

Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

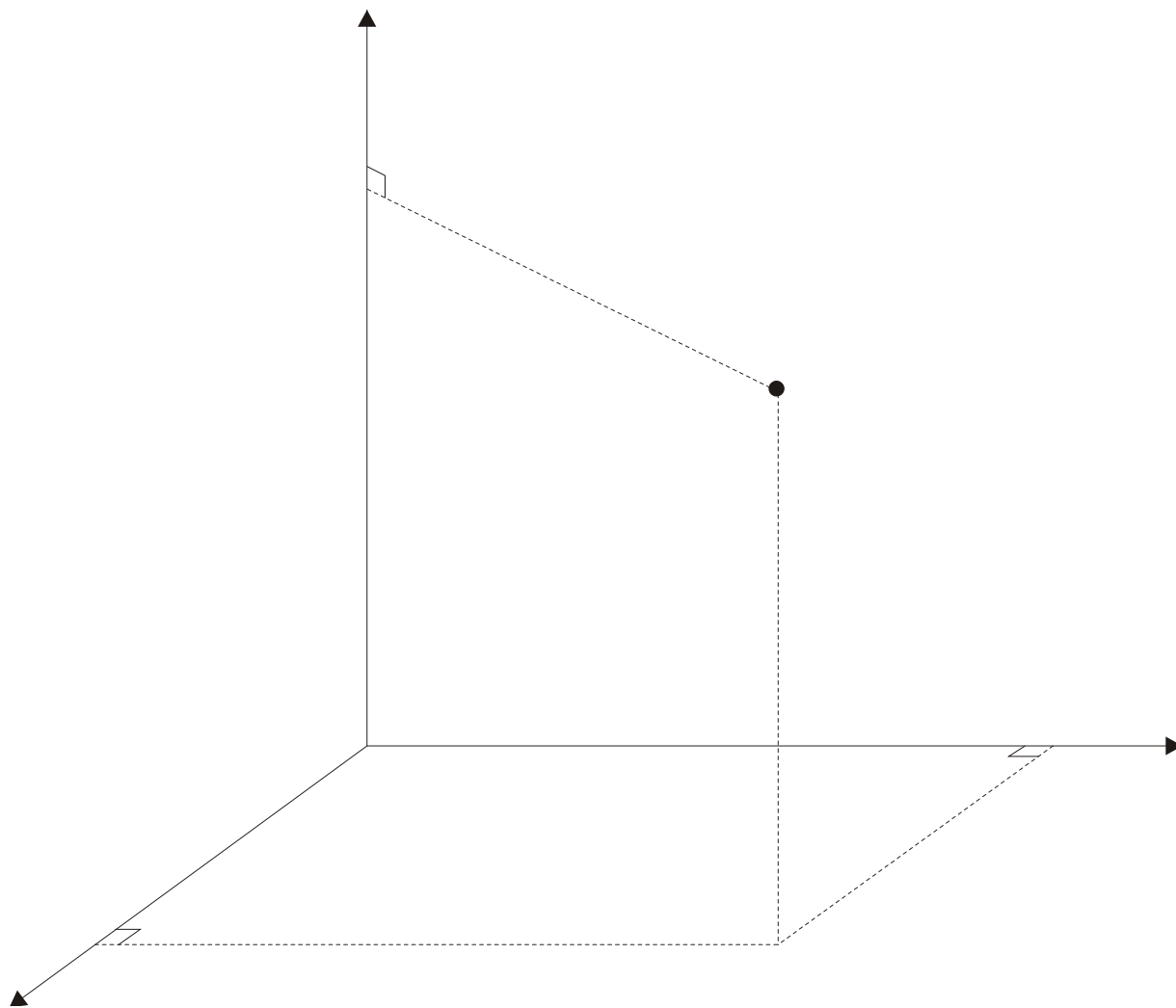
email: vittorio.casella@unipv.it

Trasformazioni di coordinate nello spazio

Parte 1

Dispense

Assi cartesiani 3D



Notazioni – SR coinvolti

Due sistemi di riferimento

(O, x, y, z)

(N, u, v, w)

Indichiamo un SR come una terna

Primo elemento: punto che rappresenta l'origine

Secondo, terzo e quarto elemento: nomi degli assi coordinati

Notazioni – coordinate dei punti

Le coordinate possono essere indicate individualmente

$$(x_p, y_p, z_p)^t$$

oppure si può usare un vettore tridimensionale

$$\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)^t$$

NB Si usa la x con due significati diversi; la x non grassetta è una componente; la \mathbf{x} in grassetto indica l'insieme delle coordinate di un punto

Coordinate di un punto P rispetto al SR (O, x, y, z)

