Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET

Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

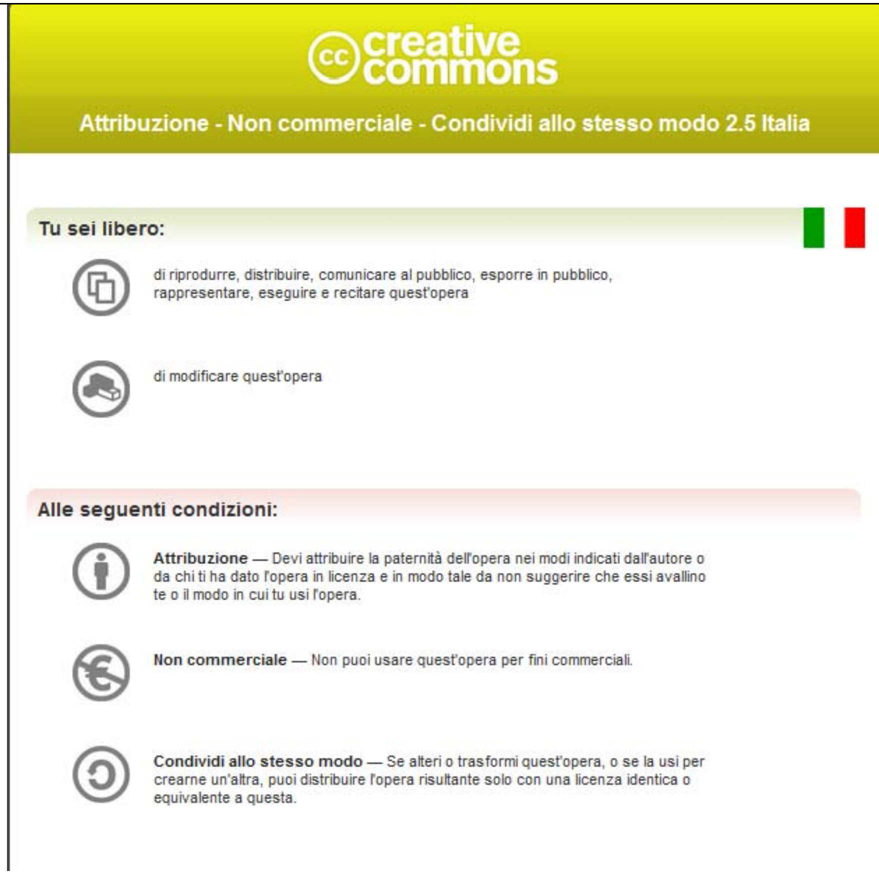
La triangolazione aerea - 1

Dispense

Licenza

Questa presentazione è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



L'orientamento esterno dei fotogrammi

Per effettuare misure fotogrammetriche è necessario conoscere posizione e assetto della camera nell'istante in cui ha acquisito ogni fotogramma:

la posizione del centro di presa: 3 coordinate

l'orientamento della camera: 3 angoli

All'insieme dei 6 parametri si dà il nome di orientamento esterno

Come si calcola OE? In generale non si può misurare direttamente

Il metodo tradizionale, la TA

La triangolazione aerea è il metodo tradizionale per determinare l'orientamenti esterno di un blocco di fotogrammi. Si tratta di un problema inverso.

Riepiloghiamo anzitutto le equazioni di collinearità

Equazioni di collinearità

Forma 1 (equazione della fotografia oppure da CO a CI)

$$x_{ij} = -c\frac{r_{\bullet 1}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}$$

$$y_{ij} = -c\frac{r_{\bullet 2}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)} \qquad (1)$$

Forma 2 (equazioni della restituzione oppure da CI a CO)

$$X_i = X_{0j} + \left(Z_i - Z_{0j}\right)\frac{r_{1\bullet}(\boldsymbol{\Omega}_j)\mathbf{x}_{ij}}{r_{3\bullet}(\boldsymbol{\Omega}_j)\mathbf{x}_{ij}}$$

$$Y_i = Y_{0j} + \left(Z_i - Z_{0j}\right)\frac{r_{2\bullet}(\boldsymbol{\Omega}_j)\mathbf{x}_{ij}}{r_{3\bullet}(\boldsymbol{\Omega}_j)\mathbf{x}_{ij}} \qquad (2)$$

