

Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Stima ai MQ dei parametri di una TCP4:  
teoria ed esempi

Dispense

## Equazioni di una TCP4

---

Consideriamo due sistemi di riferimento

- $(O, x, y)$
- $(N, u, v)$

inizialmente coincidenti. Successivamente  $(N, u, v)$  si è allontanato con la seguente successione di trasformazioni

- traslazione  $T$
- cambio di scala  $\lambda$
- rotazione antioraria  $\alpha$

## Equazioni di una TCP4 – 2

---

Per uno stesso punto  $P$  valgono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_p &= \lambda^{-1} \mathbf{R}^t(\alpha) (\mathbf{x}_p - \mathbf{T})\end{aligned}\tag{1}$$

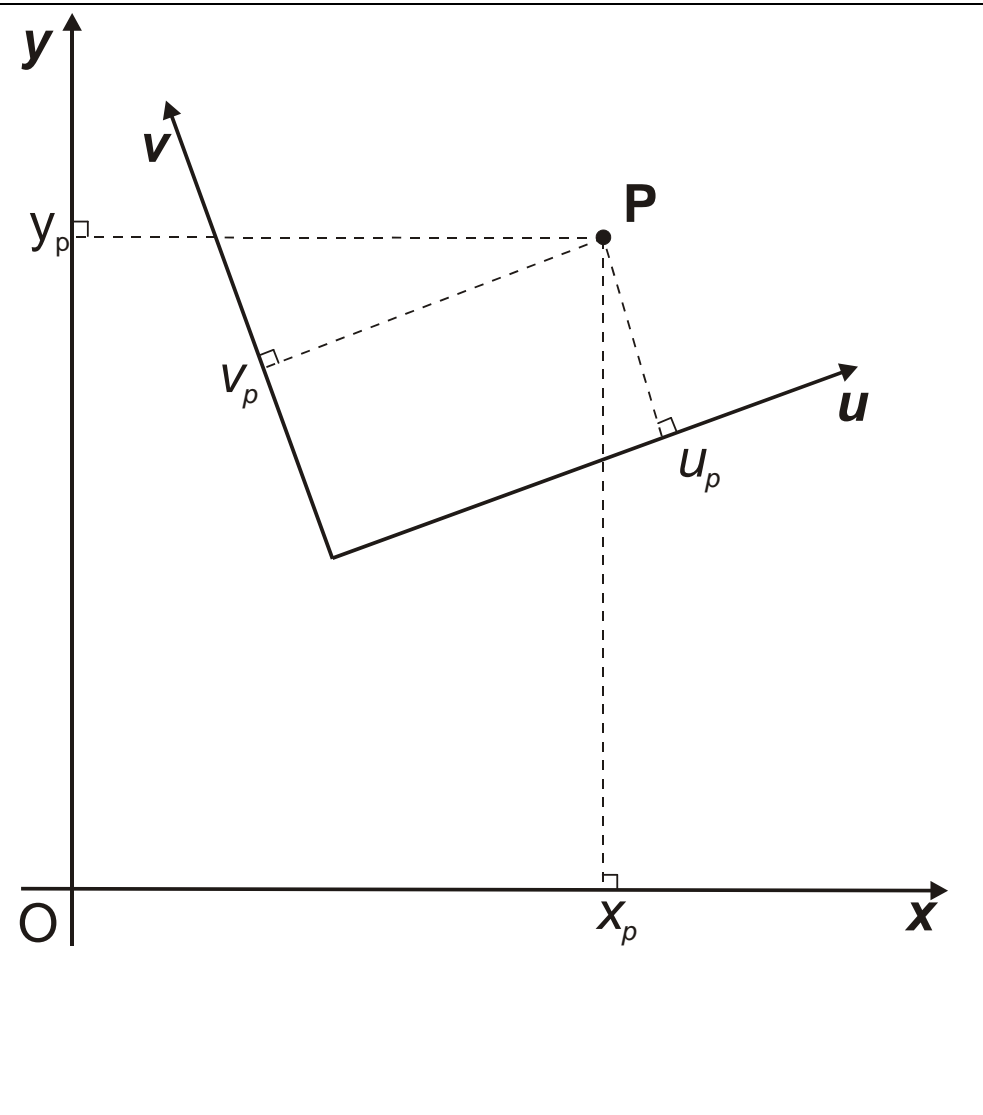
La matrice  $\mathbf{R}$ , nella convenzione antioraria, è

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

## Problema diretto e inverso

**Problema diretto.** Noti i parametri della trasformazione di coordinate che lega i due SR, trasformare le coordinate  $(u_p, v_p)^t$  nelle  $(x_p, y_p)^t$  e viceversa.

