Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET

Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Le trasformazioni di coordinate nel piano

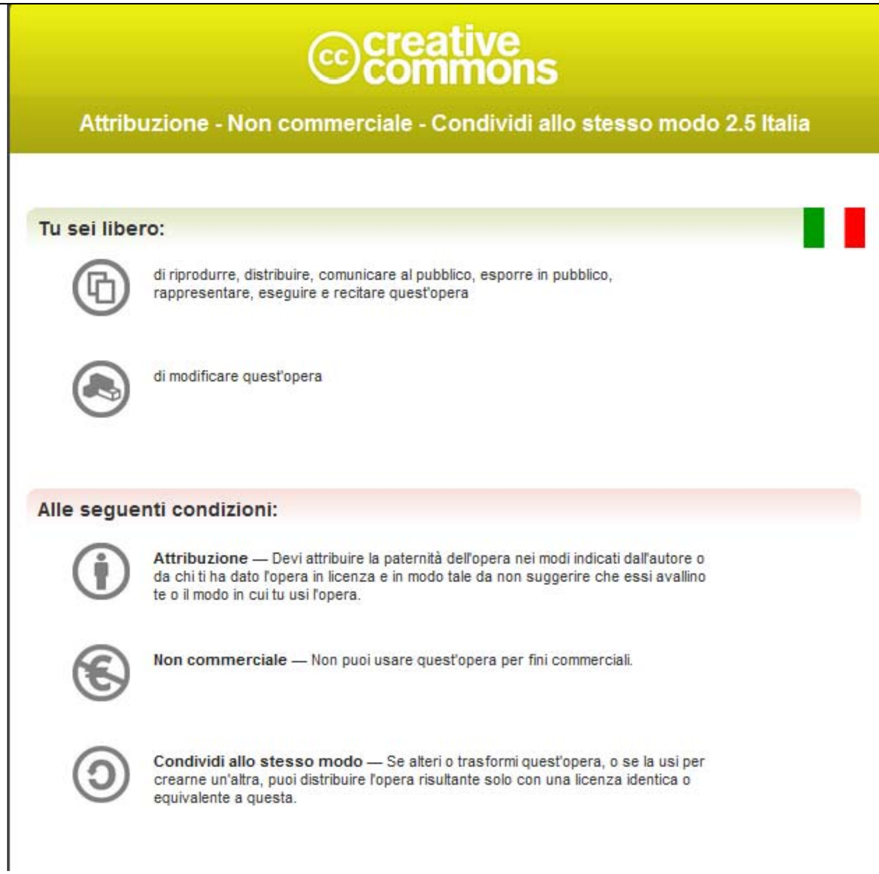
Parte 2

Dispense

Licenza

Questa presentazione è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Sommario