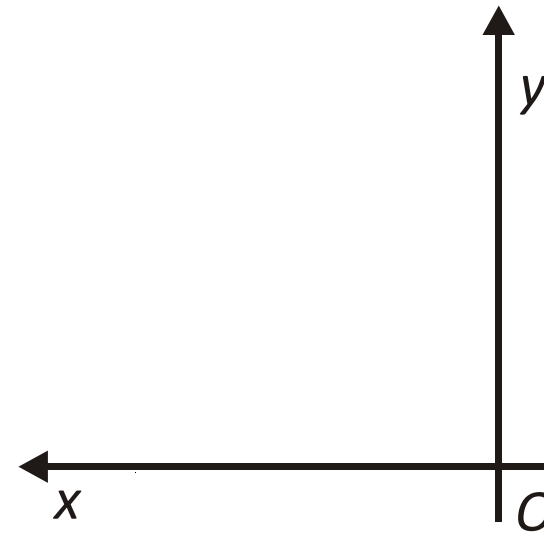
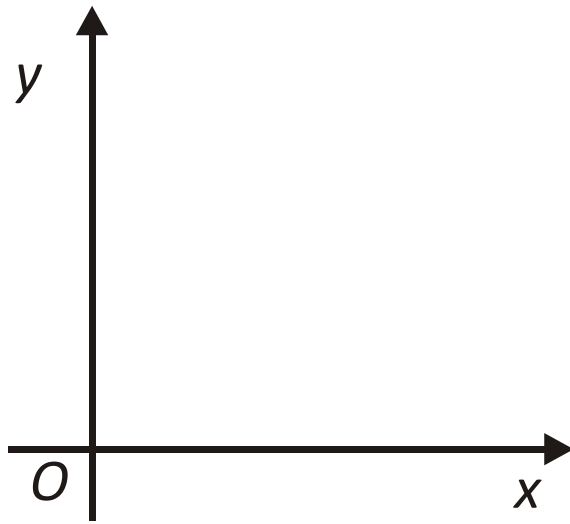
$$\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)^t$$

Coordinate di un punto P rispetto al SR (N, u, v, w)

$$\mathbf{u}_p = (u_p, v_p, w_p)^t$$

Il segno di trasposto ricorda che i vettori sono da considerare *matrici colonna*

SR destrorsi e sinistrorsi nel piano

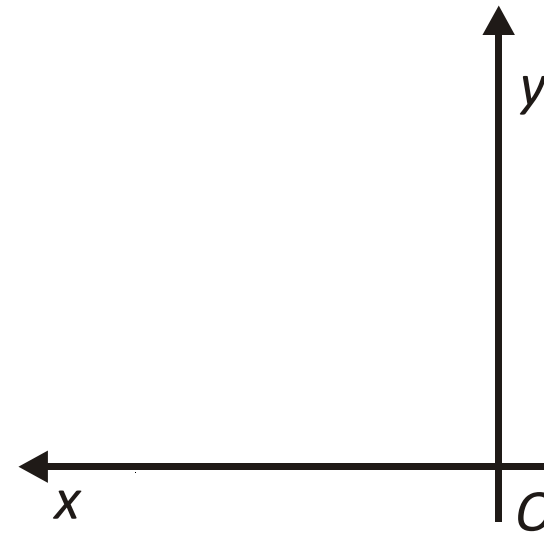
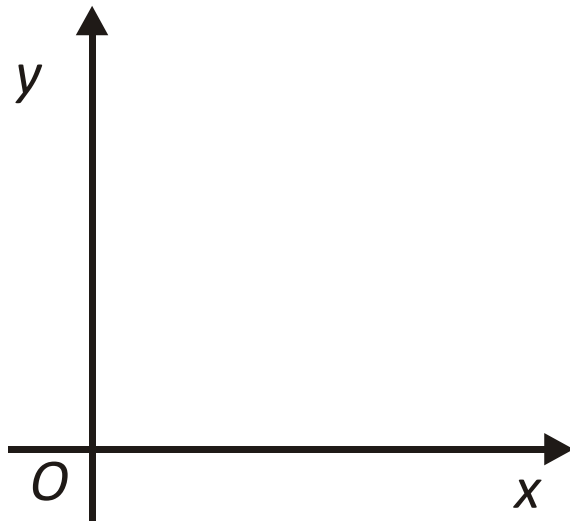


[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

SX: esempio di SR destrorso; tutti i SR ottenuto da questo per rotazione sono destrorsi

DX: esempio di SR sinistrorso; tutti i SR ottenuto da questo per rotazione sono sinistrorso

SR destrorsi e sinistrorsi nel piano - 2



[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

Destrorso: se sono parallelo ed equiverso al secondo asse coordinato, il primo asse punta alla mia destra

Sinistrorso: se sono parallelo ed equiverso al secondo asse coordinato, il primo asse punta alla mia sinistra

SR destrorsi e sinistrorsi nello spazio

(O, x, y, z) è destrorso se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano destra, aperti in modo da essere ortogonali

(O, x, y, z) è sinistrorso se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano sinistra, aperti in modo da essere ortogonali

Generalizziamo al caso 3D

- traslazione
- cambiamento di scala
- rotazione

La traslazione

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{u}_p + \mathbf{T} \quad \text{diretta}$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{T} \quad \text{indiretta}$$