**Problema inverso.** Note le coordinate  $(u_i, v_i)^t$  e  $(x_i, y_i)^t$  di un numero sufficiente di punti  $P_i$  (punti doppi), calcolare i parametri della trasformazione di coordinate che lega i due SR.



## I possibili scenari

---

Inquadramento di un rilevamento topografico in un SR globale

$(N, u, v)$ : SR creato localmente in modo arbitrario

$(O, x, y)$ : coordinate cartografiche in un datum di interesse italiano, Roma40 oppure WGS84

Cambiamento di datum effettuato sul piano cartografico

$(N, u, v)$ : coordinate cartografiche nel datum-1

$(O, x, y)$ : coordinate cartografiche nel datum-2

Conversione da Roma40 a WGS84 e viceversa

Conversione da Roma40 a ED50 e viceversa

Faremo un esempio relativo al primo caso.

## Perché anche il cambio di scala

---

I calcoli nel SR locale vengono in genere condotti usando le distanze misurate sul terreno, *indefornate*.

Le coordinate cartografiche sono invece deformati, in misura dipendente dalla posizione nel fuso della zona rilevata.

In generale la distanza orizzontale misurata sul campo fra due punti (assimilabile alla distanza che le proiezioni dei punti hanno sull'ellissoide,  $d_e$ ) e quella ricavata dalle coordinate cartografiche  $d_c$  non coincidono, ma sono nel rapporto

$$d_c = \mu d_e$$

## La stima dei parametri della TCP4

---

Relazioni scalari per il generico punto, equivalenti alle (1)

$$x_p = T_x + \lambda (u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha)$$

$$y_p = T_y + \lambda (u_p \sin \alpha + v_p \cos \alpha)$$

Supponiamo di avere  $p$  punti doppi, punti di cui si conoscono sia le coordinate  $(O, x, y)$  sia le  $(N, u, v)$ . Consideriamo i valori veri di tutte le grandezze in gioco.

Si può scrivere un sistema di  $2p$  equazioni

⋮

$$x_i = T_x + \lambda (u_i \cos \alpha - v_i \sin \alpha)$$

$$y_i = T_y + \lambda (u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha)$$

⋮

(2)

## Stima della TCP4: definizione della soluzione MQ

---

In assenza di errori accidentali, sarebbe possibile trovare una quaterna  $T_x, T_y, \alpha$  e  $\lambda$  che soddisfa esattamente il sistema di equazioni. In una situazione reale in cui le coordinate sono misurate e contengono errori accidentali, non è possibile soddisfare in modo esatto il sistema (2).

E' necessario definire una soluzione generalizzata, ai MQ.

Si hanno in totale  $2p$  equazioni in cui le grandezze  $x_i, y_i, u_i$  e  $v_i$  sono note e le uniche incognite sono  $T_x, T_y, \alpha$  e  $\lambda$ . Tali equazioni possono essere risolte con la tecnica dei minimi quadrati, MQ.

**Nota.** *Assumiamo per ora che tutte i simboli indicati rappresentino le grandezze geometriche, vere.*



## Il sistema delle equazioni

---

$$x_1 = T_x + \lambda(u_1 \cos \alpha - v_1 \sin \alpha)$$

$$y_1 = T_y + \lambda(u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha)$$

$$x_2 = T_x + \lambda(u_2 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha)$$

$$y_2 = T_y + \lambda(u_2 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha)$$

⋮

$$x_p = T_x + \lambda(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha)$$

$$y_p = T_y + \lambda(u_p \sin \alpha + v_p \cos \alpha)$$

(3)

Numero delle equazioni:  $m = 2p$

Numero delle incognite:  $n = 4$

## Le grandezze MQ

---

Nel formalismo dei MQ si introducono

- vettore delle osservazioni  $\mathbf{Y}$   $\dim(\mathbf{Y}) = (m,1)$
- vettore delle incognite  $\mathbf{X}$   $\dim(\mathbf{X}) = (n,1)$

Nel caso in questione

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ \alpha \\ \lambda \end{bmatrix}$$

## Le grandezze MQ - 2

---

### Nota

Le coordinate  $(u_i, v_i)$  vengono trattate come note e costanti. La discussione della correttezza e delle conseguenze di tale scelta esula dallo scopo di queste slide.

