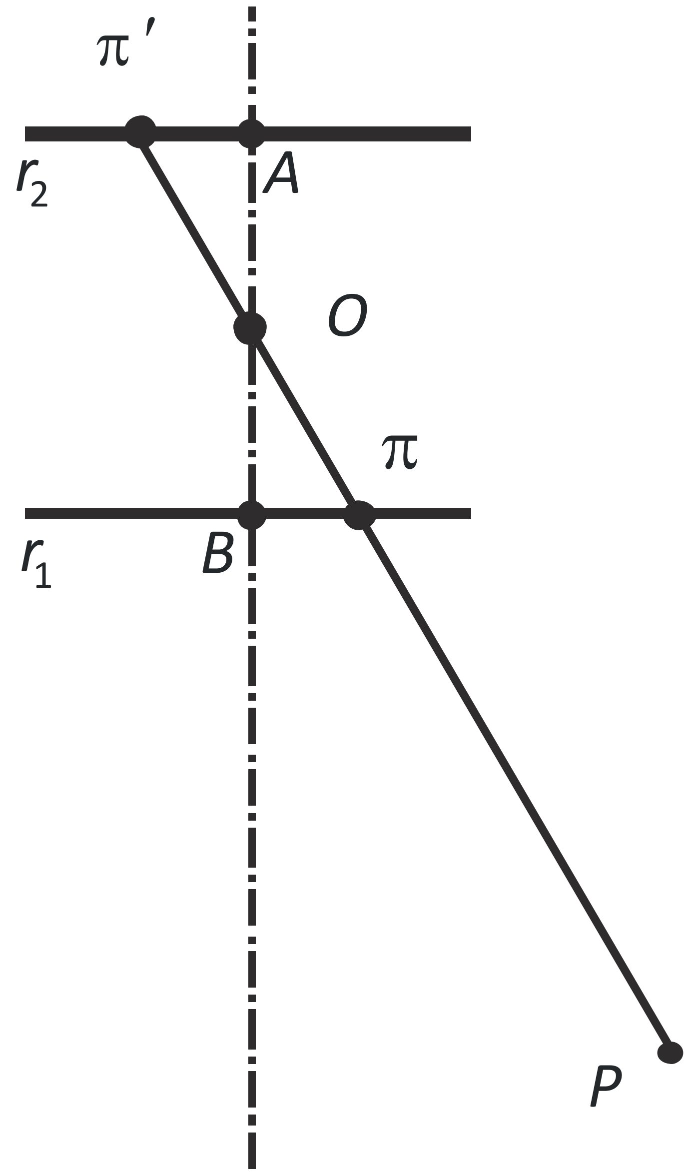
Vale

$$x = \overline{B\pi} = \overline{A\pi'} = -x'$$

Nota: $\overline{A\pi'}$ è una distanza, positiva, mentre x' è negativo, dunque $\overline{A\pi'} = -x'$.

Si può ripetere con il piano β che genera le rette r_1 e r_2 parallele all'asse y immagine.

[relazione_coordinate_positiva_negativa.cdr]



Relazione fra le coordinate immagine sulla positiva e sulla negativa - 5

In sintesi

Indicate con (x, y) le coordinate immagine del punto π.

Indicate con (x', y') le coordinate immagine del punto π'.

Si ha

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned} \qquad (1)$$

[relazione_coordinate_positiva_negativa.cdr]

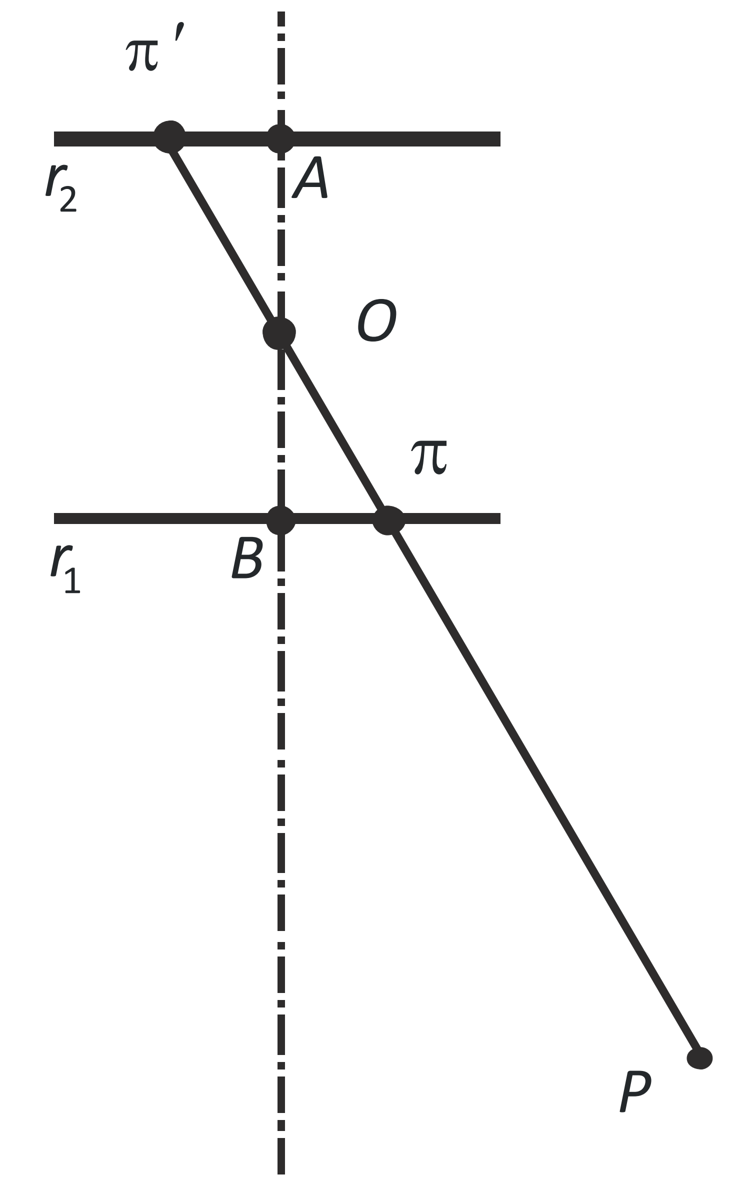
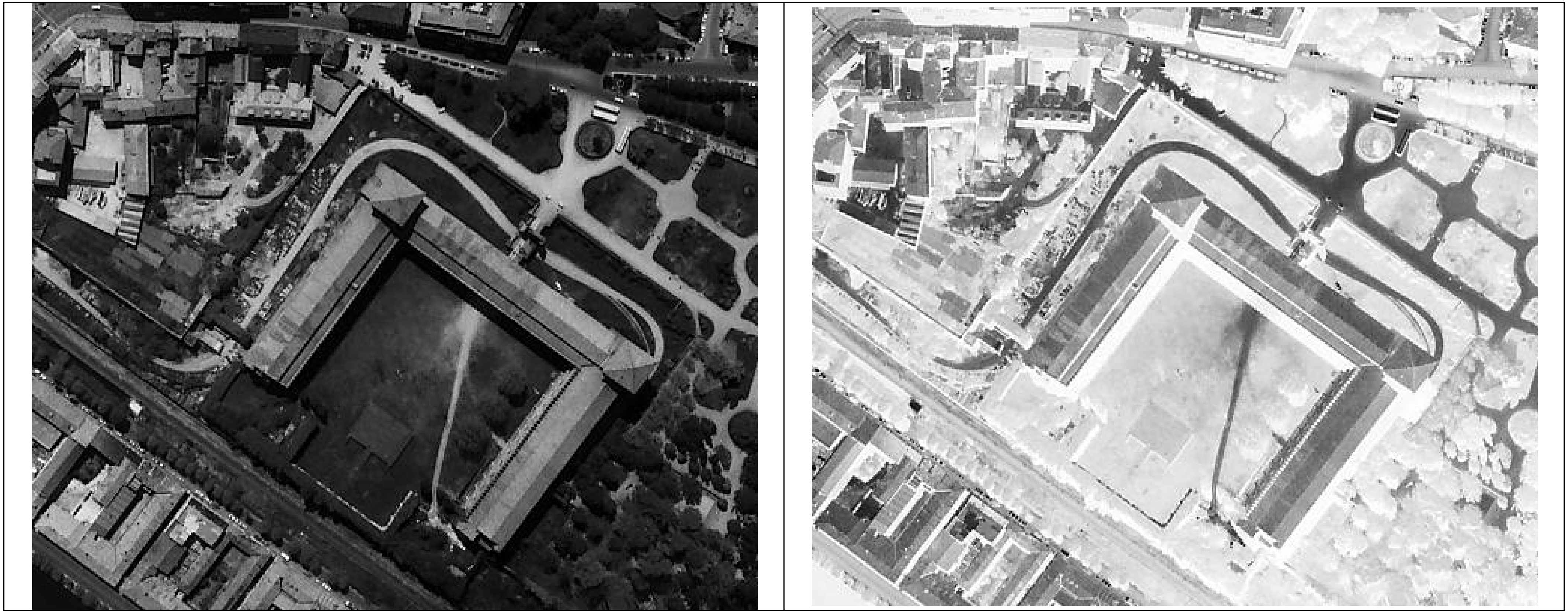


Immagine radiometricamente positiva e negativa

Immagine radiometricamente positiva e negativa. Nella prima i colori corrispondono a quelli reali, nella seconda si ha un'inversione, illustrata dalle due immagini.



[esempio_positiva.tif, esempio_negativa.tif]

Immagine radiometricamente positiva e negativa - 2

Caratterizziamo la negativa radiometrica per le immagini pancromatiche.