1 - Le trasformazioni composte

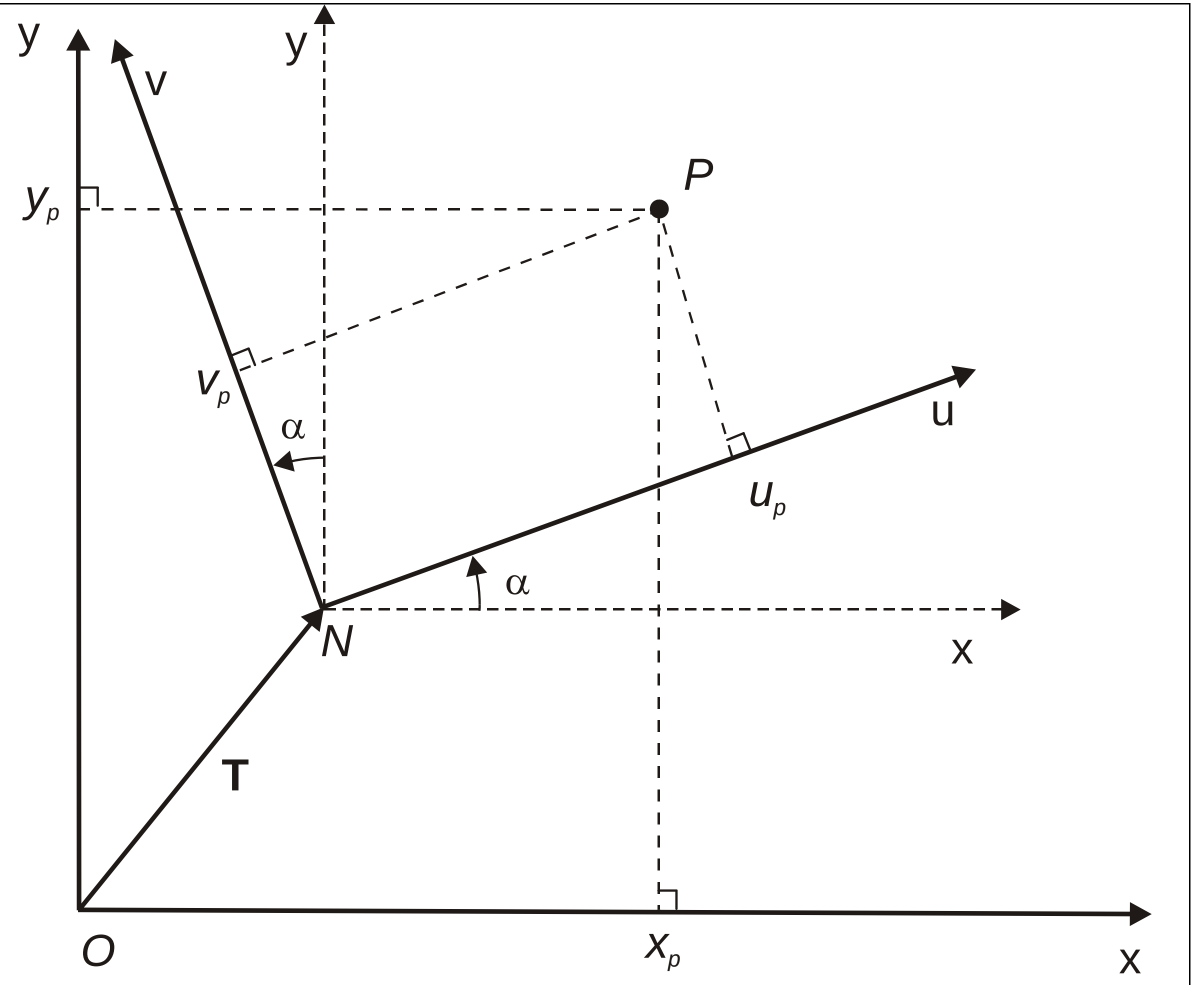
1.1 - Dimostrazione della TCP4

La TCP4 come successione di trasformazioni elementari

Pensiamo che (N,u,v) si sia allontanato da (O,x,y) per passi

- Traslazione di un vettore **T**
- Cambio di scala di un fattore λ
- Rotazione di α in senso antio-rario

Numero dei parametri: 4



[rototraslazione_piano.cdr,wmf]

La TCP4 come successione di trasformazioni elementari - 2

	(O,x,y)	
Traslazione di un vettore **T**		$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \mathbf{u}_P^{(1)}$
	$\left(N,u^{(1)},v^{(1)}\right)$	
Cambio di scala di un fatto-re λ		$\mathbf{u}_P^{(1)} = \lambda \mathbf{u}_P^{(2)}$
	$\left(N,u^{(2)},v^{(2)}\right)$	
Rotazione di un angolo α in senso antiorario		$\mathbf{u}_P^{(2)} = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$
	$\left(N,u,v\right)$	

La TCP4 come successione di trasformazioni elementari - 3

Tali relazioni possono essere composte in cascata nel modo seguente

$$\mathbf{u}_P^{(2)} = \mathbf{R}(\alpha)\ \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P^{(1)} = \lambda \mathbf{u}_P^{(2)} = \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$

Si arriva così alle equazioni della TCP4 (trasformazione di coordinate nel piano a 4 parametri), detta anche *trasformazione conforme*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P &= \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P &= \lambda^{-1}\mathbf{R}^t(\alpha)\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

dove la seconda è stata ottenuta ricordando che

- **R** è ortogonale e la sua inversa coincide con la trasposta
- Il prodotto fra una matrice e uno scalare è commutativo

Equazioni vettoriali e scalari della TCP4

Equazioni vettoriali dirette e indirette

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P &= \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P &= \lambda^{-1}\mathbf{R}^t(\alpha)\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right) \end{aligned} \qquad (2)$$

Equazioni scalari della forma diretta

$$\begin{aligned} x_P &= T_x + \lambda\left(u_P \cos\alpha - v_P \sin\alpha\right) \\ y_P &= T_y + \lambda\left(u_P \sin\alpha + v_P \cos\alpha\right) \end{aligned}$$

1.2 - Rassegna delle principali trasformazioni di coordinate nel piano

La rototraslazione - TCP3

Le equazioni si possono ottenere dalle (2) ponendo $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P &= \mathbf{T} + \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P &= \mathbf{R}^t(\alpha)\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Numero parametri: 3

Detta anche **congruenza**.