E' ancora l'equazione della traslazione purché si ricordi che i vettori coinvolti sono 3D

Numero dei parametri: 3

Il cambio di scala

In notazione vettoriale si ha, per la trasformazione diretta e indiretta

$$\mathbf{x}_p = \lambda \mathbf{u}_p$$

$$\mathbf{u}_p = \lambda^{-1} \mathbf{x}_p$$

Vettori 3D

Numero dei parametri: 1

Richiami sulla rotazione nel piano

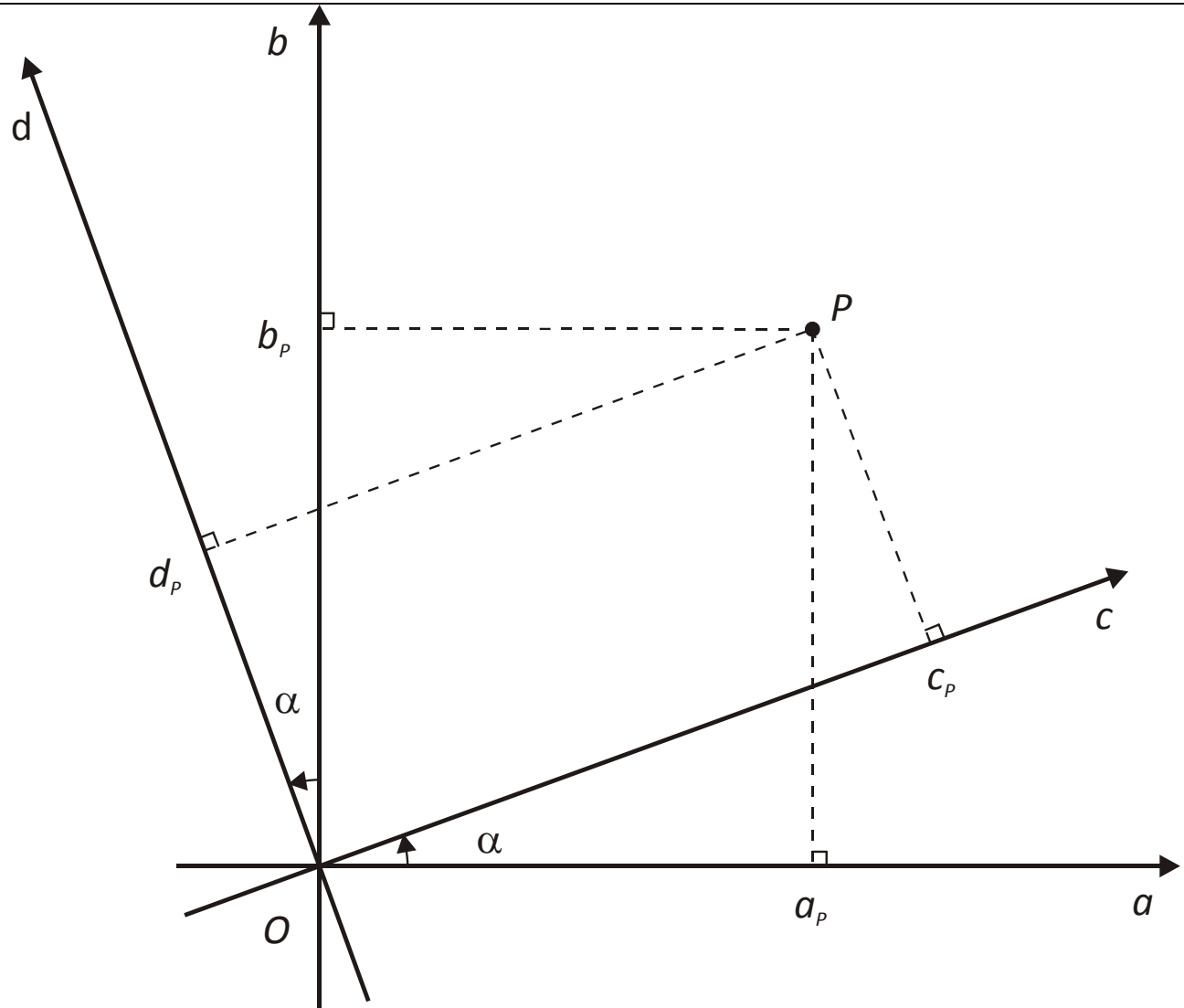
- (Q, a, b) : SR originario
- (Q, c, d) : SR ruotato di un angolo α in senso antiorario

- SR destrorsi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

- SR sinistrorsi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$



[rotazione_piano_ab.cdr,wmf]

Le rotazioni 3D elementari – x

Definizione di rotazione elementare attorno a x

- (N, u, v, w) inizialmente coincideva con (O, x, y, z)
- Successivamente gli assi v e w sono stati ruotati di un angolo ω in senso antiorario attorno all'asse $x \equiv u$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_p$$

dove $\mathbf{R}_x(\omega)$ è una matrice 3×3 . Come può essere fatta?