# Linearità

---

Vi è relazione lineare (o meglio, affine) se vale la relazione

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{A} \quad m \times n$$

$$\mathbf{b} \quad m \times 1$$

scelte opportunamente.

La (3) è palesemente non lineare.

- **Soluzione 1**: risolvere con un approccio iterativo standard, per successive approssimazioni
- **Soluzione 2**: effettuare un cambio di coordinate che, nel caso specifico della TCP4, rende il problema lineare

## Trasformazione e linearizzazione - 1

---

Esiste una trasformazione di coordinate invertibile che linearizza il problema. Introduciamo due grandezze ausiliarie,  $a$  e  $b$ , definite da

$$\begin{aligned} a &= \lambda \cos \alpha \\ b &= \lambda \sin \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

Verifichiamo preliminarmente che la trasformazione sia invertibile, cioè che si possano  $\alpha$  e  $\lambda$ , una volta calcolati  $a$  e  $b$ . Elevando al quadrato e sommando membro a membro si ha

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5}$$

Dividendo membro a membro la seconda per la prima si ha

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \tag{6}$$

La pura inversione della (6) si scontrerebbe con i ben noti problemi di periodicità della tangente.

## Trasformazione e linearizzazione - 2

---

Tuttavia l'uso di tutto l'informazione contenuta in  $a$  e  $b$  (e non solo del loro rapporto), consente di determinare in modo non ambiguo l'angolo  $\alpha$ , usando una strategia simile a quella necessaria per la conversione fra coordinate cartesiane e polari.

A ben guardare la (4)

$$a = \lambda \cos \alpha$$

$$b = \lambda \sin \alpha$$

$a$  e  $b$  giocano il ruolo delle coordinate cartesiane, mentre  $\lambda$  e  $\alpha$  sono le coordinate polari nella definizione degli analisti (angolo misurato in senso antiorario rispetto all'asse delle ascisse).

L'inversione della (4) è equivalente al calcolo delle coordinate polari dalle cartesiane.

## Trasformazione e linearizzazione - 3

---

L'inversione della (4) è equivalente al calcolo della coordinate polari dalle cartesiane.

$$a = \lambda \cos \alpha$$

$$b = \lambda \sin \alpha$$

Si può allora porre  $\alpha' = \arctan \frac{b}{a}$  e successivamente

$$\alpha = \alpha(a, b) = \begin{cases} \alpha' & a > 0 \quad b \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0 \quad b > 0 \\ \alpha' + \pi & a < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & a = 0 \quad b < 0 \\ \alpha' + 2\pi & a < 0 \quad b < 0 \end{cases}$$

Indicheremo d'ora in poi tale trasformazione con il nome *arctan4*.

## Trasformazione e linearizzazione - 4

---

In sintesi si ha

$$\alpha = \arctan4(a,b)$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$



## Il problema ausiliario lineare

---

Sostituendo le (4) nelle (3) si ha

$$x_1 = T_x + (u_1 a - v_1 b)$$

$$y_1 = T_y + (u_1 b + v_1 a)$$

$$x_2 = T_x + (u_2 a - v_2 b)$$

$$y_2 = T_y + (u_2 b + v_2 a)$$

⋮

$$x_p = T_x + (u_p a - v_p b)$$

$$y_p = T_y + (u_p b + v_p a) \quad (7)$$

$$x_1 = T_x + \lambda(u_1 \cos \alpha - v_1 \sin \alpha)$$

$$y_1 = T_y + \lambda(u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha)$$

$$x_2 = T_x + \lambda(u_2 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha)$$

$$y_2 = T_y + \lambda(u_2 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha)$$

⋮

$$x_p = T_x + \lambda(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha)$$

$$y_p = T_y + \lambda(u_p \sin \alpha + v_p \cos \alpha)$$

## Formalizzazione ai MQ del problema ausiliario

---

Posto

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_i \\ y_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & u_i & -v_i \\ 0 & 1 & v_i & u_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (8)$$

con

$$\mathbf{Y} \in M(m,1), \mathbf{X}' \in M(n,1), \mathbf{A} \in M(m,n), \mathbf{b} \in M(m,1), m \geq n$$

il sistema (7) può essere riscritto

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}' + \mathbf{b} \quad (9)$$

Si tratta evidentemente di un problema lineare. E' stata usata la simbologia  $\mathbf{X}'$  per sottolineare che il problema ausiliario non fornisce le soluzione del sistema originario.