La rototraslazione con cambiamento di scala – TCP4

La inseriamo di nuovo per completezza

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$
$$\mathbf{u}_P = \lambda^{-1} \mathbf{R}^t(\alpha)\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right) \qquad (4)$$

Numero parametri: 4

Detta anche **trasformazione conforme**.

La rototraslazione con cambiamento di scala anisotropo – TCP5

Invece del coefficiente di scala λ, una matrice diagonale

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{R}^t(\alpha)\mathbf{\Lambda}^{-1}\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right) \qquad (5)$$

$$= \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{R}^t(\alpha)\left(\mathbf{x}_P - \mathbf{T}\right)$$

Da notare che la matrice $\mathbf{\Lambda}$, essendo diagonale, è certamente invertibile; inoltre essa commuta con ogni altra matrice e questo spiega la forma finale del risultato.

Equazioni scalari della forma diretta

$$x_P = T_x + \lambda_x\left(u_P \cos\alpha - v_P \sin\alpha\right)$$

$$y_P = T_y + \lambda_y\left(u_P \sin\alpha + v_P \cos\alpha\right)$$

Numero parametri: 5

Detta anche **affine particolare**.

La trasformazione affine – TCP6

Un'altra trasformazione utile nel campo del rilevamento è quella *affine*

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \mathbf{u}_P \qquad (6)$$

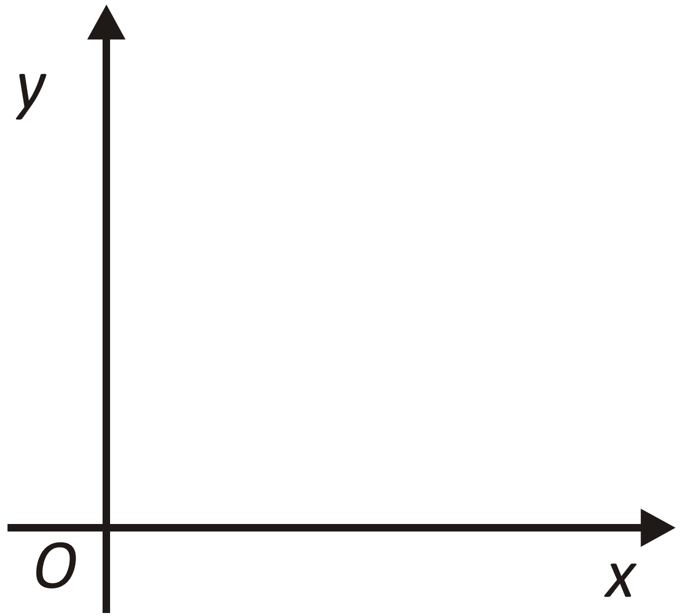
Numero parametri: 6

2 - SR destrorsi e sinistrorsi

Definizione di SR destrorso e sinistrorso nel piano

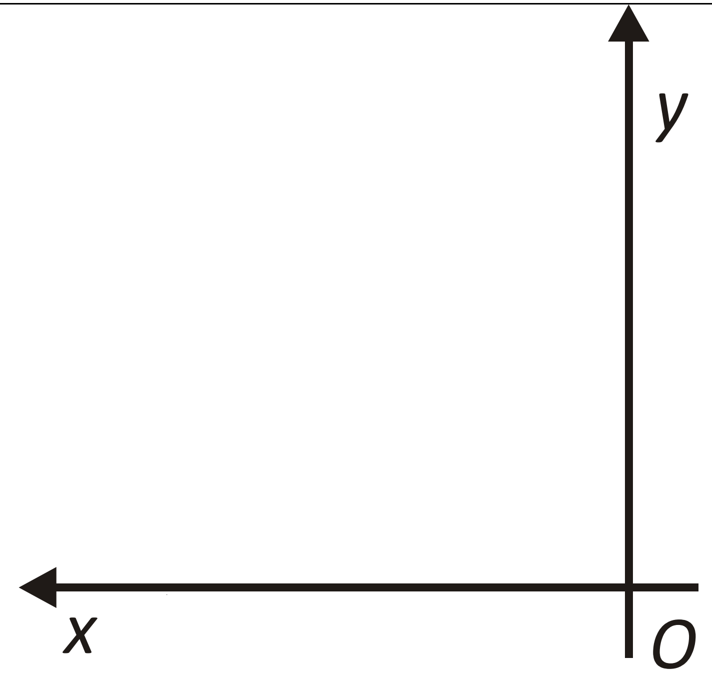
Consideriamo tutti i possibile SR ortogonali che si possono costruire nel piano. Essi possono essere suddivisi nei due insiemi dei SR destrorsi e sinistrorsi.