Un'immagine *P* viene rappresentata come matrice

$$P = \left[p_{ij} \right] \qquad 0 \le i \le m \quad 0 \le j \le n$$

$$0 \le p_{ij} \le 255$$

La corrispondente negativa *N* è caratterizzata da

$$N = \left[n_{ij} \right] \qquad 0 \le i \le m \quad 0 \le j \le n$$

$$\boxed{n_{ij} = 255 - p_{ij}}$$

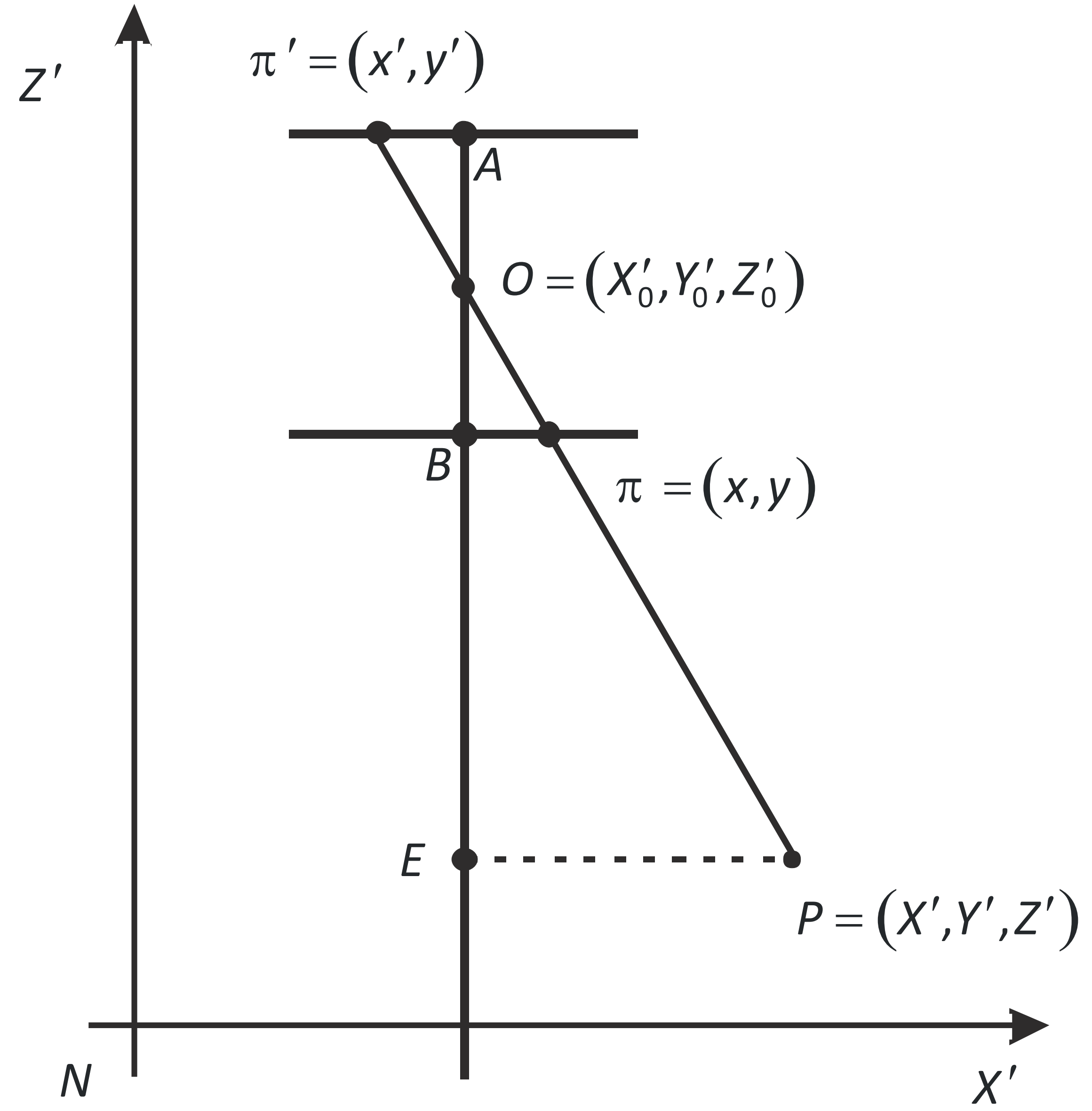
$$0 \le n_{ij} \le 255$$

Rapporti fra (N, X', Y', Z') e (O, x, y, z)

Dobbiamo caratterizzare formalmente i rapporti fra le coordinate (N, X', Y', Z') del punto P e le coordinate (O, x, y, z) del punto π.

Proiettiamo sui piani (X', Z') e (Y', Z') che sono paralleli ai piani (x, z) e (y, z) per definizione.

[casi_collinearita_XZ_dx.cdr]

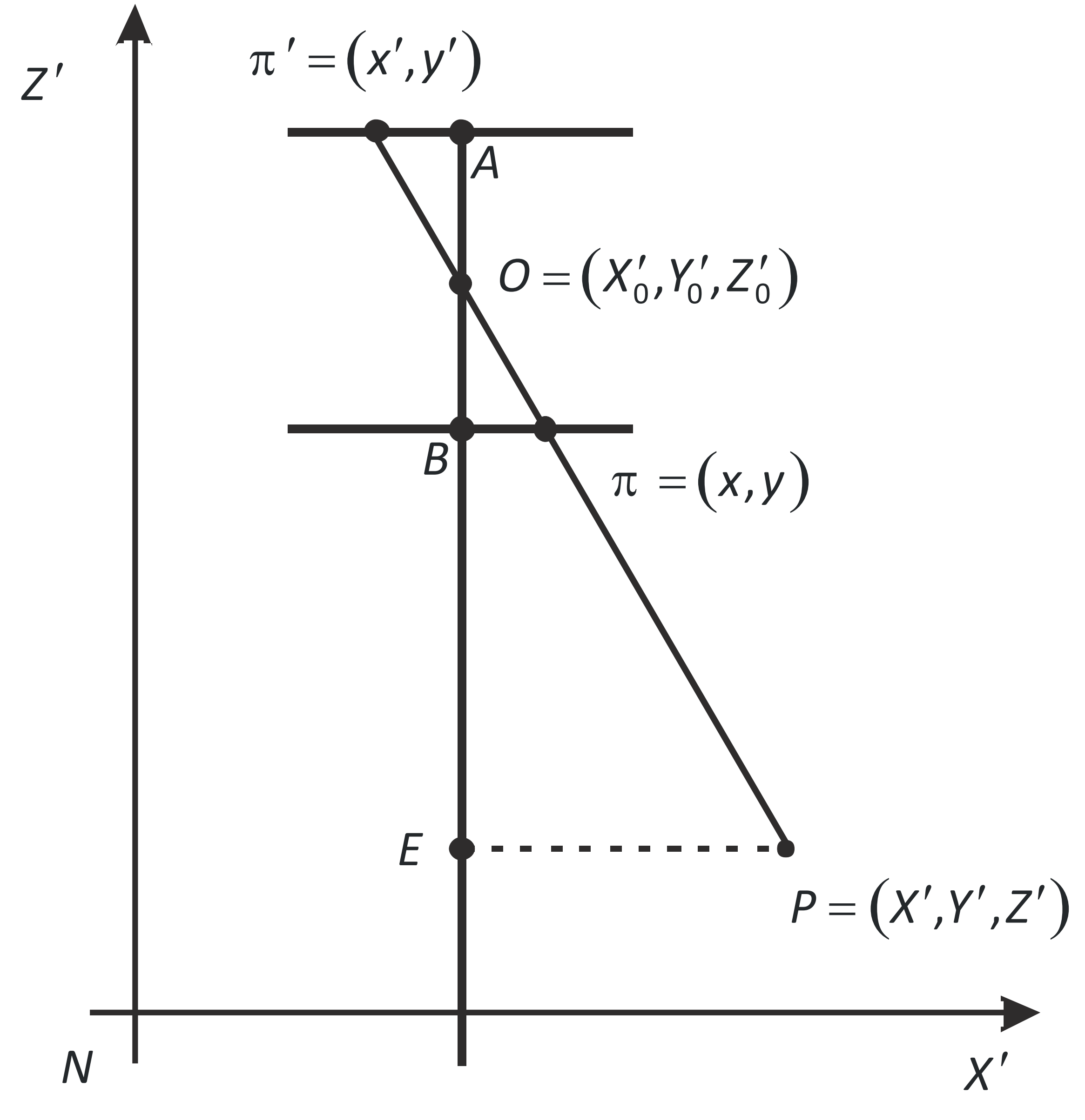


Rapporti fra (N, X', Y', Z') e (O, x, y, z) - 2

I casi che si possono presentare possono essere catalogati in funzione di tre parametri:

- sezione parallela al piano (X', Z') oppure (Y', Z')
- caso A (il punto P si trova a destra dell'asse della camera) o caso B (si trova a sinistra)
- immagine positiva o negativa

[casi_collinearita_XZ_dx.cdr]



Rapporti fra $\left(N,X',Y',Z'\right)$ e $\left(O,x,y,z\right)$ - 3

Sequenza della dimostrazione

- Ricaviamo le equazioni valide per sezione $\left(X',Z'\right)$, positiva, caso A
- Verifichiamo che le stesse equazioni valgono anche nel caso B
- Ricaviamo le relazioni per sezione $\left(X',Z'\right)$, negativa, caso A; il caso B non è preso in considerazione perché le formule ottenute nel caso A valgono evidentemente anche per il B
- Ricaviamo le relazioni per la sezione $\left(Y',Z'\right)$, per la positiva e la negativa
- Verifichiamo che le equazioni per la positiva e le negativa sono diverse, ma riconducibili le une alle altre.

Proiezione sul piano (X',Z'); caso A

Ci sono tre triangoli simili

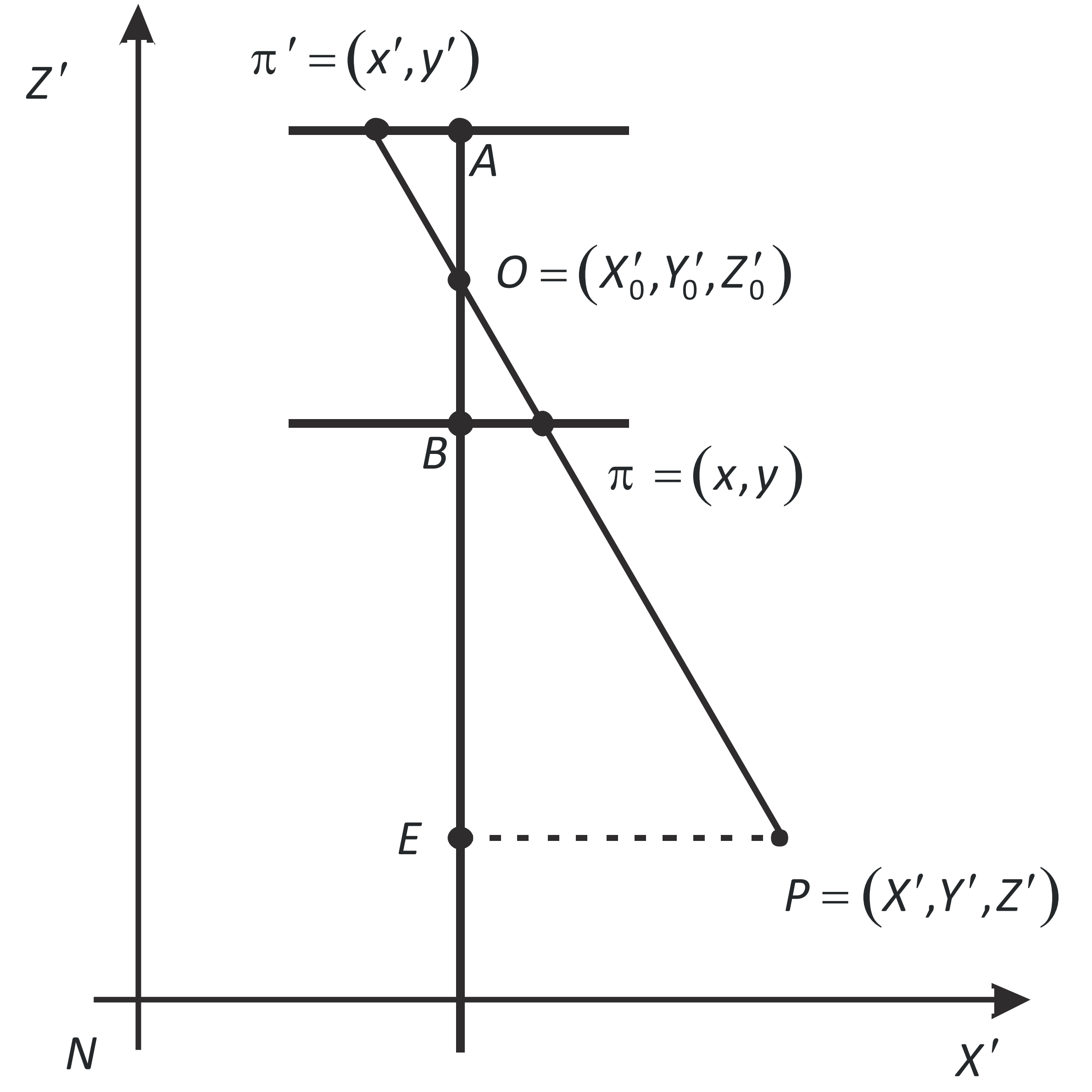
$\Delta(O,A,\pi')$ e $\Delta(O,B,\pi)$ sono simili in quanto opposti al vertice

$\Delta(O,B,\pi)$ e $\Delta(O,E,P)$ hanno un punto in comune e due lati paralleli

I tre triangoli simili hanno i lati in proporzione

In particolare $\Delta(O,A,\pi')$ e $\Delta(O,B,\pi)$ sono uguali perché i lati $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ sono uguali a c per costruzione

[casi_collinearita_XZ_dx.cdr]



Proiezione sul piano (X',Z'); caso A; positiva

Nota. L'asse x punta a destra in quanto X' va dalla stessa parte, per costruzione.