Le rotazioni 3D elementari – x - 2

Ricordiamo anzitutto che vale, per la ortogonalità della matrice

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_p &= \mathbf{R}_x^t(\omega)\mathbf{x}_p\end{aligned}\tag{1}$$

Esplicitiamo gli elementi della matrice

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo ora che, se la rotazione avviene attorno all'asse $x \equiv u$, per ogni punto P si ha che le componenti x e u coincidono

$$x_p = u_p$$

Le rotazioni 3D elementari – x - 3

Esplicitiamo la prima riga della prima equazione delle (1), cioè

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_p$$

che è

$$x_p = r_{11} u_p + r_{12} v_p + r_{13} w_p$$

Da cui risulta che la prima riga è

$$r_{11} = 1$$

$$r_{12} = 0$$

$$r_{13} = 0$$

Le rotazioni 3D elementari – x - 4

Esplicitiamo la prima riga della seconda equazione delle (1), cioè

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{R}_x^t(\omega) \mathbf{x}_p$$

che è

$$u_p = r_{11}^t x_p + r_{12}^t y_p + r_{13}^t z_p \quad (2)$$

Dove r_{11}^t , per esempio, rappresenta l'elemento (1,1) della matrice \mathbf{R}_x^t . Ma allora la (2) equivale a

$$u_p = r_{11} x_p + r_{21} y_p + r_{31} z_p$$

Da cui emerge che la prima colonna è

$$r_{11} = 1$$

$$r_{21} = 0$$

$$r_{31} = 0$$

Le rotazioni 3D elementari – x - 4

Si arriva allora alla prima conclusione che la struttura della $\mathbf{R}_x(\omega)$ è

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Gli ultimi 4 elementi sono da esplicitare in modo che $\mathbf{R}_x(\omega)$ lavori sulle coppie di assi (y,z) e (v,w) come la matrice $\mathbf{R}(\alpha)$ sulla coppie (a,b) e (c,d) . Bisogna insomma stabilire le corrispondenze

$$(y,z) \leftrightarrow (a,b)$$

$$(v,w) \leftrightarrow (c,d)$$

Attenzione: le coppie di assi (y,z) e (v,w) sono destrorse.

Le rotazioni 3D elementari – x - 5

Si arriva alla conclusione

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

Problema: il senso orario o antiorario delle matrici come viene fissato? Osservando dalla parte positiva dell'asse di rotazione.

Le rotazioni 3D elementari – y

Definizione di rotazione elementare attorno a y

- (N, u, v, w) inizialmente coincideva con (O, x, y, z)
- Successivamente gli assi u e w sono stati ruotati di un angolo φ in senso antiorario attorno all'asse $y \equiv v$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_p$$

dove $\mathbf{R}_y(\varphi)$ è una matrice 3×3 . Come può essere fatta?

Le rotazioni 3D elementari – y - 2

Si ha evidentemente

$$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{31} & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

Gli ultimi 4 elementi sono da esplicitare in modo che $\mathbf{R}_y(\varphi)$ lavori sulle coppie di assi (x,z) e (u,w) come la matrice $\mathbf{R}(\alpha)$ sulla coppie (a,b) e (c,d) . Bisogna insomma stabilire le corrispondenze

$$(x,z) \leftrightarrow (a,b)$$

$$(u,w) \leftrightarrow (c,d)$$

Attenzione: le coppie di assi (x,z) e (u,w) sono sinistrorse.

Le rotazioni 3D elementari – y - 3

Si arriva alla conclusione

$$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Le rotazioni 3D elementari – z

Definizione di rotazione elementare attorno a z

- (N, u, v, w) inizialmente coincideva con (O, x, y, z)
- Successivamente gli assi u e v sono stati ruotati di un angolo κ in senso antiorario attorno all'asse $z \equiv w$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_p$$

dove $\mathbf{R}_z(\kappa)$ è una matrice 3×3 . Come può essere fatta?

Le rotazioni 3D elementari – z - 2

Si ha evidentemente

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gli ultimi 4 elementi sono da esplicitare in modo che $\mathbf{R}_z(\kappa)$ lavori sulle coppie di assi (x,y) e (u,v) come la matrice $\mathbf{R}(\alpha)$ sulla coppie (a,b) e (c,d) . Bisogna insomma stabilire le corrispondenze

$$(x,y) \leftrightarrow (a,b)$$

$$(u,v) \leftrightarrow (c,d)$$

Attenzione: le coppie di assi (x,y) e (u,v) sono destrorse.

Le rotazioni 3D elementari – z - 3

Si arriva alla conclusione

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotazione nello spazio– Definizione

- (N, u, v, w) inizialmente coincide con (O, x, y, z)
- Successivamente l'orientamento degli assi di (N, u, v, w) viene alterato
- L'origine non viene spostata
- L'unità di misura non viene cambiata
- L'orientamento relativo degli assi di (N, u, v, w) non viene cambiato: si muovono rigidamente

Si tratta di una rotazione nello spazio

- Quanti parametri ha?
- Come la si può caratterizzare matematicamente?