Simbologia

- $\mathbf{x}_{ij} = \left(x_{ij}, y_{ij} \right) \quad i = 1,2,\ldots,p \quad j = 1,2,\ldots,s$: coordinate immagine del punto *i*-esimo proiettato sull'immagine *j*-esima.
- $\mathbf{X}_i = \left(X_i, Y_i, Z_i \right) \quad i = 1,2,\ldots,p$: coordinate oggetto del punto *i*-esimo. La notazione è indipendente dal fatto che le coordinate siano note a priori (GCP) o meno (TP).
- $\mathbf{X}_{0j} = \left(X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j} \right) \quad j = 1,2,\ldots,s$: coordinate oggetto del centro di presa dell'immagine *j*-esima.
- $\boldsymbol{\Omega}_j = \left(\omega_j, \varphi_j, \kappa_j \right) \quad j = 1,2,\ldots,s$: angoli di assetto dell'immagine *j*-esima.
- c: lunghezza focale della camera.

Uso diretto delle equazioni di collinearità

Rifacendosi alla distinzione problema diretta/problema inverso, il **problema diretto** che si può costruire con le equazioni di collinearità e in particolare con le (2), è il seguente:

- si conoscono le coordinate immagine di due punti immagine generati dallo stesso punto oggetto
- si conoscono gli OE dei corrispondenti fotogrammi

DUNQUE

Si scrivono quattro equazioni come le (2) e si risolvono rispetto alle coordinate oggetto del punto considerato.

Se non si conoscono gli OE, le equazioni di collinearità (in genere le (1)) vengono usate per scrivere un **problema inverso**.

Richiamo: problemi inversi nelle trasformazioni di coordinate

E' utile richiamare come giochino problemi diretti e inversi nella trasformazioni di coordinate. Ci guideranno per analogia.

L'equazione di una TCP4 è

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \qquad (3)$$

Essa traduce la seguente relazione geometrica: le coordinate (N, u, v) di un punto, trasformate secondo la TCP4, coincidono con le coordinate (O, x, y).

Problema diretto. Se si conoscono i parametri della trasformazione e le coordinate di un punto in uno dei sistemi di riferimento, si possono trovare le coordinate dello stesso punto nell'altro sistema.

Problema inverso. Se non si conoscono i parametri, ma si conoscono le coordinate in entrambi i SR di un numero adeguato di punti, è possibile stimare i parametri ai MQ.

Sulla terminologia

Nei problemi diretti, pensiamo alle trasformazioni di coordinate, la soluzione si trova valutando una funzione opportuna. La(3) può essere scritta

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

Dove

- $\mathbf{y}$ rappresenta le quantità incognite (nell'esempio le coordinate $(x_P, y_P)^t$)
- $\mathbf{x}$ rappresenta le quantità note (nell'esempio le coordinate $(u_P, v_P)^t$)
- $\boldsymbol{\alpha}$ rappresenta i parametri noti

Nota: la distinzione fra $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ è in qualche modo artificiosa, ma utile didatticamente

Sulla terminologia - 2

Il problema indiretto è basato sulla stessa relazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

MA

- $\mathbf{y}$ rappresenta le quantità note (nell'esempio le coordinate $(x_P, y_P)^t$)
- $\mathbf{x}$ rappresenta le quantità note (nell'esempio le coordinate $(u_P, v_P)^t$)
- $\boldsymbol{\alpha}$ rappresenta i parametri da determinare.

Bisogna in qualche modo invertire la funzione $\mathbf{f}$ da cui il nome di *problema inverso*.

Il problema inverso per le equazioni di collinearità - 1

Vogliamo determinare i parametri di OE

$$x_{ij} = -c \frac{r_{\bullet 1}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}$$

$$y_{ij} = -c \frac{r_{\bullet 2}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}$$

Note le coordinate oggetto di un numero adeguato di punti-oggetto e le coordinate immagine dei corrispondenti punti-immagine, si scrive un sistema di equazioni la cui soluzione fornisce i parametri cercati.