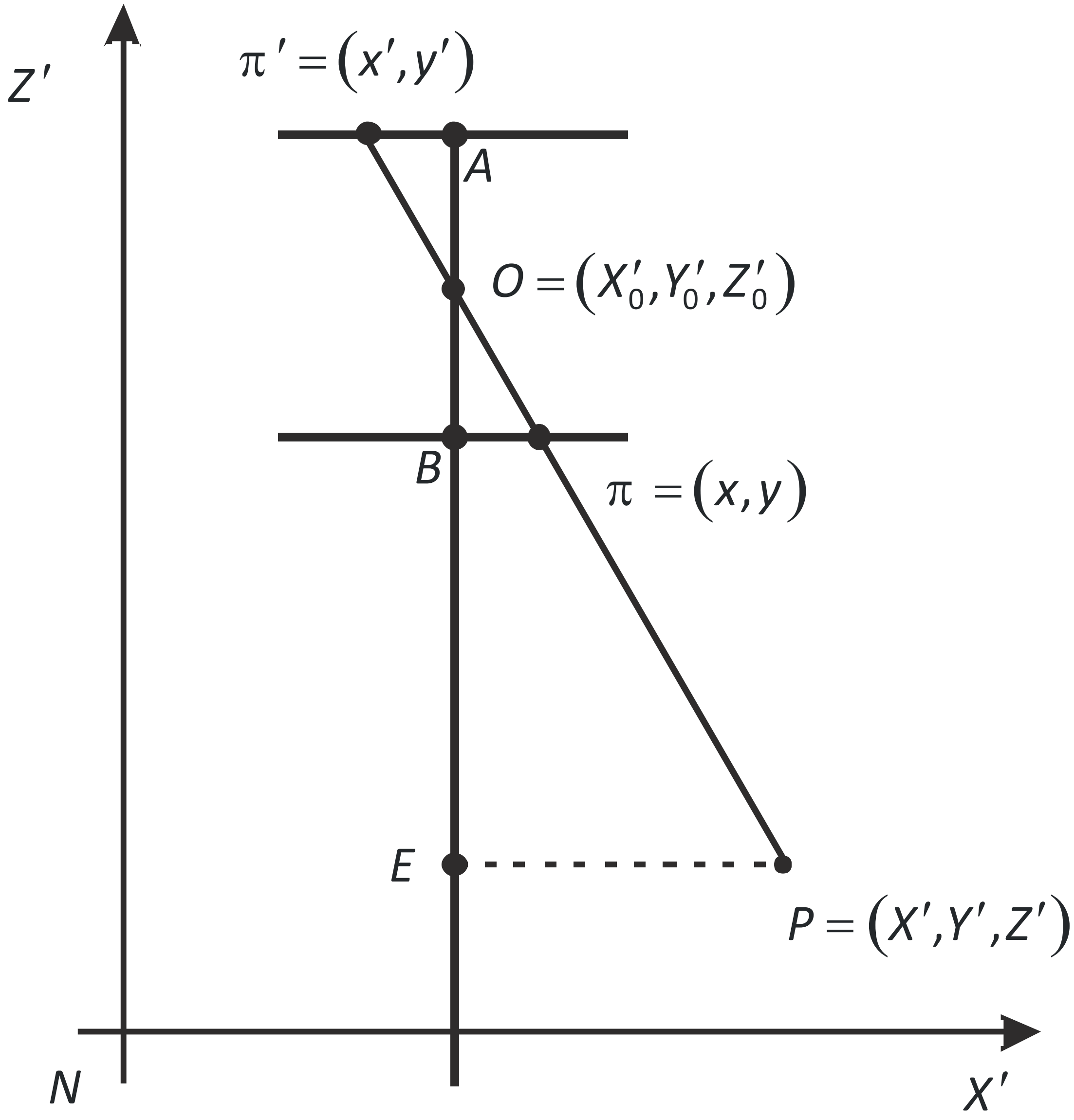
Consideriamo l'immagine positiva e dunque la coppia di triangoli $\Delta(O,B,\pi)$ e $\Delta(O,E,P)$: i lati $\overline{OB}$ e $\overline{OE}$ sono in proporzione, così come i lati $\overline{B\pi}$ e $\overline{EP}$. Si ha

$\overline{OB} = c$

$\overline{OE} = Z'_0 - Z'$

$\overline{B\pi} = x$ (ascissa immagine)

$\overline{EP} = X' - X'_0$



[casi_collinearita_XZ_dx.cdr]

Proiezione sul piano (X',Z'); caso A; positiva - 2

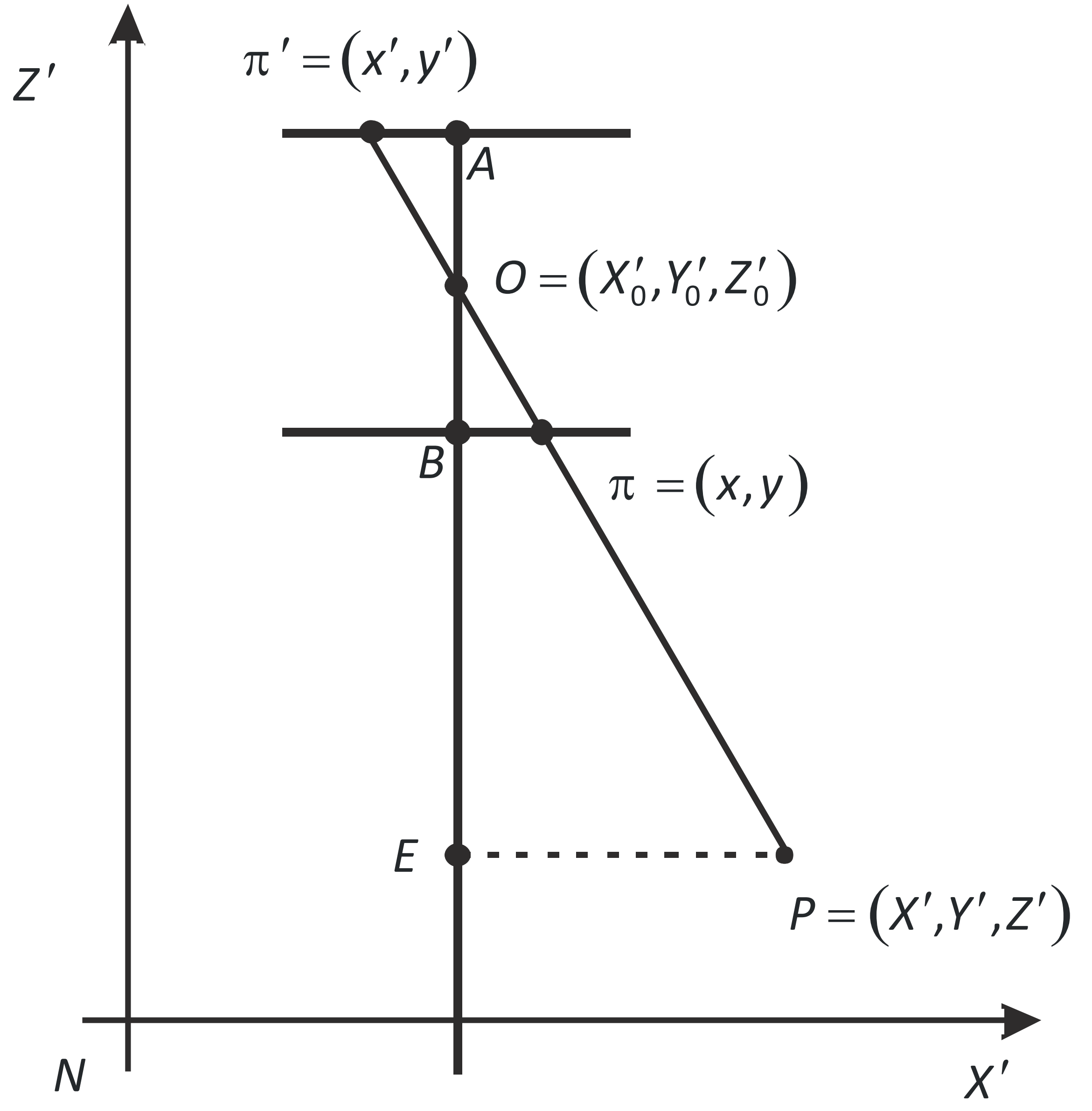
Si può scrivere per la positiva, nel caso A

$$\frac{x}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$\frac{x}{c} = -\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$$

$$x = -c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \qquad (2)$$

[casi_collinearita_XZ_dx.cdr]



Proiezione sul piano (X',Z'); caso B; positiva

Consideriamo ora il caso B, in cui il punto-oggetto P si trova a sinistra.

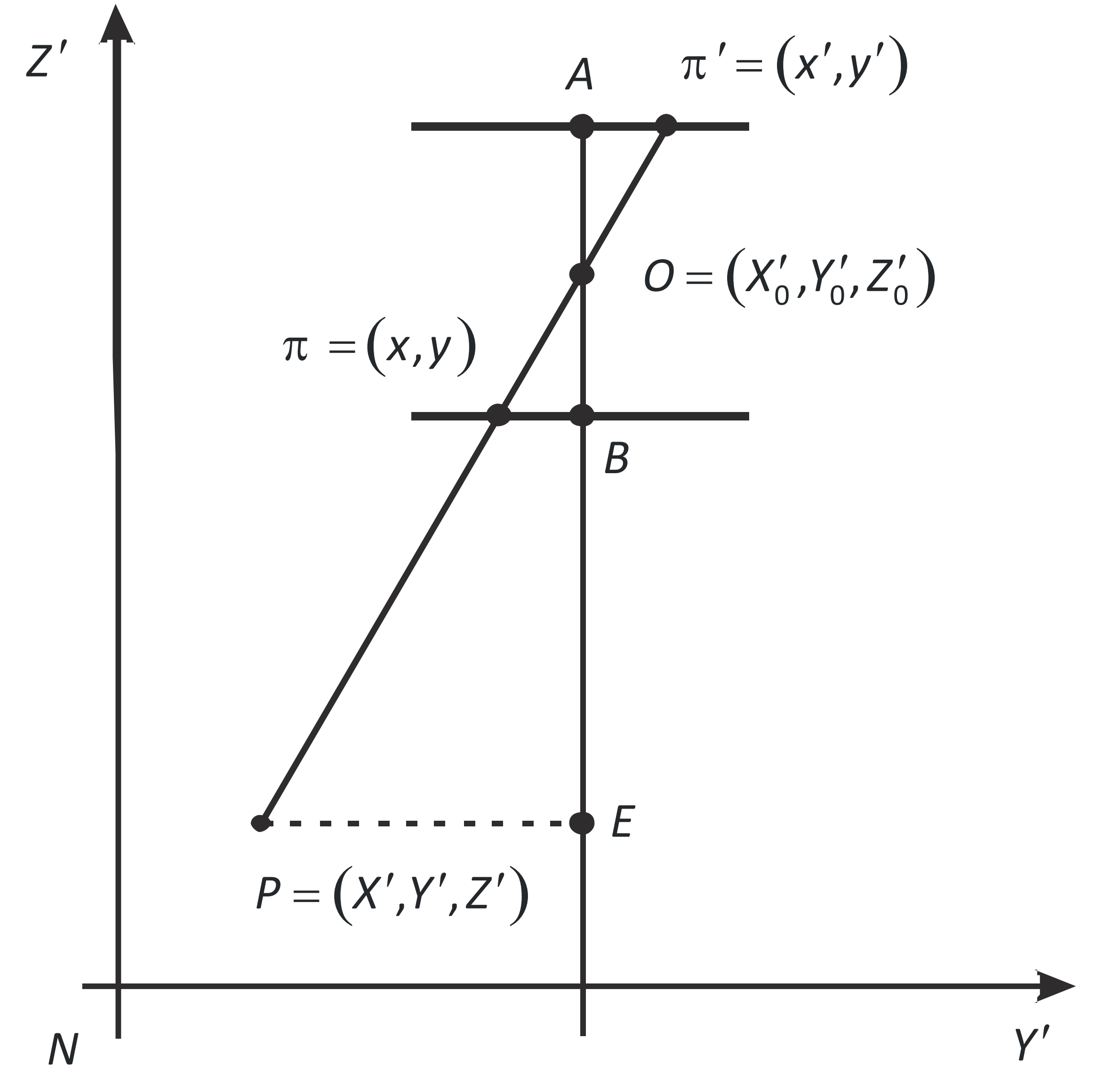
Consideriamo l'immagine positiva e dunque la coppia di triangoli $\Delta(O,B,\pi)$ e $\Delta(O,E,P)$: i lati $\overline{OB}$ e $\overline{OE}$ sono in proporzione, così come i lati $\overline{B\pi}$ e $\overline{EP}$. Si ha