## Formalizzazione ai MQ del problema ausiliario - 2

---

Una volta stimato  $\mathbf{X}'$ , si trova  $\mathbf{X}$ .

$$T_x = \mathbf{X}'(1)$$

$$T_y = \mathbf{X}'(2)$$

$$c = \mathbf{X}'(3)$$

$$d = \mathbf{X}'(4)$$

$$\hat{\mathbf{X}}' := \min_{\mathbf{x}'} \|\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X}')\|^2$$

$$\alpha = \arctan 4(a, b)$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## Come definire la soluzione

---

Date le coordinate  $(u_i, v_i)^t$ , che determinano la forma della matrice  $\mathbf{A}$ , il prodotto

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}') = \mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{b}$$

dove  $\mathbf{X}'$  è un generico vettore a  $n$  dimensioni; il vettore  $\mathbf{Y}(\mathbf{X}')$  rappresenta le coordinate  $(x_i, y_i)^t$  **calcolate**. Poiché non esiste in genere un vettore  $\hat{\mathbf{X}}'$  tale che

$$\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{X}}') \equiv \mathbf{Y}_0$$

Dove  $\mathbf{Y}_0$  rappresenta le coordinate  $(x_i, y_i)^t$  **misurate**, si definisce una soluzione generalizzata, detta soluzione ai MQ, definita da

$$\hat{\mathbf{X}}' := \min_{\mathbf{X}'} \|\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X}')\|^2$$

## Il più generale problema di MQ lineari

---

Rapporti fra le grandezze osservate  $\mathbf{Y}$  e quelle incognite  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

Soluzione MQ

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{Y}_0 - \mathbf{b})$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{v}}{m - n}$$

$\hat{\sigma}_0^2$  è una stima della varianza delle osservazioni  $\mathbf{Y}$ , equidi sperse

Dispersione dei parametri stimati: matrice di varianza-covarianza di  $\hat{\mathbf{X}}$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$$

## La matrice jacobiana

---

La matrice  $\mathbf{J}\{\mathbf{g}\}$  di una generica funzione  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

è una matrice  $m \times n$  ed è funzione del posto. Valutata nel generico vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , il suo generico elemento è

$$\mathbf{J}\{\mathbf{g}\}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x'_j}(\mathbf{x})$$

## La matrice di varianza delle incognite - 1

Quando si risolve, invece del problema originario, un problema ausiliario, si pone il problema che le matrici di varianza-covarianza stimate sono relative alle grandezze ausiliarie e non a quelle originarie.

Il  $\hat{\sigma}_0^2$  e la matrice  $\mathbf{C}_{\hat{Y}\hat{Y}}$  non risentono della trasformazione di coordinate effettuata, mentre invece la matrice  $\mathbf{C}_{\hat{X}'\hat{X}'}$  fornita dalla stima ai MQ non coincide con la matrice  $\mathbf{C}_{\hat{X}\hat{X}}$  cercata. Per ottenerla è necessario considerare la trasformazione  $\mathbf{g}$  che porta  $\mathbf{X}'$  in  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{g}(\mathbf{X}')$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{g} \left( \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \arctan4(a,b) \\ \sqrt{a^2 + b^2} \end{bmatrix}$$

## La matrice di varianza delle incognite - 2

---

Consideriamo ora la matrice jacobiana  $\mathbf{J}\{\mathbf{g}\}$  della trasformazione  $\mathbf{g}$  e ricordiamo che, per la propagazione della varianza-covarianza,

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{J} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{x}}'} \mathbf{J}^t$$

dove  $\mathbf{J}$  indica evidentemente  $\mathbf{J}\{\mathbf{g}\}$ .