I punti *doppi* sono chiamati punti di appoggio (PA) oppure Ground Control Point (GCP)

Punti di appoggio (GCP): punti di coordinate oggetto note, visibili sui fotogrammi

Il problema inverso per le equazioni di collinearità - 2

Come si possono ottenere le coordinate richieste?

Le coordinate immagine vengono misurate routinariamente: per fare fotogrammetria è necessario disporre di uno strumento per la misura di coordinate immagine.

Le coordinate oggetto devono essere misurate sul campo con metodi GPS e/o topografici.

Il problema inverso per le equazioni di collinearità - 3

Dotiamoci di un formalismo più snello. Invece di

$$x_{ij} = -c \frac{r_{\bullet 1}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}$$

$$y_{ij} = -c \frac{r_{\bullet 2}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}{r_{\bullet 3}^{t}(\boldsymbol{\Omega}_j)\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{Oj}\right)}$$

Scriviamo

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{f}\left(c, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{0j}, \boldsymbol{\Omega}_j\right)$$

Semplicemente, i dettagli della funzione sono stati nascosti, per fare economia di scrittura.

Calcolo della TA per un fotogramma

Problema particolare, detto anche *space resection*. Consideriamo un singolo fotogramma e lo *i*-esimo punto, di coordinate oggetto note

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_i, \mathbf{X}_0, \mathbf{\Omega}\right) \qquad (4)$$

Sono state indicate con un trattino in alto le quantità note. Le altre sono incognite cioè, $\mathbf{X}_0, \mathbf{\Omega}$ corrispondenti a 6 gradi di libertà.

Ogni punto di appoggio fornisce 2 equazioni. Le incognite sono 6. Servono almeno 3 PA per avere un numero sufficiente di equazioni. Quattro PA garantiscono un minimo di ridondanza.

Qual è le relazione geometrica tradotta dalla (4)? Che il raggio passante per in punto-immagine e il centro di presa passa anche per il punto-oggetto.

Calcolo della TA per un fotogramma - 2

Se si dispone di g punti appoggio, si può scrivere un sistema di equazioni

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_O, \hat{\boldsymbol{\Omega}}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, g$$

$$m = 2 \times g$$

$$n = 6$$

La condizione di solubilità

$$m \geq n$$

(condizione necessaria ma non sufficiente) porta evidentemente a

$$g \geq 3$$

$\tilde{\mathbf{x}}_i$ è una quantità misurata;

$\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_i$ sono trattati come costanti;

$\hat{\mathbf{X}}_{0j}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_j$ sono trattati come incognite;

Come si scelgono e misurano i PA nella realtà

Si parte dai fotogrammi

Si individuano punti ben visibili sui fotogrammi e occupanti posizioni opportune

Si esce a misurarli

Caratteristiche di un buon PA

Ben visibile e chiaramente individuabile

Garanzie di stabilità nel tempo

Ridotti effetti prospettici: punto che si trova al suolo, bene; tetto di una pensilina per autobus: discreto; parapetto di un ponte: cattivo.

Approccio a fotogramma singolo per l'orientamento di un blocco

Avendo un blocco (più strisciate, costituite da molti fotogrammi) si potrebbe adottare la seguente strategia: si individuano 4/5 punti per ogni fotogramma, diversi da fotogramma a fotogramma; si misurano i punti; si orientano i fotogrammi individualmente.

Osservazioni: può funzionare, in linea di principio

Difetti:

bisogna misurare sul campo molti PA

non viene tradotta in formule l'idea matematica che i raggi omologhi (rette che scendono da punti omologhi, cioè creati dallo stesso punto oggetto) si intersecano

Orientamento di una coppia di fotogrammi

Generalizziamo a una coppia di fotogrammi. Idea: invece di scegliere PA diversi per il fotogramma 1 e 2, usiamo gli stessi punti per il fotogramma 1 e 2.