$\overline{OB} = c$

$\overline{OE} = Z_0' - Z'$

$\overline{B\pi} = -x$ (la distanza, positiva, è l'opposto della ascissa immagine, che è evidentemente negativa per π)

$\overline{EP} = X_0' - X'$



Proiezione sul piano (X', Z'); caso B; positiva - 2

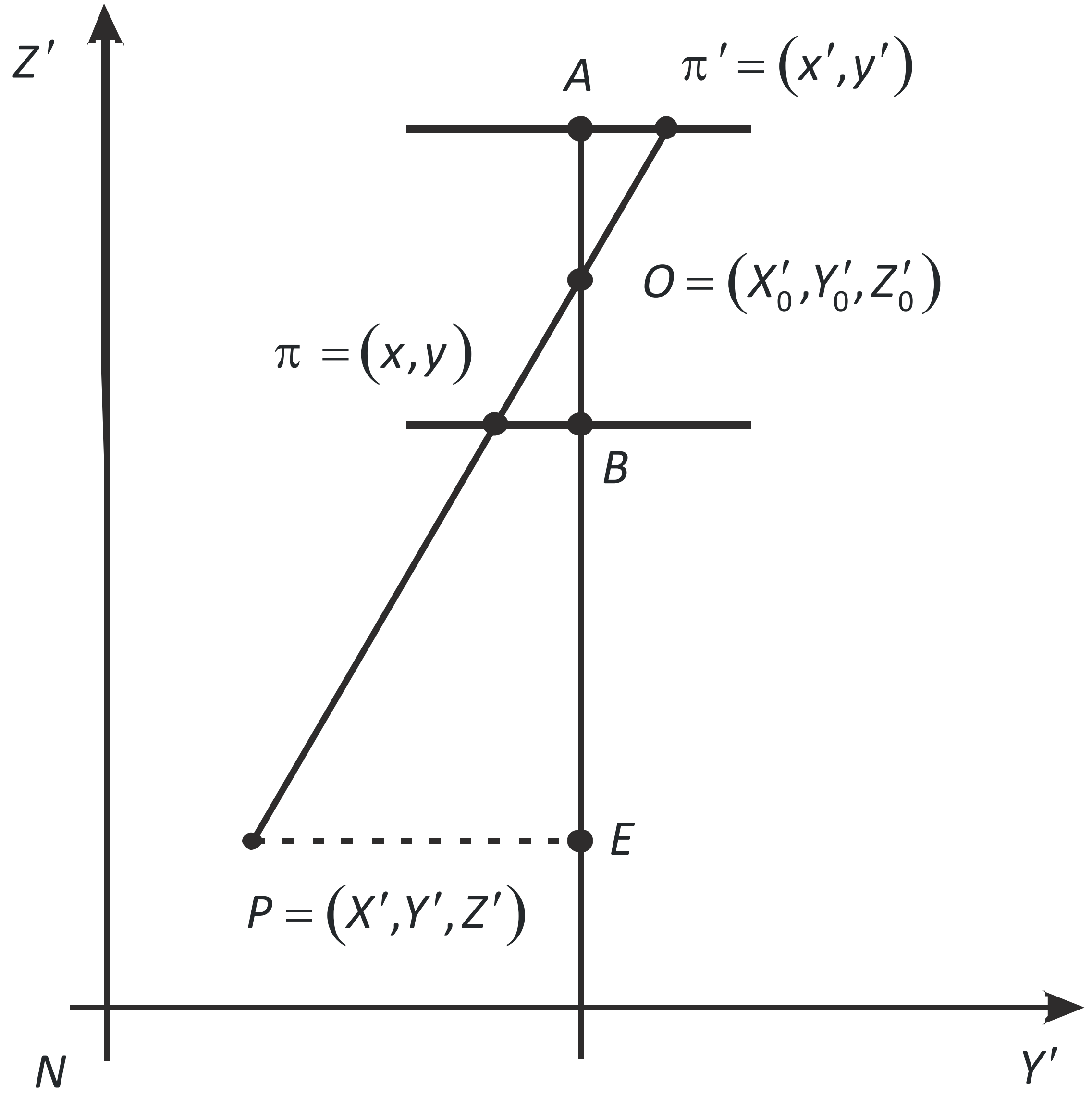
In conclusione per il **caso B** si ha

$$\frac{-x}{c} = \frac{X'_0 - X'}{Z'_0 - Z'}$$

$$\frac{-x}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$$

$$x = -c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \qquad (3)$$

La (3) coincide con la (2) dunque i casi A e B sono descritti dalle stesse equazioni. D'ora in poi verrà preso in considerazione il solo caso A.



Proiezione sul piano (X', Z'); negativa

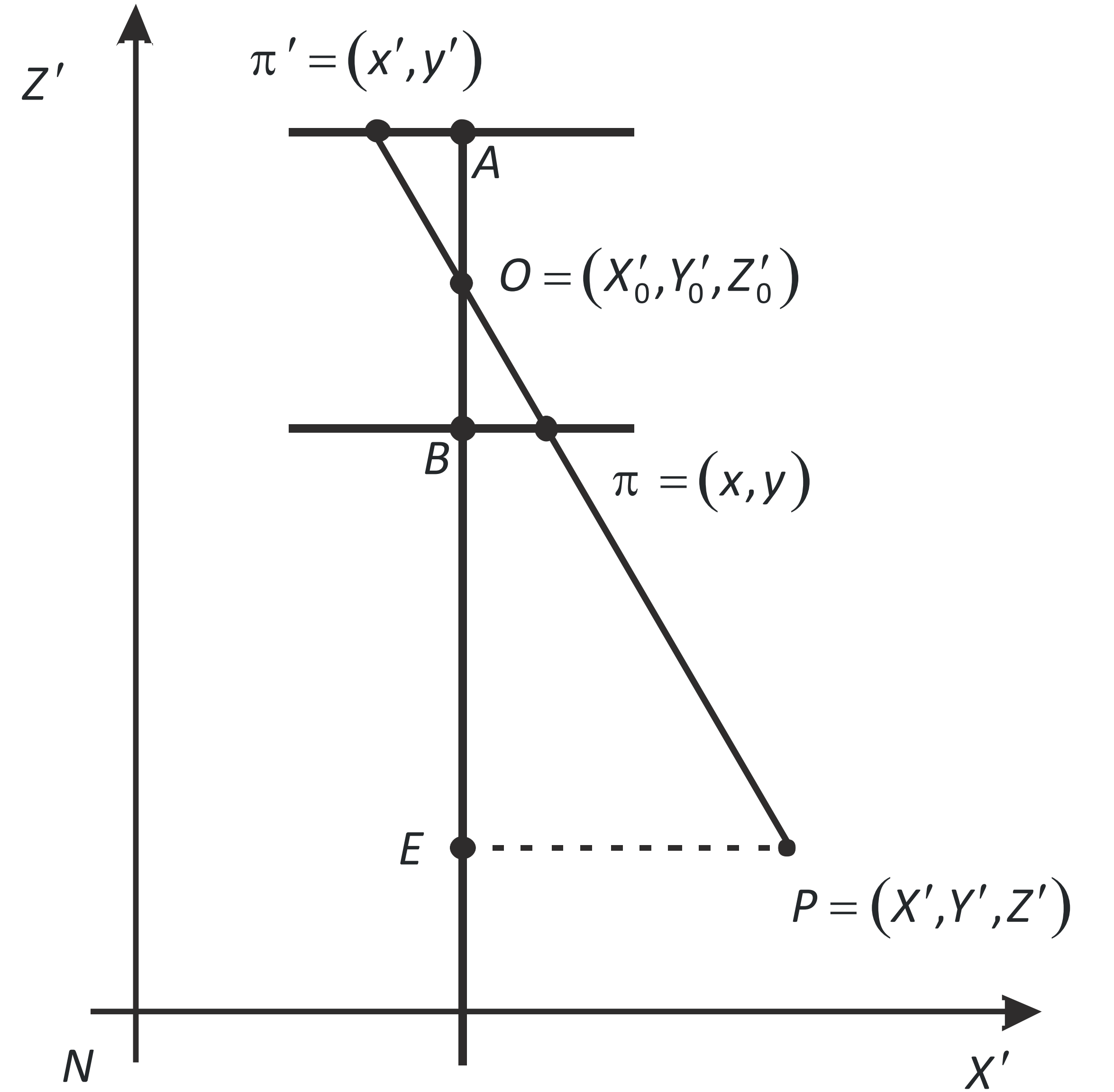
Consideriamo l'immagine negativa e dunque la coppia di triangoli $\Delta(O, A, \pi')$ e $\Delta(O, E, P)$: i lati $\overline{OA}$ e $\overline{OE}$ sono in proporzione, così come i lati $\overline{A\pi'}$ e $\overline{EP}$. Si ha

$\overline{OA} = c$

$\overline{OE} = Z'_0 - Z'$

$\overline{A\pi'} = -x$ (la distanza, positiva, è l'opposto della ascissa immagine, che è evidentemente negativa per π')