Si può dimostrare che una tale rotazione è una rotazione attorno a un asse.

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D

Le seguenti affermazioni sono equivalenti e enunciano il teorema di Eulero.

Una rotazione nello spazio può essere pensata come una rotazione attorno a un asse.

Una rotazione nello spazio è rappresentata da una matrice 3×3 che può essere scomposta come prodotto di tre matrici elementari (eseguite attorno agli assi coordinati).

Numero dei parametri: 3

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D – 2

Consideriamo il secondo enunciato. Sono possibili molte scelte per le tre rotazioni elementari.

Vi sono convenzioni del tipo z-x-z, che coinvolgono due assi coordinati.

Vi sono convenzioni del tipo x-y-z, che coinvolgono tre assi.

Si tratta in ogni caso di diverse convenzioni all'interno dello stesso teorema di Eulero, tuttavia alcuni autori chiamano *angoli di Eulero* quelli corrispondenti alla convenzione z-x-z e similari; chiamano invece angoli di Cardano quelli corrispondenti alla convenzione x-y-z e similari.

Ulteriori informazioni in

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles

Nomi degli angoli in Fotogrammetria

In generale in Fotogrammetria le rotazioni seguono la convenzione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno a x
- rotazione di φ in senso antiorario attorno a y
- rotazione di κ in senso antiorario attorno a z

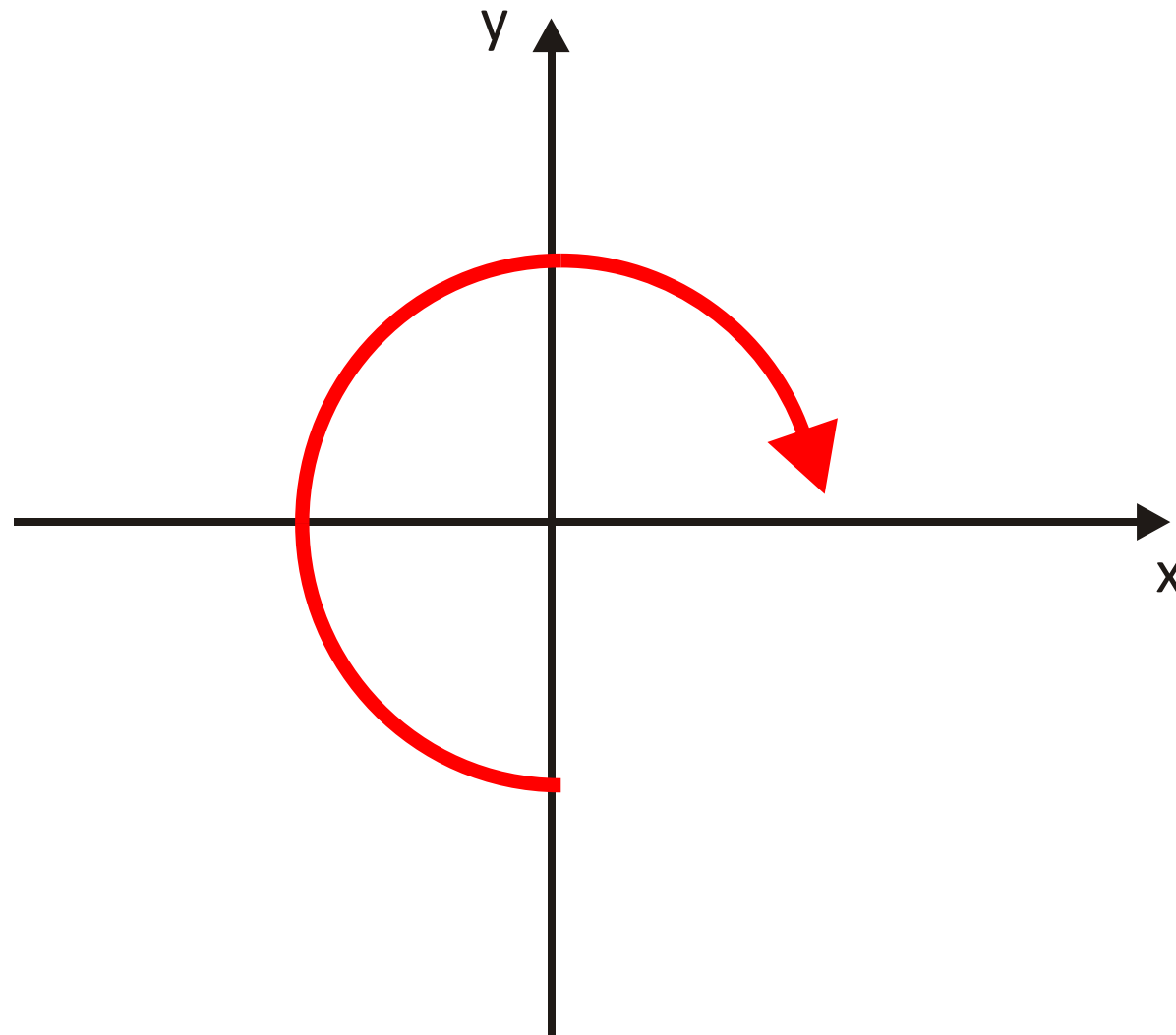
La convenzione usata in Fotogrammetria

Si tratta della convenzione più diffusa, ma non è l'unica. E' usata per esempio da Kraus nei suoi testi.