Prima conseguenza, risparmio. Il numero dei PA necessari viene dimezzato. Scriviamo le equazioni del sistema corrispondenti a un PA

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{i1} &= \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\mathbf{\Omega}}_1\right) \\
\tilde{\mathbf{x}}_{i2} &= \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\mathbf{\Omega}}_2\right)
\end{aligned} \qquad (5)$$

Le incognite sono $\mathbf{X}_{01}, \mathbf{\Omega}_1$, $\mathbf{X}_{02}, \mathbf{\Omega}_2$, cioè 12. La (5) traduce l'idea geometrica della collinearità:

- i raggi omologhi passano per i tre punti caratteristici
- i raggi omologhi si intersecano

Orientamento di una coppia di fotogrammi - 2

Quando inseriamo a destra le stesse coordinate oggetto

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1\right) \hat{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2\right) \hat{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2\right)$$

stiamo dicendo al sistema che i raggi omologhi si devono intersecare.

Orientamento di una coppia di fotogrammi - 3

Scriviamo il sistema completo

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\mathbf{\Omega}}_1\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, g$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\mathbf{\Omega}}_2\right)$$

$$m = 2 \times 2 \times g$$

$$n = 6 \times s$$

La condizione di solubilità

$$m \geq n$$

(condizione necessaria ma non sufficiente) porta evidentemente a

$$g \geq 3$$

Altra simbologia

g: numero dei PA

s: numero dei fotogrammi

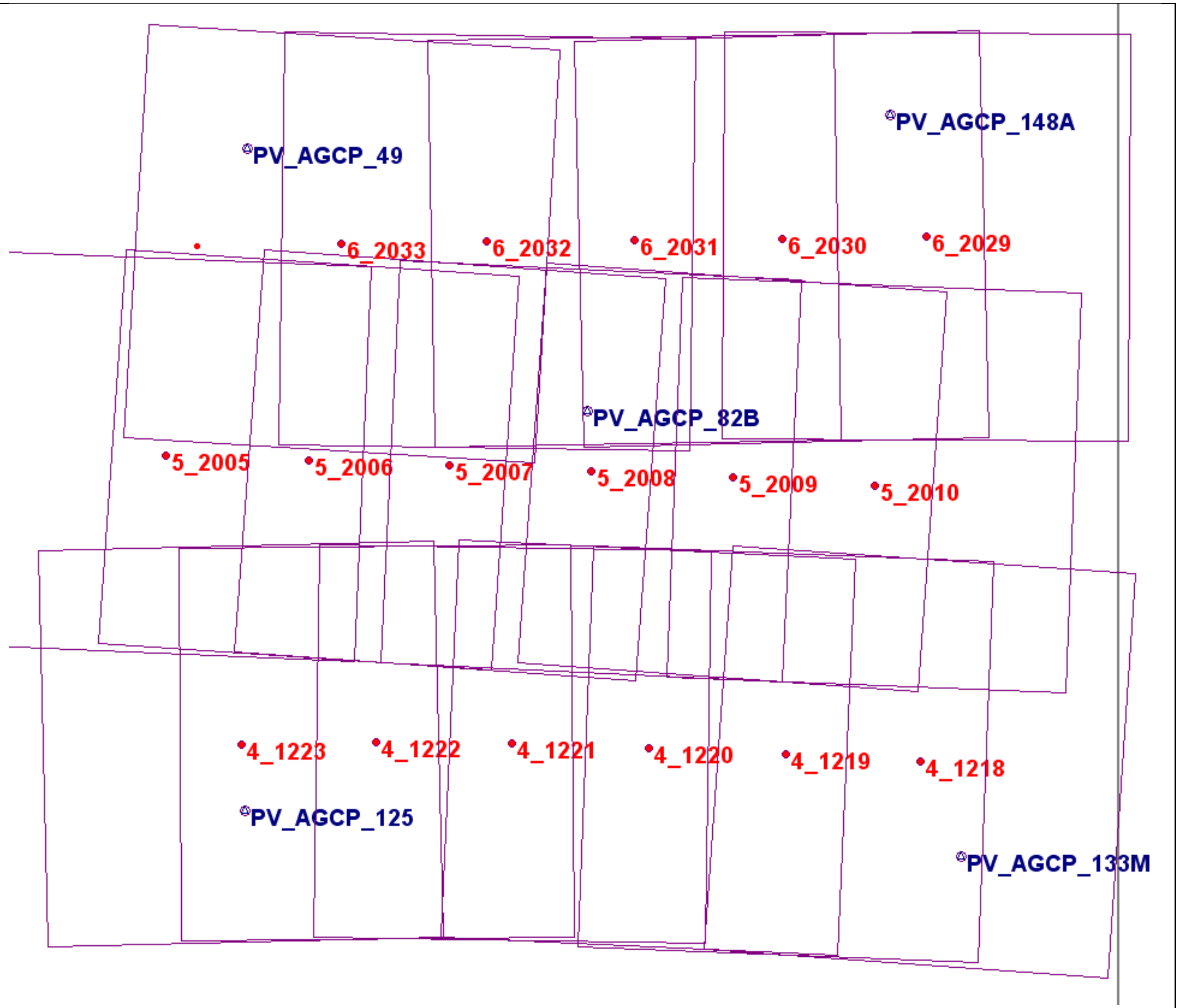
m: numero delle equazioni

n: numero delle incognite

Orientamento di un blocco con solo PA

Ipotizziamo di voler orientare (calcolare gli OE) di un blocco con soli PA.

E' evidente che non tutti i punti sono visibili in tutte le immagini



[Struttura_blocco_ite4.png]

Orientamento di un blocco con solo PA - 2

Si può scrivere un sistema

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\mathbf{\Omega}}_1\right) \quad \text{Per tutti i punti visibili su immagine 1}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\mathbf{\Omega}}_2\right) \quad \text{Per tutti i punti visibili su immagine 2}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{is} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \overline{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{Os}, \hat{\mathbf{\Omega}}_s\right) \quad \text{Per tutti i punti visibili su immagine } s$$

Le incognite sono chiare

$$n = 6 \times s$$

Quante sono le equazioni? Dipende dalla geometria del blocco e della visibilità dei PA. Vale tuttavia la seguente regola