$\overline{EP} = X' - X'_0$



Proiezione sul piano (X',Z'); negativa - 2

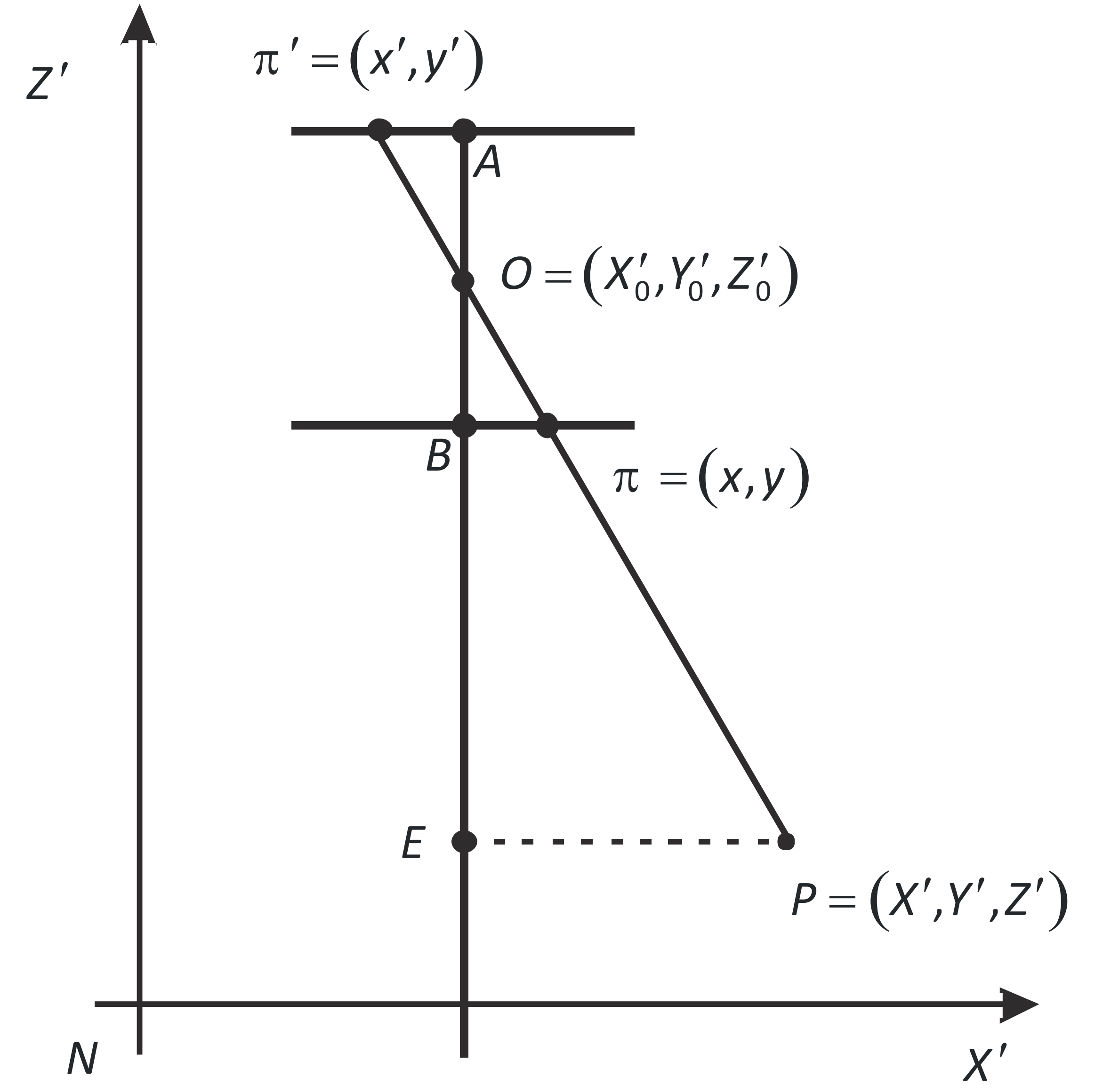
Si può scrivere per la negativa

$$\frac{-x'}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$\frac{-x'}{c} = -\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$$

$$x' = c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \qquad (4)$$

La (4) non coincide con la (3) perché si riferiscono punti-immagine diversi.

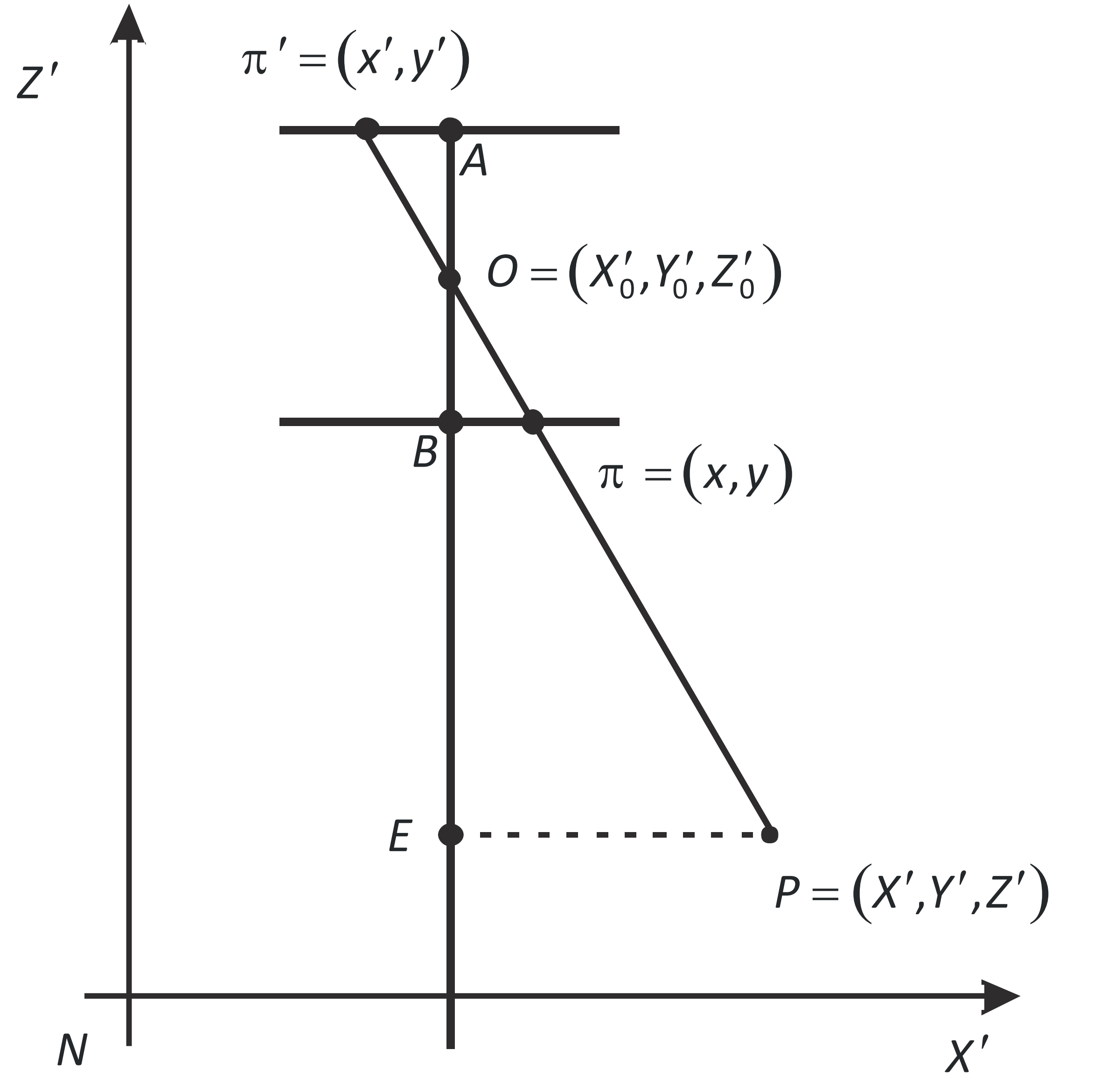


Proiezione sul piano (X',Z'): sintesi

Sintesi

$$x = -c\frac{X'-X'_0}{Z'-Z'_0} \qquad \text{positiva}$$

$$x' = c\frac{X'-X'_0}{Z'-Z'_0} \qquad \text{negativa}$$



Proiezione sul piano (X',Z'); rapporto fra positiva e negativa

Positiva	Negativa
$x=-c\dfrac{X'-X_0'}{Z'-Z_0'}$	$x'=c\dfrac{X'-X_0'}{Z'-Z_0'}$

Le due non coincidono perché si riferiscono punti-immagine diversi: sarebbe sospetto se lo facessero.

Se tuttavia ci si ricorda che

$$x'=-x$$

si capisce che sono equivalenti.

Proiezione sul piano (Y',Z'); positiva

Analogia completa. Consideriamo la positiva

$\overline{OB} = c$

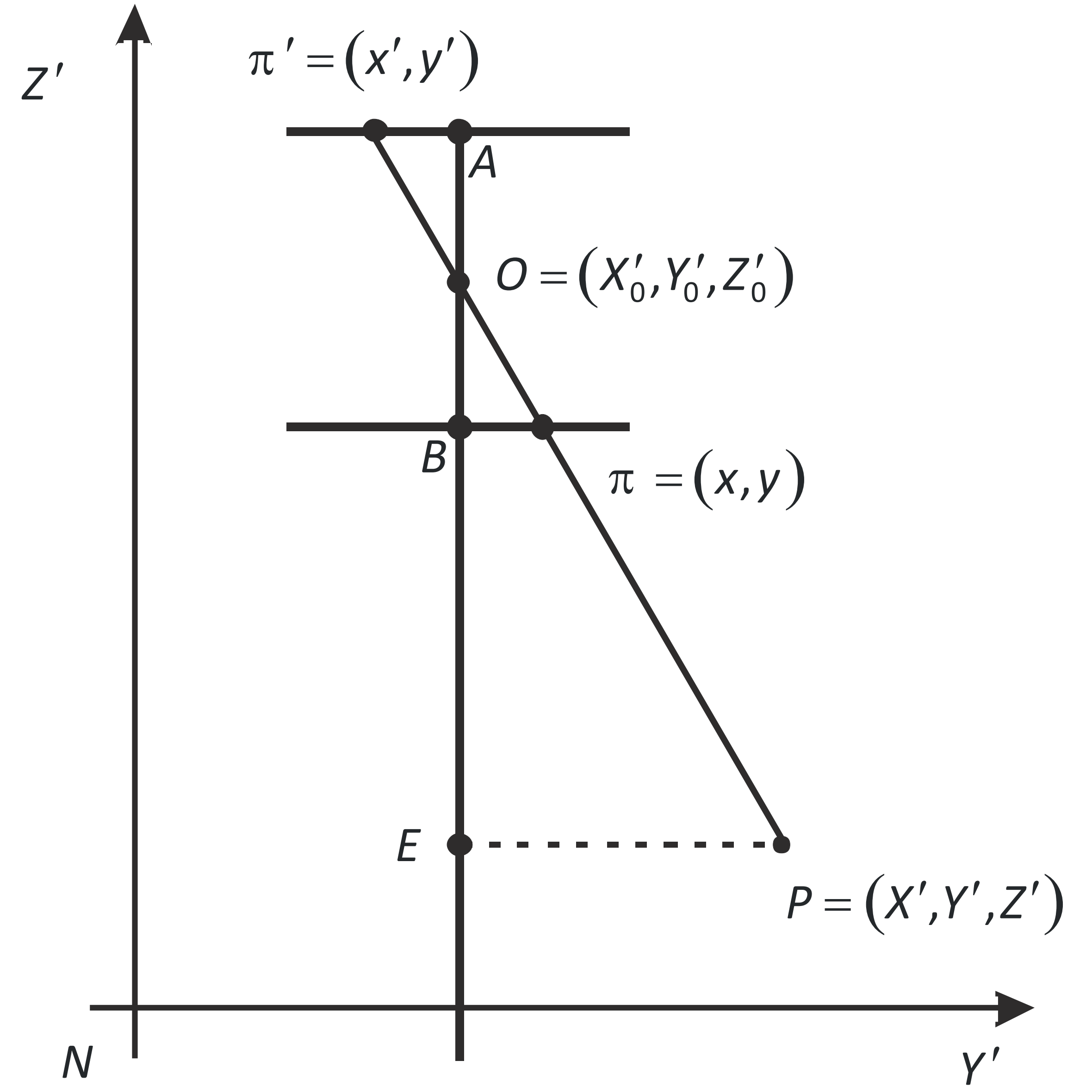
$\overline{OE} = Z'_0 - Z'$

$\overline{B\pi} = y$ (ascissa immagine)