La definizione di SR destrorso e sinistrorso è molto intuitiva nello spazio 3D, per una analogia da cui le definizioni prendono il nome: nel piano è la seguente

Un SR è destrorso se, muovendosi lungo il secondo asse coordinato, verso i valori crescenti, la parte positiva del primo asse coordinato è alla propria destra.	

[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

Definizione di SR destrorso e sinistrorso nel piano - 2

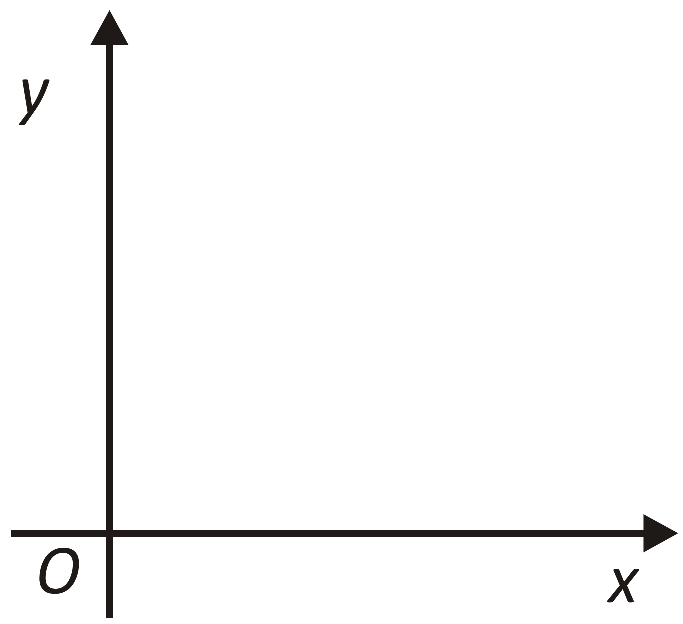
Un SR è sinistrorso se, muovendosi lungo il secondo asse coordinato, verso i valori crescenti, la parte positiva del primo asse coordinato è alla propria sinistra.	

[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

Prime conseguenze: SR *orientati*

Se si vuole considerare l'appartenenza alle famiglie destrorsa o sinistrorsa, un SR deve essere considerato una terna ordinata.

Se ad esempio (O,x,y) è destrorso, come a destra, il SR (O,y,x) è evidentemente sinistrorso.



[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

La chiralità

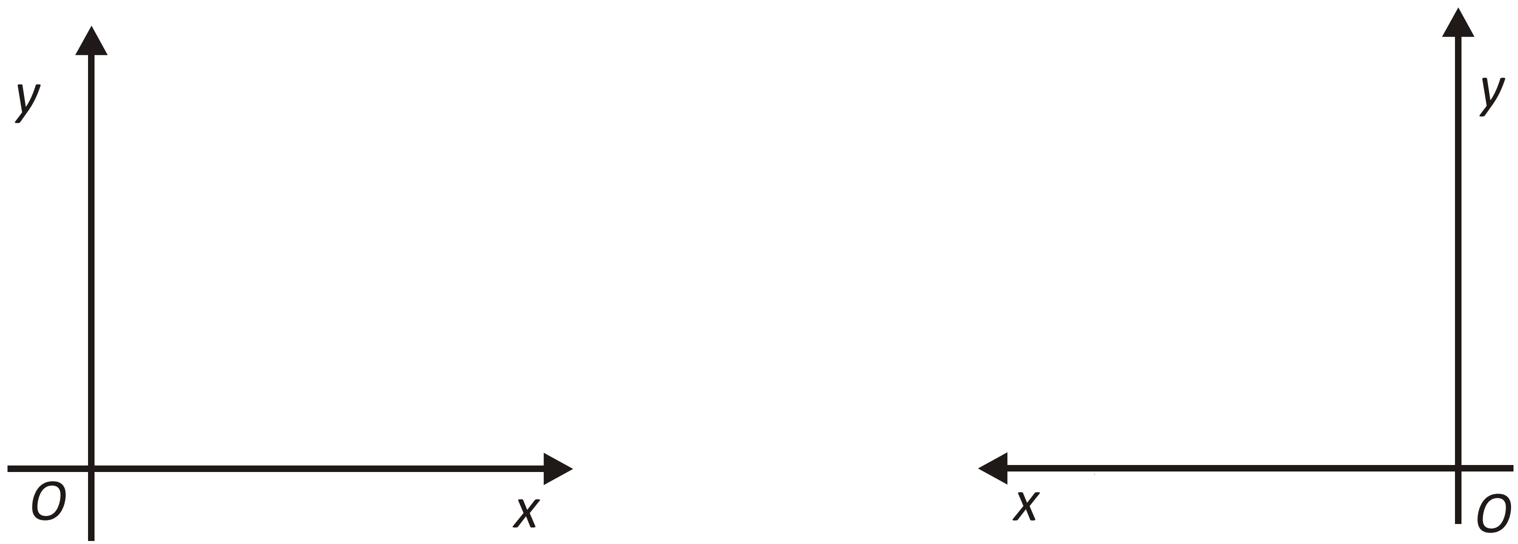
La chiralità è la proprietà dei SR legata al loro essere destrorsi o sinistrorsi.