***Ogni punto di appoggio* fornisce due equazioni per ogni fotogramma su cui è visibile.**

I punti di legame nella coppia di fotogrammi

Anche sfruttando il trucco dei punto comuni a più fotogrammi e a più strisciate, in numero dei PA necessari per un blocco è elevato.

E' possibile inserire nel sistema osservazioni di un secondo tipo, relative ai punti di legame: punti visibili su due o più fotogrammi, di cui non si conoscono le coordinate oggetto.

La misura dei punti di legame si effettua rapidamente e non richiede lavoro di campagna perché si fa esclusivamente a video: l'operatore deve semplicemente cercare punti ben visibili su diversi fotogrammi e collimarli, cioè misurarne le coordinate immagine.

Equazioni dei punti di legame nella coppia di fotogrammi

Per una coppia e per lo *k*-esimo PL si ha

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k1} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \hat{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{X}}_{01}, \hat{\mathbf{\Omega}}_1\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k2} = \mathbf{f}\left(\overline{c}, \hat{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{X}}_{02}, \hat{\mathbf{\Omega}}_2\right)$$

Differenza essenziale: le coordinate oggetto non sono note ma incognite.

Inserire un punto di legame aggiunge al sistema 4 equazioni e anche 3 incognite: si tratta comunque di una operazione vantaggiosa dal punto di vista del puro bilancio equazioni-incognite.

Relazione geometrica tradotta:

- i raggi omologhi si intersecano

Nota: non diciamo al sistema dove si devono intersecare, ma semplicemente che devono farlo.

Sistema completo per una coppia di fotogrammi con PA e PL

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \hat{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1\right) \qquad i = 1,2,\ldots,g$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \hat{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2\right)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k1} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{X}}_{O1}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_1\right) \qquad k = 1,2,\ldots,t$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k2} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_k, \hat{\mathbf{X}}_{O2}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_2\right)$$

Incognite: $\mathbf{X}_{O1}, \boldsymbol{\Omega}_1$, $\mathbf{X}_{O2}, \boldsymbol{\Omega}_2$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_t$

Ogni punto di appoggio fornisce due equazioni per ogni fotogramma su cui è visibile.