$\overline{EP} = Y' - Y'_0$

$$\frac{y}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$y = -c\frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0} \qquad (5)$$



Proiezione sul piano (Y',Z'); negativa

Analogia completa. Consideriamo la negativa

$$\overline{OA} = c$$

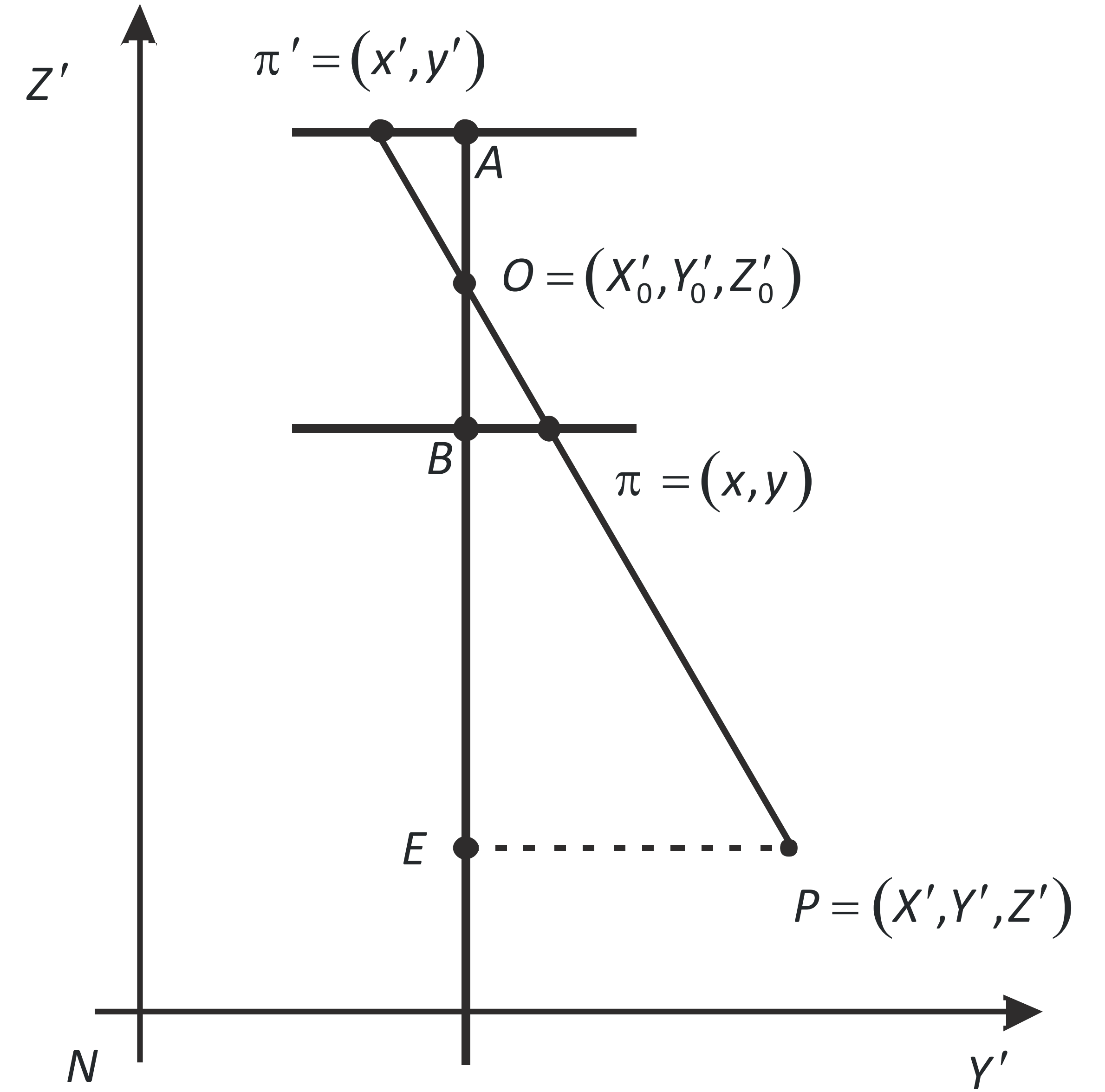
$$\overline{OE} = Z'_0 - Z'$$

$\overline{A\pi'} = -y'$ (ascissa immagine)

$$\overline{EP} = Y' - Y'_0$$

$$\frac{-y'}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

$$y' = c\frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0} \qquad (6)$$



Sintesi sul legame fra (N, X', Y', Z') e (O, x, y, z)

Positiva	Negativa
$x = -c\dfrac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$ $y = -c\dfrac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0}$	$x' = c\dfrac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0}$ $y' = c\dfrac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0}$

Come già detto, le due coppie di equazioni non coincidono si riferiscono a punti-immagine diversi.

Se tuttavia ci si ricorda che

$$(x, y) = -(x', y')$$

si capisce che sono equivalenti.

Sintesi sul legame fra (N,X',Y',Z') e (O,x,y,z) - 2

Osserviamo che, una volta costruita una certa relazione valida per la positiva, per avere l'analoga relazione valida per la negativa, è sufficiente inserire, al posto di

$$\left(x,y\right)$$

la quantità

$$\left(-x',-y'\right)$$

D'ora in poi verrà considerata solo la positiva.

Perché privilegiare la positiva, vista che l'immagine acquisita è la negativa?

Perché l'immagine osservata per fare le misure è la positiva, ottenuta in laboratorio dalla negativa.

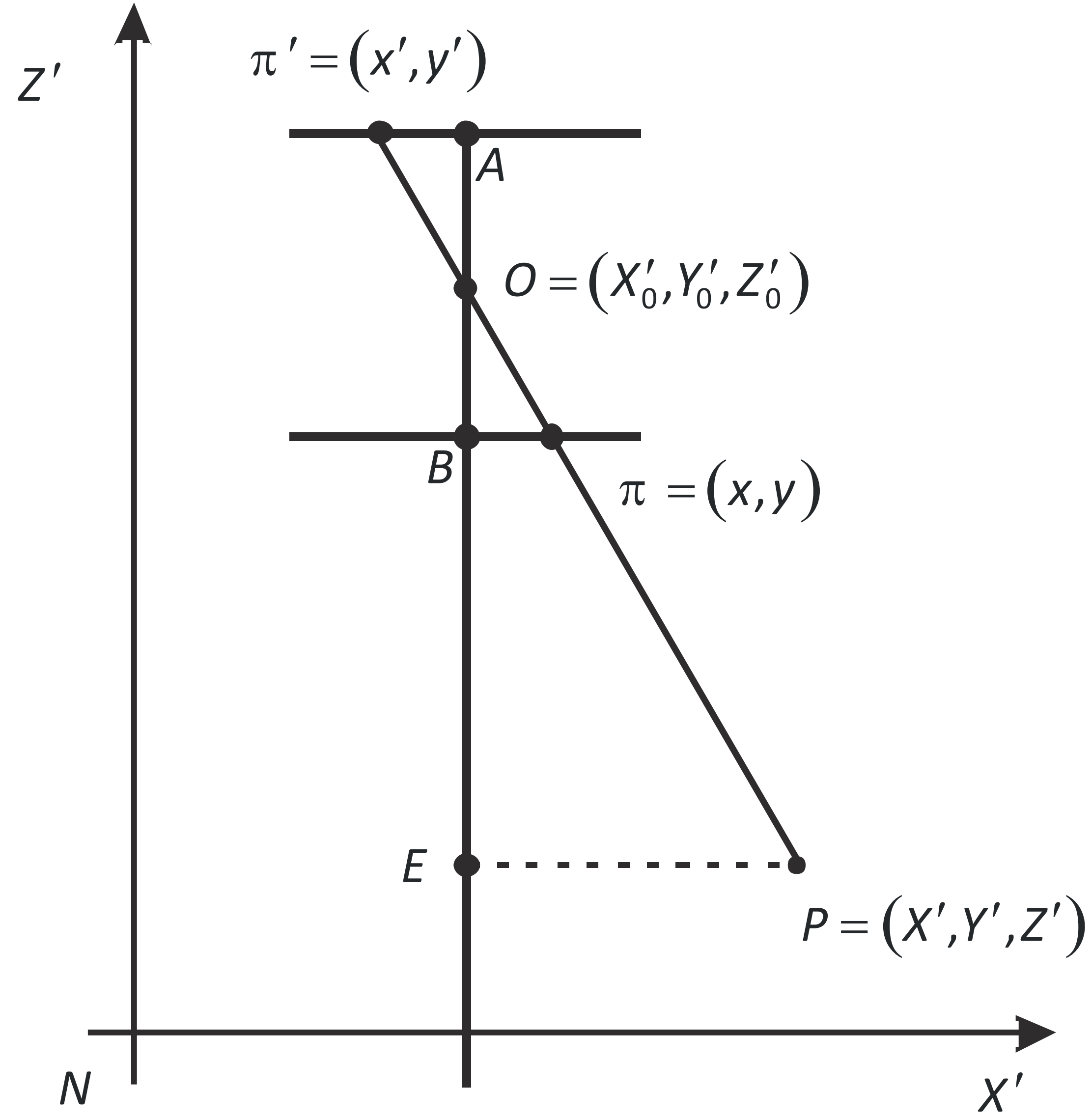
Sintesi finale sul rapporto fra (N, X', Y', Z') e (O, x, y, z)

Per la positiva, l'unica considerata d'ora in poi

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \\ y &= -c\frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0} \end{aligned}} \qquad (7)$$