## La matrice di varianza delle incognite – 3

---

Alcune regole di derivazione

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

## La matrice di varianza delle incognite – 4

---

Altre regole di derivazione

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e

$$\frac{d}{dx} \arctan(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

## La matrice di varianza delle incognite - 5

---

Ricordiamo ora che, a meno di termini additivi ininfluenti, si ha

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\frac{b}{a}$$

da cui, per la terza componente di  $\mathbf{g}$  si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} \arctan\frac{b}{a} &= \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \left( -\frac{b}{a^2} \right) = \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \left( -\frac{b}{a^2} \right) = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left( -\frac{b}{a^2} \right) = \\ &= -\frac{b}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

## La matrice di varianza delle incognite - 6

---

E ancora

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b} \arctan \frac{b}{a} &= \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{a} = \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

## La matrice di varianza delle incognite - 7

---

Per la quarta componente della  $\mathbf{g}$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## La matrice di varianza delle incognite – 8

---

In sintesi

$$\mathbf{J}\{\mathbf{g}\} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{bmatrix}$$

dove la matrice jacobiana è correttamente indicata come funzione di  $\mathbf{X}'$

## Valutazione dei risultati

---

Una volta stimati i parametri, si possono ottenere le coordinate  $\mathbf{x}'_i$  **calcolate** dei punti doppi

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{u}_i$$

che coinciderebbero con le  $\mathbf{x}_i$  misurate se non esistessero errori di misura. In realtà la differenza

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i$$

è in genere diversa da zero e deve essere valutata per capire la precisione con cui la trasformazione di coordinate avviene.

## In pratica

---

I punti misurati con metodo topografico e di cui si sono determinate le  $(N, u, v)$  possono essere anche migliaia.

E' sufficiente che 3/5 di questi siano misurati con GPS in modo da determinare le  $(O, x, y)$  (punti doppi) per consentire di stimare i parametri della trasformazione, che consentirà di ricavare le coordinate  $(O, x, y)$  di *tutti i punti*.



## Caricamento dati

---

```
xyz_loc=xyz_load_txt('stima_tcp4_coordinate_locali.txt','sfff');  
xyz_utm=xyz_load_txt('stima_tcp4_coordinate_utmwgs84.txt','sfff');  
xyz_loc2=xyz_load_txt('stima_tcp4_coordinate_locali2.txt','sfff');  
xyz_list(xyz_loc)  
xyz_list(xyz_utm)  
xyz_list(xyz_loc2)
```

Attenzione: I comandi sono contenuti in `calcolo_tcp4_quick`

# Listato dei dati

---

xyz\_loc - XYZ class - 4 elements

1	P_1	100.0000	100.0000	100.0000
2	P_2	145.8950	100.0000	100.0000
3	P_3	129.6000	126.5980	100.1300
4	P_4	98.6900	121.1650	99.9930

xyz\_utm - XYZ class - 4 elements

1	P_1	510669.8400	5005601.4270	123.7880
2	P_2	510697.8080	5005565.0350	123.7770
3	P_3	510708.9630	5005594.1610	123.8920
4	P_4	510685.8250	5005615.3410	123.7550

xyz\_loc2 - XYZ class - 10 elements

1	S1	102.0260	115.1960	100.0030
2	S2	104.8890	100.8090	100.0190
3	S3	119.8580	104.6070	100.0030
4	S4	116.6000	118.0690	100.0110
5	L1	112.9730	117.0960	103.5810
6	L2	110.4680	116.5980	103.5760
7	L3	102.3670	115.2660	103.5960
8	I1	111.9590	117.1660	106.7270
9	I2	107.1380	116.2020	106.7220
10	I3	104.3090	114.9110	107.3570

## Commenti sui dati

---

xyz\_loc - XYZ class - 4 elements

1	P_1	100.0000	100.0000	100.0000
2	P_2	145.8950	100.0000	100.0000
3	P_3	129.6000	126.5980	100.1300
4	P_4	98.6900	121.1650	99.9930

Coordinate locali dei 4 punti doppi: ottenute con misure topografiche e successivo calcolo in un SR locale, da pensare come  $(N,u,v)$

xyz\_utm - XYZ class - 4 elements

1	P_1	510669.8400	5005601.4270	123.7880
2	P_2	510697.8080	5005565.0350	123.7770
3	P_3	510708.9630	5005594.1610	123.8920
4	P_4	510685.8250	5005615.3410	123.7550