Consideriamo (O, x, y, z) e (N, u, v, w) , con il secondo ruotato nello spazio rispetto al primo. Il secondo si è allontanato dal primo secondo la seguente successione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno al primo asse coordinato (x)
- rotazione di φ in senso antiorario attorno al secondo asse coordinato (y)
- rotazione di κ in senso antiorario attorno al terzo asse coordinato (z)

Rotazione oraria/antioraria



[rotazione_per_magia.cdr,wmf]

Dipende dalla posizione da cui si osserva.

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fotogrammetria

	(O, x, y, z)	
Rotazione di un angolo ω in senso antiorario rispetto a x		
	$(O, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)})$	
Rotazione di un angolo φ in senso antiorario rispetto a $v^{(1)}$		
	$(O, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)})$	
Rotazione di un angolo κ in senso antiorario rispetto a $w^{(2)}$		
	(O, u, v, w)	

Le matrici delle rotazioni elementari 3D

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fotogrammetria - 2

	(O, x, y, z)	
Rotazione di un angolo ω in senso antiorario rispetto a x		$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_p^{(1)}$
	$(O, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)})$	
Rotazione di un angolo φ in senso antiorario rispetto a $v^{(1)}$		$\mathbf{u}_p^{(1)} = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_p^{(2)}$
	$(O, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)})$	
Rotazione di un angolo κ in senso antiorario rispetto a $w^{(2)}$		$\mathbf{u}_p^{(2)} = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_p$
	(O, u, v, w)	

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fotogrammetria – 3

Componendo le rotazioni si ha

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_p$$

Definendo

$$\mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa) = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa) =$$

Si ha

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa)\mathbf{u}_p$$

La matrice delle rotazione 3D

Si può esplicitare

$$\mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa) = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3)$$

Equazione delle rotazione 3D

Le matrici $\mathbf{R}_x(\omega)$, $\mathbf{R}_y(\varphi)$ e $\mathbf{R}_z(\kappa)$ sono ortogonali, come è facile verificare direttamente.

Un teorema afferma che il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale.

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono matrici ortogonali n -dimensionali, esiste \mathbf{AB} che ha per inversa la sua trasposta. Infatti

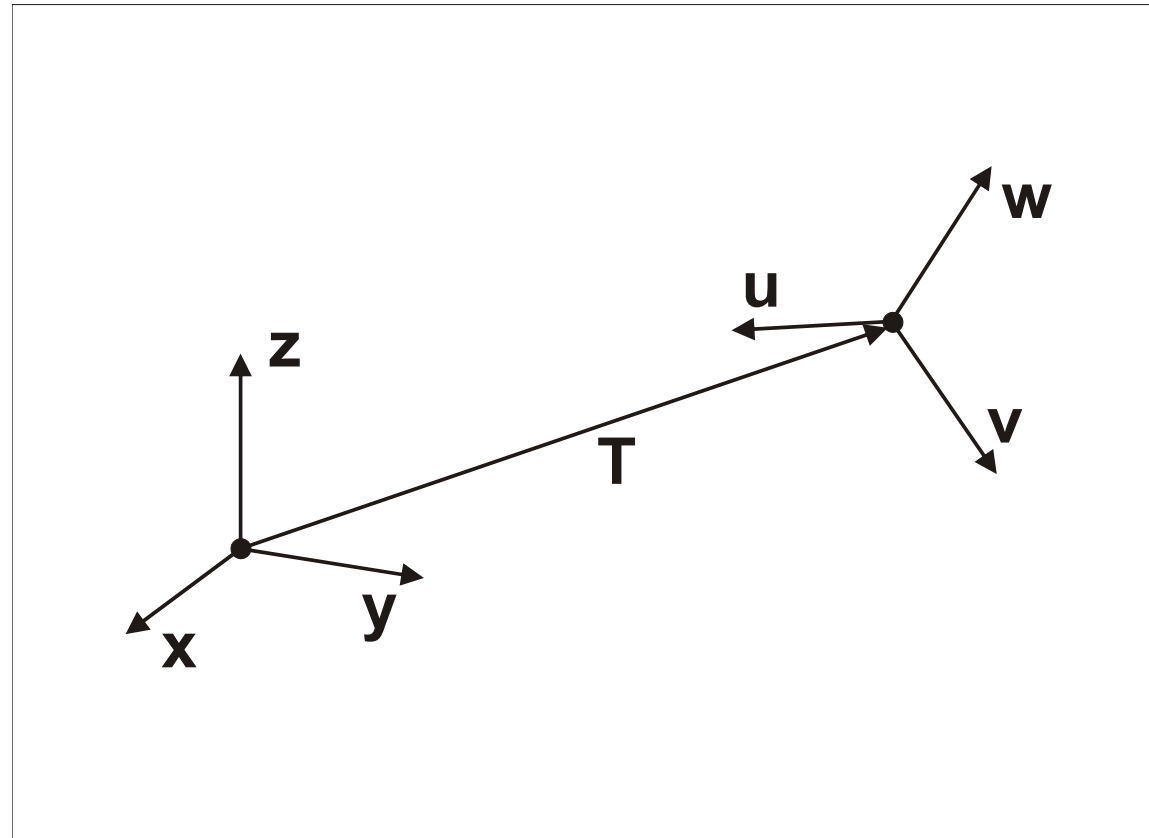
$$(\mathbf{AB})^t \mathbf{AB} = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t \mathbf{AB} = \mathbf{B}^t \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