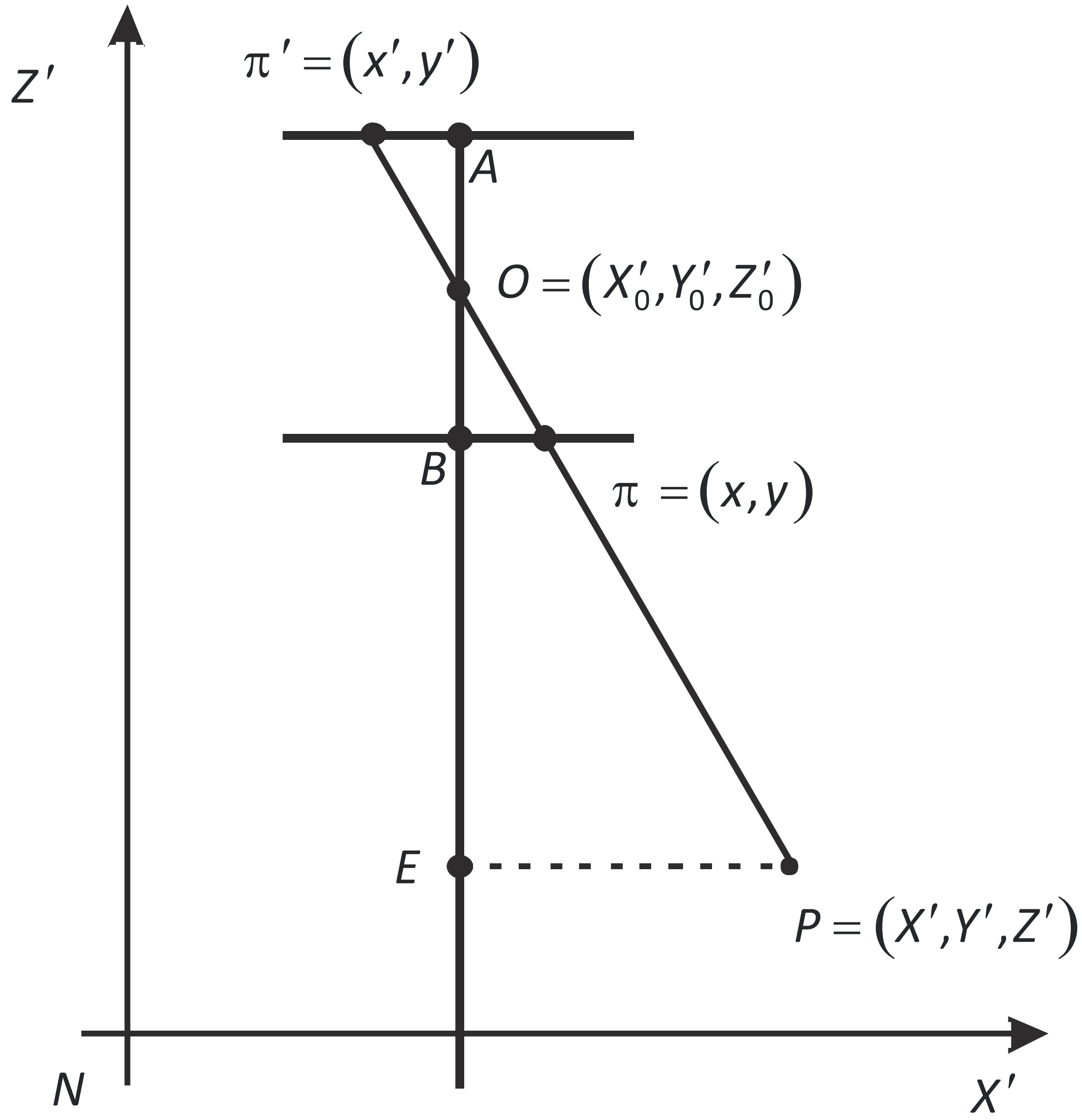
Implicazioni e assunzioni della costruzione fatta - 1

La retta passante per A,O,B è parallela all'asse dell'obiettivo: implicazione in quanto per costruzione il SR immagine ha l'asse z parallelo all'asse dell'obiettivo.



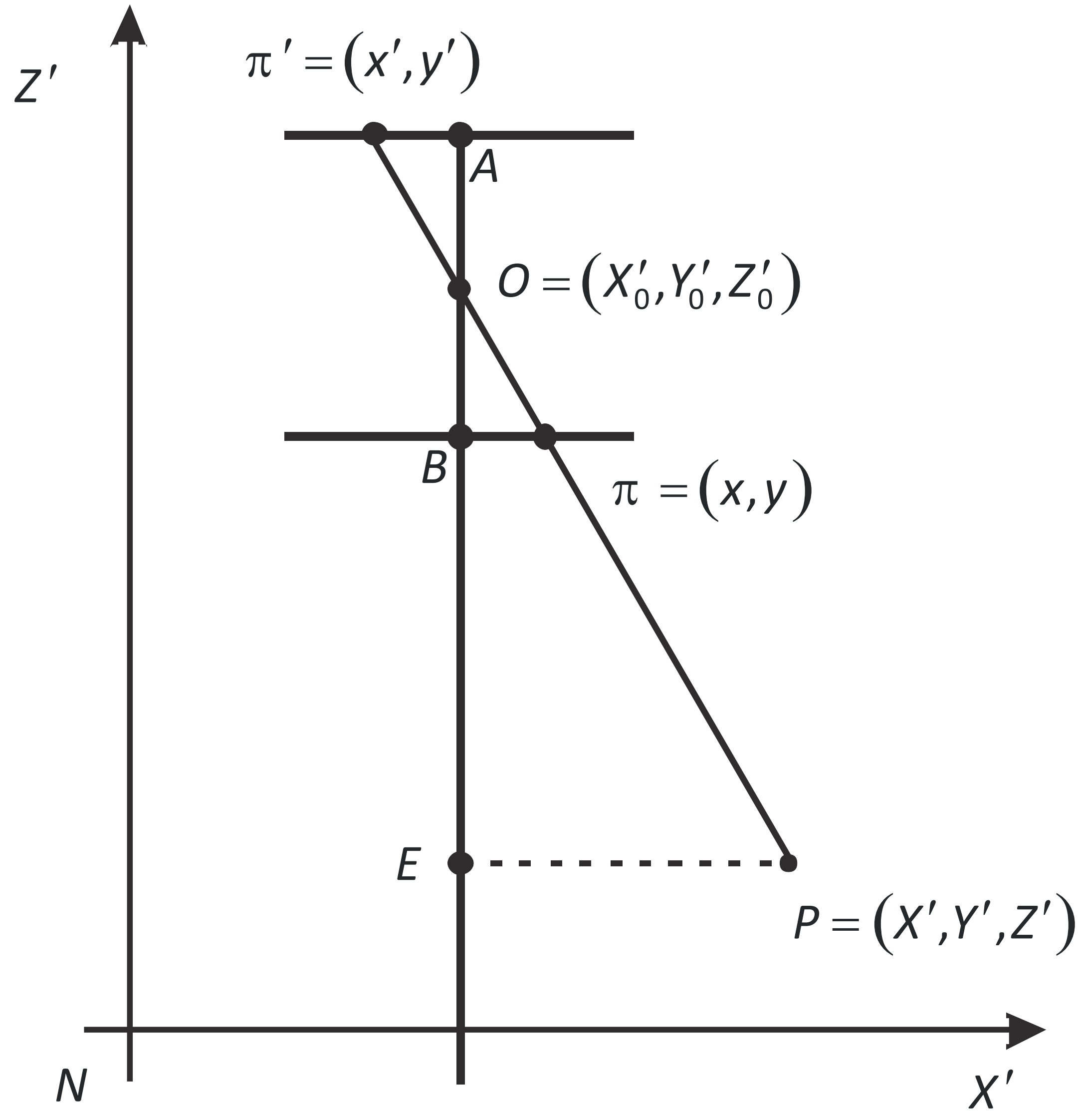
Implicazioni e assunzioni della costruzione fatta - 2

Gli assi x, y sono paralleli ai bordi del fotogramma. E' una opportunità: non è stata usata in alcun modo e non è necessaria, ma considerazioni pratiche la suggeriscono.



Implicazioni e assunzioni della costruzione fatta - 3

L'origine del SR immagine si trova sull'asse dell'obiettivo e la sua proiezione sui piani focali si trova dunque nel punto in cui essi sono intersecati dall'asse stesso: è una assunzione necessaria perché solo in questo caso la lunghezza dei lati dei triangoli simili è data dalle componenti x e y delle coordinate immagine.



Rapporto fra (N, X, Y, Z) e (N, X', Y', Z')

Si tratta evidentemente di due SR ruotati. Si può introdurre una matrice di rotazione

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(\omega, \phi, \kappa)\mathbf{X}' \qquad (8)$$

D'ora in poi la matrice verrà indicata sono con **R**.

Conseguenze immediate della (8)

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) &= \mathbf{R}(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_0) \\ (\mathbf{X}' - \mathbf{X}'_0) &= \mathbf{R}^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \end{aligned} \qquad (9)$$

Dimostrare

Combinazione dei risultati: rapporti fra (N,X,Y,Z) e (O,x,y,z)

Esplicitando le componenti della seconda della (9) si ha

$$\begin{pmatrix} X'-X'_0 \\ Y'-Y'_0 \\ Z'-Z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^t_{11}(X-X_0)+R^t_{12}(Y-Y_0)+R^t_{13}(Z-Z_0) \\ R^t_{21}(X-X_0)+R^t_{22}(Y-Y_0)+R^t_{23}(Z-Z_0) \\ R^t_{31}(X-X_0)+R^t_{32}(Y-Y_0)+R^t_{33}(Z-Z_0) \end{pmatrix}$$

e, facendo comparire gli elementi della matrice $\boldsymbol{R}$, invece che di $\mathbf{R}^t$, si ha

$$\begin{pmatrix} X'-X'_0 \\ Y'-Y'_0 \\ Z'-Z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}(X-X_0)+R_{21}(Y-Y_0)+R_{31}(Z-Z_0) \\ R_{12}(X-X_0)+R_{22}(Y-Y_0)+R_{32}(Z-Z_0) \\ R_{13}(X-X_0)+R_{23}(Y-Y_0)+R_{33}(Z-Z_0) \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Equazioni della fotografia

Inserimo le (10) nelle (7)

$$x=-c\frac{R_{11}\left(X-X_0\right)+R_{21}\left(Y-Y_0\right)+R_{31}\left(Z-Z_0\right)}{R_{13}\left(X-X_0\right)+R_{23}\left(Y-Y_0\right)+R_{33}\left(Z-Z_0\right)}$$

$$y=-c\frac{R_{12}\left(X-X_0\right)+R_{22}\left(Y-Y_0\right)+R_{32}\left(Z-Z_0\right)}{R_{13}\left(X-X_0\right)+R_{23}\left(Y-Y_0\right)+R_{33}\left(Z-Z_0\right)}$$

Equazioni di collinearità per un punto e per una immagine.

Come detto, tali equazioni dicono il fatto che i punti

- il punto-oggetto P
- la sua immagine, il punto-immagine π
- il centro di presa O

appartengono alla stessa retta, cioè sono collineari.

Equazioni della restituzione

Ripartiamo dalle(7). Ricordiamo che il sr lastra sia tridimensionale, con l'origine nel centro di presa, gli assi x e y diretti nella maniera nota e l'asse z diretto in modo da formare una terna destrorsa [DISEGNO]. Per la positiva, tutti i punti-immagine avranno quota $-c$; per la negativa la quota sarà c. Consideriamo la positiva

$$
\begin{aligned}
x &= -c\frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \\
y &= -c\frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0} \\
z &= -c = -c\frac{Z' - Z'_0}{Z' - Z'_0}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Equazioni della restituzione - 2

Positiva e negativa

Anche quando si considera il SR immagine completo, tridimensionale, il rapporto che lega le coordinate lastra sulla positiva (x, y, z) a quelle sulla negativa (x', y', z') dei due punti π e π'

$(x, y, z) = -(x', y', z')$

resta vera la conclusione già raggiunta che le relazioni valide per la negativa possono essere ottenute da quelle ricavate sulla positiva semplicemente con la sostituzione

$$(x, y, z) = -(x', y', z')$$

Stiamo sulla positiva

Equazioni della restituzione - 3

Moltiplichiamo le (11) per $\left(Z'-Z'_0\right)$

$$\left(Z'-Z'_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} X'-X'_0 \\ Y'-Y'_0 \\ Z'-Z'_0 \end{pmatrix}$$ ricordando che $z = \text{-}c$

$$\left(Z'-Z'_0\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ -c \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} X'-X'_0 \\ Y'-Y'_0 \\ Z'-Z'_0 \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per **R** a sinistra

$$\left(Z'-Z'_0\right)\mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -c \end{pmatrix} = -c\mathbf{R}\begin{pmatrix} X'-X'_0 \\ Y'-Y'_0 \\ Z'-Z'_0 \end{pmatrix}$$