Coordinate UTM-WGS84 dei 4 punti doppi: ottenute con GPS, da pensare come  $(O,x,y)$

## Commenti sui dati - 2

---

xyz\_loc2 - XYZ class - 10 elements

1	S1	102.0260	115.1960	100.0030
2	S2	104.8890	100.8090	100.0190
3	S3	119.8580	104.6070	100.0030
4	S4	116.6000	118.0690	100.0110
5	L1	112.9730	117.0960	103.5810
6	L2	110.4680	116.5980	103.5760
7	L3	102.3670	115.2660	103.5960
8	I1	111.9590	117.1660	106.7270
9	I2	107.1380	116.2020	106.7220
10	I3	104.3090	114.9110	107.3570

Coordinate locali dei punti rilevati con metodo topografico, che devono essere convertite a UTM-WGS84 mediante la TCP4.

# Stima

---

```
para=tc_tcp4_est(xyz_loc.coord, xyz_utm.coord, xyz_loc.name)
```

```
*****
```

```
Stima di una trasformazione: tcp4
```

```
*****
```

```
Punti doppi, UV
```

P_1	100.000	100.000
P_2	145.895	100.000
P_3	129.600	126.598
P_4	98.690	121.165

```
Punti doppi, XY
```

P_1	510669.840	5005601.427
P_2	510697.808	5005565.035
P_3	510708.963	5005594.161
P_4	510685.825	5005615.341

## Stima - 2

---

Stima ai MQ

ne: 8 - ni: 4

Sigma: 0.00737661

Parametri

Tx,Ty: 510529.6485, 5005619.7664

alpha: -58.28471581

lambda: 0.99978794

Differenze XYc - XY

P_1	0.00425	-0.00877
P_2	-0.00278	0.00134
P_3	-0.00054	-0.00278
P_4	-0.00093	0.01021
Mu	-0.00000	-0.00000
Sigma	0.00300	0.00797

## Analisi dei residui

---

L'analisi dei residui consente:

- di farsi un'idea degli errori accidentali contenuti nelle coordinate usate
- di quantificare l'*errore contenuto nei parametri di trasformazione*
- di individuare errori grossolani, se i residui superano una ragionevole soglia

# Errore contenuto nei parametri di trasformazione

---

Di che si tratta???



# Commenti

---

Parametri

Tx,Ty: 510529.6485, 5005619.7664

alpha: -58.28471580

lambda: 0.99978794

- Componenti di **T**: posizione del poligono nel UTM-WGS84
- $\alpha$ : i due SR non sono paralleli
- $\lambda$ : misura di quanto devono essere contratte le distanze in  $(N,u,v)$  per avere congruenza con  $(O,x,y)$ . Il valore trovato è abbastanza vicino a  $\mu_0 = 0.9996$ .

## Commenti - 2

---

Poiché Pavia si trova presso il meridiano centrale del fuso Ovest/F32, si ha, per la zona del poligono,  $\mu = \mu_0$ . Dunque la stima di  $\lambda$  evidenzia semplicemente che la deformazione cartografica esiste ed è facilmente individuabile.

Non è stato trovato esattamente il valore  $\mu_0$  a causa degli errori di misura che disturbano i risultati (noise). In altri anni sono stati trovati valori di  $\lambda$  molto più prossimi al valore atteso.

## Stima delle XY di tutti gli altri punti

---

```
XY2=tc_tcp4_apl(para, xyz_loc2)
```

```
xyz_list(XY2)
```

```
XY2 - XYZ class - 10 elements
```

1	S1	510683.1247	5005609.0702	100.0030
2	S2	510673.4641	5005598.0355	100.0190
3	S3	510685.5946	5005588.4832	100.0030
4	S4	510694.2813	5005599.2674	100.0110
5	L1	510691.3002	5005601.5498	103.5810
6	L2	510689.3793	5005603.2322	103.5760
7	L3	510683.3880	5005608.8425	103.5960
8	I1	510690.7380	5005602.3963	106.7270
9	I2	510687.0366	5005605.6307	106.7220
10	I3	510684.2897	5005607.0867	107.3570