Si può allora concludere che le relazioni dirette e indirette per la rotazione 3D nella convenzione della fotogrammetria sono

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa) \mathbf{u}_p$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{R}_{xyz}^t(\omega, \varphi, \kappa) \mathbf{x}_p$$

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa) \mathbf{u}_p$$

Numero dei parametri: 7

Dalla matrice agli angoli

Il formalismo sviluppato consente di calcolare le matrici di rotazione noti gli angoli: si pone spesso anche il problema inverso, cioè ricavare gli angoli a partire da una matrice di rotazione. Consideriamo la (3) e indichiamo con r_{ij} il valore del generico elemento di matrice. Si ha anzitutto

$$\sin \varphi \doteq r_{13} \quad (4)$$

L'equazione può essere risolta invertendo la funzione seno, cosa che viene effettuata in genere fra $-\pi/2$ e $\pi/2$; in altri termini la funzione arcsin è così definita

$$\arcsin: [-1,1] \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

Indichiamo con φ_1 il valore che si ottiene invertendo il seno

$$\varphi_1 = \arcsin(r_{13})$$

Il valore ottenuto potrebbe essere positivo, se φ_1 appartiene al primo quadrante, o negativo, se si trova nel quarto.

Dalla matrice agli angoli - 2

L'equazione (4) ha una seconda soluzione, dovuta alla periodicità della funzione seno

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

In sintesi sono possibili due casi a cui corrispondono due soluzioni diverse ma equivalenti:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{caso A} \\ \varphi_2 & \varphi \in]\pi/2, 3\pi/2[\quad \text{caso B} \end{cases}$$

Per entrambi i casi considerati è possibile ricavare il valore di $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - r_{13}^2} & \text{caso A} \\ -\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = -\sqrt{1 - r_{13}^2} & \text{caso B} \end{cases}$$

Si possono allora ricavare il seno e il coseno di κ :

Dalla matrice agli angoli - 3

$$\cos \kappa = \frac{r_{11}}{\cos \phi}$$

$$\sin \kappa = -\frac{r_{12}}{\cos \phi}$$

Interpretando i due valori come le coordinate cartesiane di un punto P che si trova sulla circonferenza unitaria e tale che il segmento \overrightarrow{OP} forma un angolo κ in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle ascisse si può concludere

$$\kappa = \text{atan}_2 \left(\frac{r_{11}}{\cos \phi}, -\frac{r_{12}}{\cos \phi} \right)$$

dove la funzione atan_2 indica la inversione della tangente che prende valori in $[-\pi, \pi]$.

Dalla matrice agli angoli - 4

Considerazioni analoghe consentono di scrivere

$$\cos \omega = \frac{R_{33}}{\cos \varphi}$$

$$\sin \omega = -\frac{R_{23}}{\cos \varphi}$$

e portano alla conclusione

$$\omega = \text{atan}_2 \left(\frac{R_{33}}{\cos \varphi}, -\frac{R_{23}}{\cos \varphi} \right)$$

Dalla matrice agli angoli - 5

In sintesi la soluzione è

Caso A

$$\varphi = \arcsin(r_{13})$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - r_{13}^2}$$

$$\kappa = \operatorname{atan}_2 \left(\frac{r_{11}}{\cos \varphi}, -\frac{r_{12}}{\cos \varphi} \right)$$

$$\omega = \operatorname{atan}_2 \left(\frac{r_{33}}{\cos \varphi}, -\frac{r_{23}}{\cos \varphi} \right)$$