Equazioni della restituzione - 4

Ricordiamo la prima delle (9) cioè

$$\left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right)=\mathbf{R}\left(\mathbf{X}'\text{-}\ \mathbf{X}_0'\right)$$

ricaviamo

$$\left(Z'-Z_0'\right)\mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -c \end{pmatrix}=-c\begin{pmatrix} X-X_0 \\ Y-Y_0 \\ Z-Z_0 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo i calcoli ed esplicitiamo rispetto alle componenti del vettore $\mathbf{X}-\mathbf{X}_0$

$$\begin{aligned} X-X_0 &= -\frac{Z'-Z_0'}{c}\left(R_{11}x+R_{12}y-R_{13}c\right) \\ Y-Y_0 &= -\frac{Z'-Z_0'}{c}\left(R_{21}x+R_{22}y-R_{23}c\right) \\ Z-Z_0 &= -\frac{Z'-Z_0'}{c}\left(R_{31}x+R_{32}y-R_{33}c\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

Equazioni della restituzione - 5

Dalla terza si ricava

$$-\frac{Z'-Z'_0}{c}=\frac{Z-Z_0}{R_{31}x+R_{32}y-R_{33}c}$$

che può essere sostituita nelle prime due della (12)

$$\begin{aligned} X &= X_0+\left(Z-Z_0\right)\frac{R_{11}x+R_{12}y-R_{13}c}{R_{31}x+R_{32}y-R_{33}c} \\ Y &= Y_0+\left(Z-Z_0\right)\frac{R_{21}x+R_{22}y-R_{23}c}{R_{31}x+R_{32}y-R_{33}c} \end{aligned} \qquad (13)$$

Dalle tre equazioni (12) si possono ricavare solo due equazioni significative, le (13)Da queste due equazioni non è ovviamente possibile ricavare le coordinate oggetto $\left(X,Y,Z\right)$ di un punto, note le coordinate lastra $\left(x,y\right)$ e noti i parametri dell'orientamento esterno del fotogramma $\left(X_0,Y_0,Z_0\right)$ e $\left(\omega,\phi,\kappa\right)$.

Equazioni di collinearità come equazioni di rette - 1

Si può dimostrare che le (13) costituiscono l'equazione di una retta nello spazio.

Equazione della retta nel piano

$$ax + by + c = 0$$

Equazione del piano nello spazio

$$ax + by + cz + d = 0$$

Equazione delle retta nello spazio: intersezione di due piani

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Equazioni di collinearità come equazioni di rette - 2

Prendiamo la prima delle (13): fissati OE e coordinate immagine, si tratta proprio di una retta

$$X = X_0 + \left(Z - Z_0\right)\frac{R_{11}x + R_{12}y - R_{13}c}{R_{31}x + R_{32}y - R_{33}c}$$

$$X - Z\frac{R_{11}x + R_{12}y - R_{13}c}{R_{31}x + R_{32}y - R_{33}c} + Z_0\frac{R_{11}x + R_{12}y - R_{13}c}{R_{31}x + R_{32}y - R_{33}c} - X_0 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = -\frac{R_{11}x + R_{12}y - R_{13}c}{R_{31}x + R_{32}y - R_{33}c}$$

$$d = Z_0\frac{R_{11}x + R_{12}y - R_{13}c}{R_{31}x + R_{32}y - R_{33}c} - X_0$$

Orientamento esterno di un fotogramma

Complesso dei parametri che indicano posizione e assetto della camera al momento dello scatto di un fotogramma.

Tali parametri sono 6

$$X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa$$

Sinteticamente si indicano con

- $\mathbf{X}_O = \left(X_O, Y_O, Z_O \right)$
- $\mathbf{\Omega} = \left(\omega, \varphi, \kappa \right)$

Determinazione dell’orientamento esterno di uno o più fotogrammi

Si tratta di una fase preliminare necessaria, che sarà illustrata più avanti

La misura fotogrammetrica

Noti gli orientamenti esterni dei fotogrammi, si possono effettuare le misure fotogrammetriche che consistono in

- Individuazione su due o più immagini dei punti-immagine generati dallo stesso punto-oggetto; tali punti sono detti anche punti omologhi;
- misura delle coordinate-immagine dei punti immagine
- determinazione delle coordinate-oggetto del punto-oggetto con il calcolo

La misura fotogrammetrica può essere effettuata per i punti visibili su almeno due fotogrammi.

In linea di principio lo stesso punto può essere osservato su più di due fotogrammi, aumentando così la ridondanza.

La metodologia presentata in seguito può essere applicata solo alle misure di modello singolo, in cui vengono usate due immagini

La misura fotogrammetrica - 2

Consideriamo due immagini, 1 e 2, di cui conosciamo l'orientamento esterno

$$\left(\mathbf{X}_{O1}, \boldsymbol{\Omega}_1\right) \qquad \left(\mathbf{X}_{O2}, \boldsymbol{\Omega}_2\right)$$

Consideriamo il generico punto P e le sue coordinate oggetto

$$\mathbf{X} = \left(X, Y, Z\right)$$

Consideriamo anche le coordinate immagine

$$\mathbf{x}_1 = \left(x_1, y_1\right)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(x_2, y_2\right)$$

Generalizziamo le notazioni delle equazioni di collinearità per tenere conto dell'esistenza di diverse immagini

La misura fotogrammetrica – 3

Collinearità per il punto *i*-esimo, proiettato sull'immagine *j*-esima.

$$x_{ij} = -c \frac{R_{11j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{21j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{31j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}{R_{13j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{23j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{33j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}$$

$$y_{ij} = -c \frac{R_{12j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{22j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{32j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}{R_{13j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{23j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{33j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}$$

Equazioni delle restituzione per il punto *i*-esimo, proiettato sull'immagine *j*-esima.

$$X_i = X_{0j} + \left(Z_i - Z_{0j}\right) \frac{R_{11j}\, x_{ij} + R_{12j}\, y_{ij} - R_{13j}\, c}{R_{31j}\, x_{ij} + R_{32j}\, y_{ij} - R_{33j}\, c}$$

$$Y_i = Y_{0j} + \left(Z_i - Z_{0j}\right) \frac{R_{21j}\, x_{ij} + R_{22j}\, y_{ij} - R_{23j}\, c}{R_{31j}\, x_{ij} + R_{32j}\, y_{ij} - R_{33j}\, c}$$

La misura fotogrammetrica - 3

Si possono scrivere quattro equazioni nelle tre incognite (X,Y,Z)

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01}) \frac{R_{111}\, x_1 + R_{121}\, y_1 - R_{131}\, c}{R_{311}\, x_1 + R_{321}\, y_1 - R_{331}\, c}$$

$$Y = Y_{01} + (Z - Z_{01}) \frac{R_{211}\, x_1 + R_{221}\, y_1 - R_{231}\, c}{R_{311}\, x_1 + R_{321}\, y_1 - R_{331}\, c}$$

$$X = X_{02} + (Z - Z_{02}) \frac{R_{112}\, x_2 + R_{122}\, y_2 - R_{132}\, c}{R_{312}\, x_2 + R_{322}\, y_2 - R_{332}\, c}$$

$$Y = Y_{02} + (Z - Z_{02}) \frac{R_{212}\, x_2 + R_{222}\, y_2 - R_{232}\, c}{R_{312}\, x_2 + R_{322}\, y_2 - R_{332}\, c}$$

I termini frazionari giocano semplicemente il ruolo di grandezze note, dunque vengono sinteticamente indicati con K_x e K_y, dunque si può riscrivere

La misura fotogrammetrica - 4

$$X = X_{01} + \left(Z - Z_{01}\right) K_{x1} \quad K_{x1} = \frac{R_{111}\, x_1 + R_{121}\, y_1 - R_{131}\, c}{R_{311}\, x_1 + R_{321}\, y_1 - R_{331}\, c}$$

$$Y = Y_{01} + \left(Z - Z_{01}\right) K_{y1} \quad K_{y1} = \frac{R_{211}\, x_1 + R_{221}\, y_1 - R_{231}\, c}{R_{311}\, x_1 + R_{321}\, y_1 - R_{331}\, c}$$

$$X = X_{02} + \left(Z - Z_{02}\right) K_{x2} \quad K_{x2} = \frac{R_{112}\, x_2 + R_{122}\, y_2 - R_{132}\, c}{R_{312}\, x_2 + R_{322}\, y_2 - R_{332}\, c}$$

$$Y = Y_{02} + \left(Z - Z_{02}\right) K_{y2} \quad K_{y2} = \frac{R_{212}\, x_2 + R_{222}\, y_2 - R_{232}\, c}{R_{312}\, x_2 + R_{322}\, y_2 - R_{332}\, c}$$

La misura fotogrammetrica - 5

Consideriamo il sottosistema costituito dalla prima e dalla terza equazione delle

$$X = X_{01} + \left(Z - Z_{01}\right)K_{x1}$$

$$X = X_{02} + \left(Z - Z_{02}\right)K_{x2}$$

Esso è equivalente al sistema costituito dalla prima e dalla differenza fra le due, cioè

$$X = X_{01} + \left(Z - Z_{01}\right)K_{x1}$$

$$X_{01} + \left(Z - Z_{01}\right)K_{x1} - \left(X_{02} + \left(Z - Z_{02}\right)K_{x2}\right) = 0 \qquad (14)$$

Sviluppiamo la seconda

La misura fotogrammetrica – 6

$$X_{01}+\left(Z-Z_{01}\right)K_{x1}=X_{02}+\left(Z-Z_{02}\right)K_{x2}$$

$$X_{01}+ZK_{x1}-Z_{01}K_{x1}=X_{02}+ZK_{x2}-Z_{02}K_{x2}$$

$$Z\left(K_{x1}-K_{x2}\right)=X_{02}-X_{01}-Z_{02}K_{x2}+Z_{01}K_{x1}$$

$$Z=\frac{X_{02}-X_{01}-Z_{02}K_{x2}+Z_{01}K_{x1}}{K_{x1}-K_{x2}} \qquad (15)$$

Sostituiamo nella prima delle (14) per ottenere *X.*

La misura fotogrammetrica - 7

Il calcolo di Y può essere effettuato mediante la seconda o la quarta. Si ha

$$Y^{(1)} = Y_{01} + \left(Z - Z_{01}\right)K_{y1}$$

$$Y^{(2)} = Y_{02} + \left(Z - Z_{02}\right)K_{y2}$$

Dal punto di vista puramente geometrico esse sono equivalenti, ma se le coordinate lastra vengono misurate, come avviene durante la restituzione fotogrammetrica, esse forniranno risultati diversi in quanto a secondo membro si trovano misure diverse. Tale differenza può essere usata per validare le misure effettuate.

Equazioni di collinearità

Collinearità per il punto *i*-esimo, proiettato sull'immagine *j*-esima.

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= -c\frac{R_{11j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{21j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{31j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}{R_{13j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{23j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{33j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)} \\
y_{ij} &= -c\frac{R_{12j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{22j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{32j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}{R_{13j}\left(X_i - X_{0j}\right) + R_{23j}\left(Y_i - Y_{0j}\right) + R_{33j}\left(Z_i - Z_{0j}\right)}
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Introduciamo la funzione a valori vettoriali

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

tale che

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{f}\left(c, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{0j}, \boldsymbol{\Omega}_j\right)$$

equivale alle (16).

L'intersezione multipla in avanti

Un solo punto

Diversi fotogrammi

$$\tilde{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \hat{\mathbf{X}}_i, \overline{\mathbf{X}}_{0j}, \overline{\mathbf{\Omega}}_j\right) \qquad i = 1, j = 1,2\ldots,s$$