Ogni punto di legame fornisce due equazioni per ogni fotogramma su cui è visibile, ma aggiunge tre incognite al sistema, le sue coordinate oggetto.

$$m = 2 \times 2 \times (g + t)$$

$$n = 6 \times s + 3 \times t$$

Vantaggi dell'uso dei PL

Uso un numero adeguato dei PA e inserisco molti PL in modo da irrobustire il blocco ed elevarne la ridondanza

Una tentazione

Consideriamo un sistema di soli PL per una coppia. Si ha

$$m = 2 \times 2 \times t$$

$$n = 6 \times s + 3 \times t$$

Da cui

$$t \geq 12$$

E' possibile determinare lo OE di una coppia misurando solo PL? Non ci è mai riuscito nessuno.

Il sistema può anche avere un numero di equazioni maggiore o uguale del numero delle incognite, ma non è necessariamente solubile. Ciò è vero anche per i sistemi di equazioni lineari.

Non basta avere tante osservazioni, ma devono essere del tipo giusto, devono avere la giusta relazione con le incognite

Una tentazione - 2

Ad esempio. Si misura 1000 volte il dislivello fra due punti A e B; determinare la quota di A e B. Il problema non si può risolvere nemmeno ripetendo la misura 10^6 volte perché è impossibile determinare le quota di A e B misurando loro il loro dislivello.

Nesso invarianza-indeterminazione.

Invarianza e indeterminazione nel blocco fotogrammetrico

Nel caso della fotogrammetria, il blocco può essere pensato come un mosaico. Per ricomporre un mosaico nella sua posizione originaria bisogna trovare la posizione relativa delle tessere fra di loro e bisogna successivamente collocare il mosaico, come un tutto nella sua corretta posizione.

I PL contribuiscono a determinare l'orientamento relativo del blocco, cioè posizione e assetto dei vari fotogrammi gli uni rispetto agli altri. Se si misurano PL a sufficienza, si può ricostruire il blocco come un tutto.

Ma per collocare il blocco in senso assoluto, cioè ricostruire la sua posizione e assetto rispetto al mondo, sono indispensabili PA.

Orientamento di un blocco

Si generalizza quanto visto per una coppia. Quando la triangolazione aerea viene realizzata con le equazioni di collinearità, orientare 1, 2 o 1000 fotogrammi è la stessa cosa dal punto di vista concettuale e delle equazioni usate. Si scrive dunque un sistema composto da equazioni del tipo

$$\tilde{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \bar{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{0j}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_j\right) \quad \text{per i PA}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{f}\left(\bar{c}, \hat{\mathbf{X}}_i, \hat{\mathbf{X}}_{0j}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_j\right) \quad \text{per i PL}$$

La struttura esatta del sistema (numero di incognite, numero di equazioni, ecc) non si può indicare in forma chiusa a priori, ma dipende dalla struttura del blocco considerato: quali fotogrammi e disposti come; quali PA e disposti come, visibili su quali e quanti fotogrammi; quali PA e disposti come, visibili su quali e quanti fotogrammi.

Terminologia

Triangolazione aerea

Processo di calcolo le cui osservazioni sono coordinate oggetto e coordinate immagine di PA, coordinate immagine di PL e le cui incognite sono gli OE dei fotogrammi e le coordinate oggetto dei PL.

B**undle block adjustment**

Nome che si attribuisce al calcolo della TA quando è basato sulla equazioni di collinearità. Evidentemente esiste un altro metodo per il calcolo della TA.

TA a modelli indipendenti

Un secondo modo di calcolare la TA, più vecchio e molto meno usato oggi. Non trattato nella dispensa.

Bilancio equazioni-incognite in un blocco

Non è possibile dare formule in forma chiusa. I principi guida sono

Numero delle equazioni

Ogni punto di appoggio fornisce due equazioni per ogni fotogramma su cui è visibile.

Ogni punto di legame fornisce due equazioni per ogni fotogramma su cui è visibile, ma aggiunge tre incognite al sistema, le sue coordinate oggetto.