Caso B

$$\varphi = \pi - \arcsin(r_{13})$$

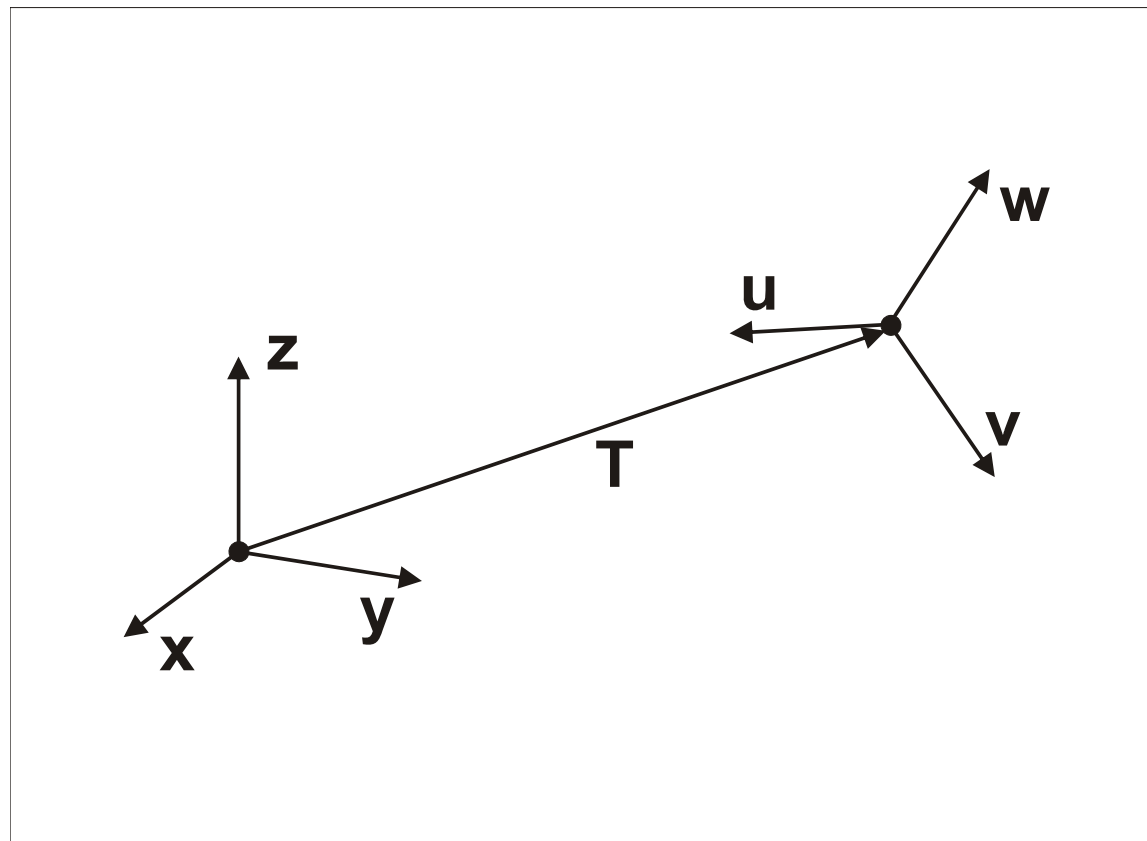
$$\cos \varphi = -\sqrt{1 - r_{13}^2}$$

$$\kappa = \operatorname{atan}_2 \left(\frac{r_{11}}{\cos \varphi}, -\frac{r_{12}}{\cos \varphi} \right)$$

$$\omega = \operatorname{atan}_2 \left(\frac{r_{33}}{\cos \varphi}, -\frac{r_{23}}{\cos \varphi} \right)$$

Esistono insomma due terne di angoli equivalenti ma diverse.

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{zyx}^{cw}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \mathbf{u}_p$$

Numero dei parametri: 7

Convenzioni nelle trasformazioni 3D

Verso delle rotazioni

Posizione da cui giudico il verso delle rotazioni

Ordine delle trasformazioni (traslazione, scala, rotazione)

Ordine delle rotazioni

Famiglia dei SR, destrorsi o sinistrorsi

Teorema sulle rotazioni 3D – 2b

	(O, x, y, z)	
Rotazione di un angolo α_3 in senso orario rispetto a z		
	$(O, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)})$	
Rotazione di un angolo α_2 in senso orario rispetto a $v^{(1)}$		
	$(O, u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)})$	
Rotazione di un angolo α_1 in senso orario rispetto a $u^{(2)}$		
	(O, u, v, w)	

Teorema sulle rotazioni 3D - 3

In generale in Fotogrammetria le rotazioni seguono la convenzione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno a x
- rotazione di φ in senso antiorario attorno a y
- rotazione di κ in senso antiorario attorno a z

In Geodesia si usa prevalentemente

- rotazione di α_3 in senso orario attorno a z
- rotazione di α_2 in senso orario attorno a y
- rotazione di α_1 in senso orario attorno a x

Talvolta in Geodesia si usano le rotazioni antiorarie

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

$$\mathbf{R}_z^{CW}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y^{CW}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^{CW}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{zyx}^{CW}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = \mathbf{R}_z^{CW}(\alpha_3) \mathbf{R}_y^{CW}(\alpha_2) \mathbf{R}_x^{CW}(\alpha_1)$$