## File allegati

---

Contiene

`stima_tcp4_libreria.zip`

`stima_tcp4_dati_script.zip`

Devono essere tutti messi in una dir e decompressi. Poi si deve lanciare lo script

`calcolo_tcp4_quick.m`

## La TSR4 geodetica (gTSR4)

---

Per uno stesso punto  $P$  valgono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \mathbf{T} + (1 + 10^{-6} \lambda) \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_p &= (1 + 10^{-6} \lambda)^{-1} \mathbf{R}^t(\alpha) (\mathbf{x}_p - \mathbf{T})\end{aligned}\tag{10}$$

La matrice  $\mathbf{R}$ , nella convenzione antioraria, è

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

## La TSR4 geodetica normalizzata (gTSR4n)

---

Si individuano due vettori  $\mathbf{c}_x$  e  $\mathbf{c}_u$  traslazione e due matrici diagonali  $\mathbf{S}_x$  e  $\mathbf{S}_u$ .

I vettori devono essere pensati come i centri delle coordinate  $(O, x, y)$  e  $(N, u, v)$  dei punti doppi.

I secondi misurano l'estensione delle varie componenti delle nuvole di punti doppi.

Vi è un problema MQ originario

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T} + (1 + 10^{-6} \lambda) \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{u}_p$$

E uno ausiliario

$$\mathbf{x}'_p = \mathbf{S}_x (\mathbf{x}_p - \mathbf{c}_x)$$

$$\mathbf{u}'_p = \mathbf{S}_y (\mathbf{u}_p - \mathbf{c}_y) \tag{11}$$

$$\mathbf{x}'_p = \mathbf{T}' + (1 + 10^{-6} \lambda') \mathbf{R}(\alpha') \mathbf{u}'_p$$

## La TSR4 geodetica normalizzata (gTSR4n) - 2

Nel problema ausiliario compaiono le coordinate normalizzate, centrate attorno a 0 e aventi un range limitato, e anche i parametri  $\mathbf{T}'$ ,  $\alpha'$  e  $\lambda'$  che rappresentano la soluzione del problema (11). Si tratta di capire come ottenere la soluzione del problema originario una volta risolto quello ausiliario.

Osservazioni preliminari:

- Indichiamo con  $\mathbf{R}'$  la matrice  $\mathbf{R}(\alpha')$
- Le matrici  $\mathbf{S}_x$  e  $\mathbf{S}_u$  sono diagonali con gli elementi diagonali diversi da zero dunque sono invertibili e commutano con le altre matrici.

$$\mathbf{S}_x (\mathbf{x}_p - \mathbf{c}_x) = \mathbf{T}' + s' \mathbf{R}' \mathbf{S}_u (\mathbf{u}_p - \mathbf{c}_u)$$

$$\mathbf{x}_p - \mathbf{c}_x = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{T}' + s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' (\mathbf{u}_p - \mathbf{c}_u)$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{T}' + \mathbf{c}_x + s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' (\mathbf{u}_p - \mathbf{c}_u)$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{T}' + \mathbf{c}_x - s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' \mathbf{c}_u + s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' \mathbf{u}_p$$

## La TSR4 geodetica normalizzata (gTSR4n) - 3

Banalmente si ha

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{T}' + \mathbf{c}_x - s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' \mathbf{c}_u$$

Più complesso il discorso per gli altri parametri. Consideriamo il termine

$$\begin{aligned} s' \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{S}_u \mathbf{R}' \mathbf{u}_p &= s' \begin{bmatrix} s_{x1}^{-1} & 0 \\ 0 & s_{x2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{u1} & 0 \\ 0 & s_{u2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha' & -\sin \alpha' \\ \sin \alpha' & \cos \alpha' \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \\ &= s' \begin{bmatrix} s_{x1}^{-1} s_{u1} & 0 \\ 0 & s_{x2}^{-1} s_{u2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha' & -\sin \alpha' \\ \sin \alpha' & \cos \alpha' \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \\ &= s' \begin{bmatrix} s_{x1}^{-1} s_{u1} \cos \alpha' & -s_{x1}^{-1} s_{u1} \sin \alpha' \\ s_{x2}^{-1} s_{u2} \sin \alpha' & s_{x2}^{-1} s_{u2} \cos \alpha' \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \end{aligned}$$