Numero delle incognite

6 x numero fotogrammi +

3 x numero PL

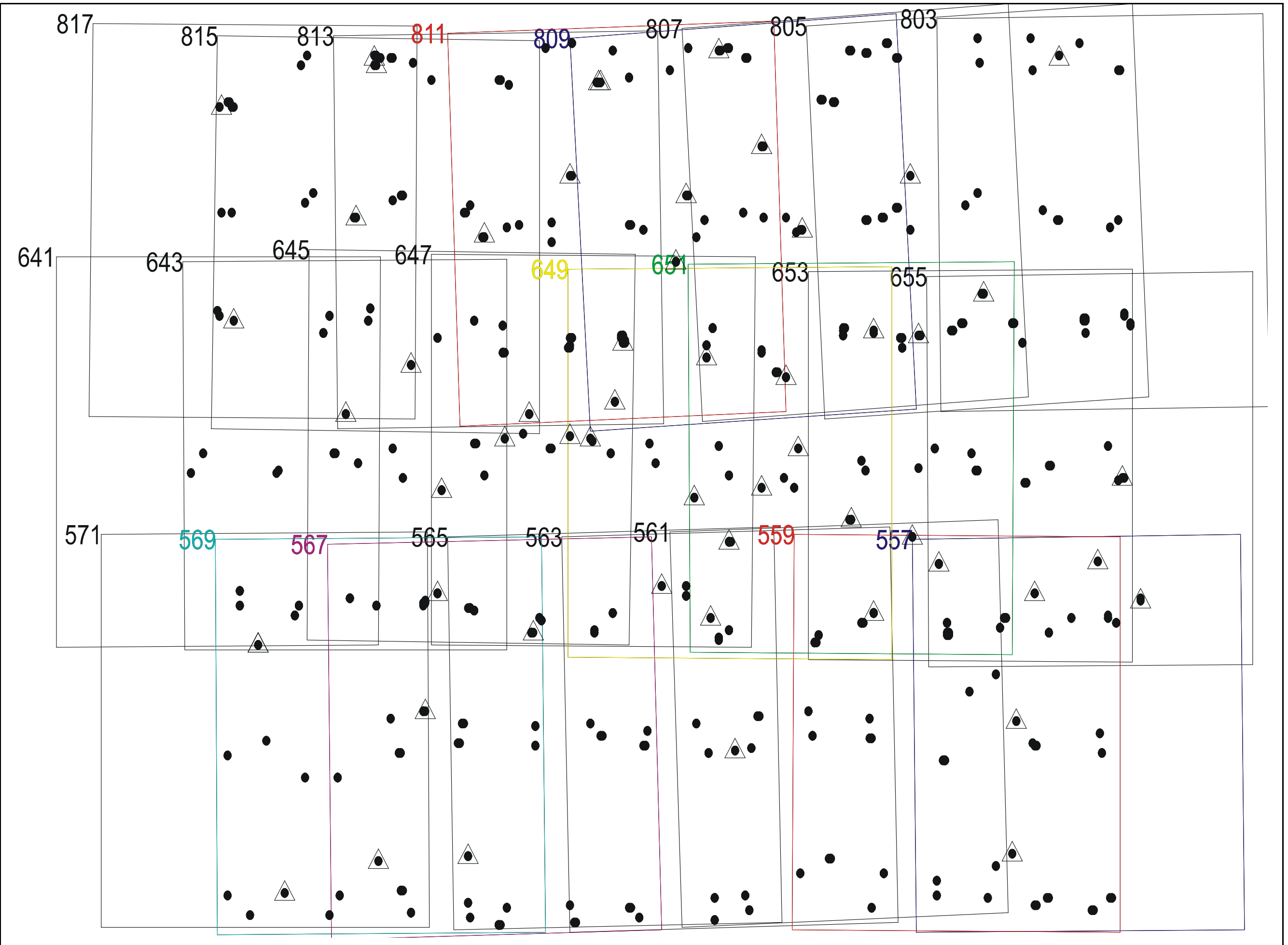
Esempio di blocco

Triangoli: PA

Punti: PL

Attenzione: si tratta di un tipico blocco di ricerca con un numero di PA molto elevato

I blocchi industriali hanno un numero di PA percentualmente molto minore



Quali dettagli sono distinguibili

Dipende dal GSD

Regole empiriche

perché un oggetto sia certamente individuabile deve essere grande circa 3/4 GSD (per ogni dimensione)

perché un oggetto sia riconoscibile deve essere grande almeno 8/10 pixel