La chiralità è evidentemente legata all'orientamento reciproco degli assi costituenti il SR e ha a che fare con la destra e sinistra.

Se si considera un SR avente una certa chiralità, per esempio destrorso, e lo si trasforma con traslazioni e rotazioni, la sua chiralità resta invariata.

La chiralità - 2

Si può dire che i due sistemi disegnati sono i *rappresentanti* dei SR destrorsi e sinistrorsi



[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

La chiralità - 3

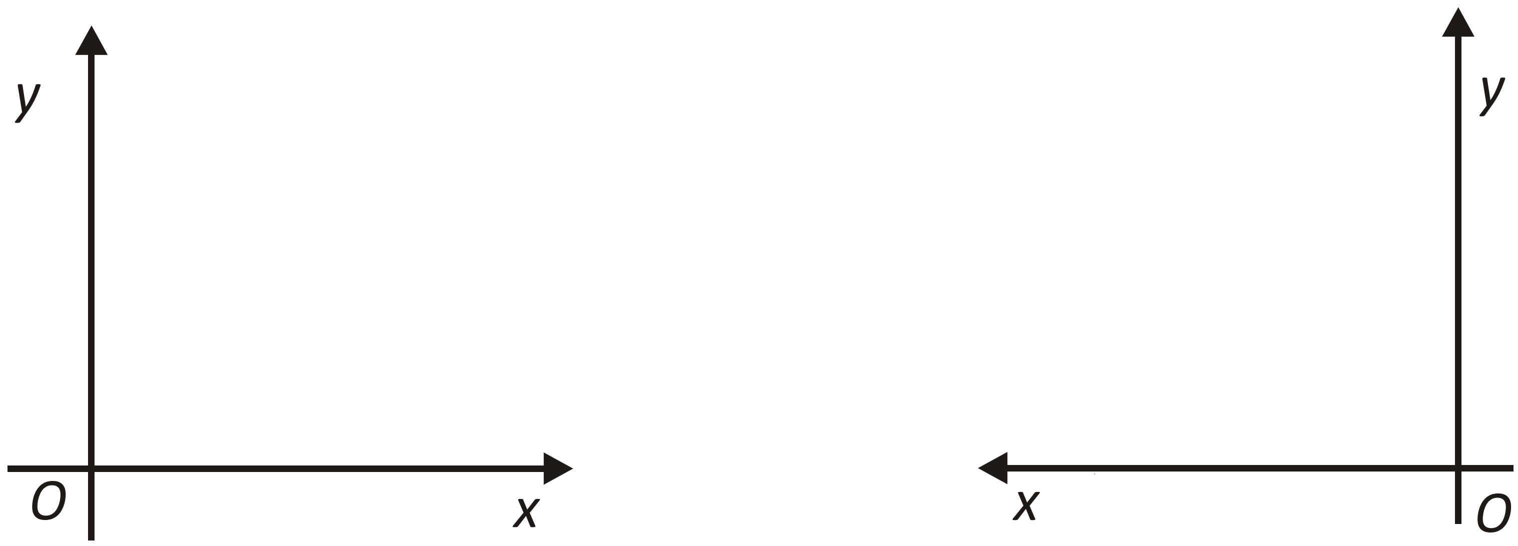
Ci sono due affermazioni equivalenti:

- applicando al rappresentante dei destrorsi una qualunque rototraslazione, si ottiene un sistema destrorso
- un qualunque sistema destrorso può essere ottenuto dal rappresentante mediante una opportuna rotazione

Cose analoghe per i sinistrorsi.

Non è invece possibile trasformare un destrorso in sinistrorso mediante traslazioni e rotazioni.

La chiralità - 4



[assi_2D_sinistrorsi_destrorsi.cdr,wmf]

I sue SR indicati non possono essere sovrapposti mediante traslazione e rotazione (determinante +1): la trasformazione necessaria è una riflessione rispetto all'asse y, rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avente determinante –1.

Dubbi

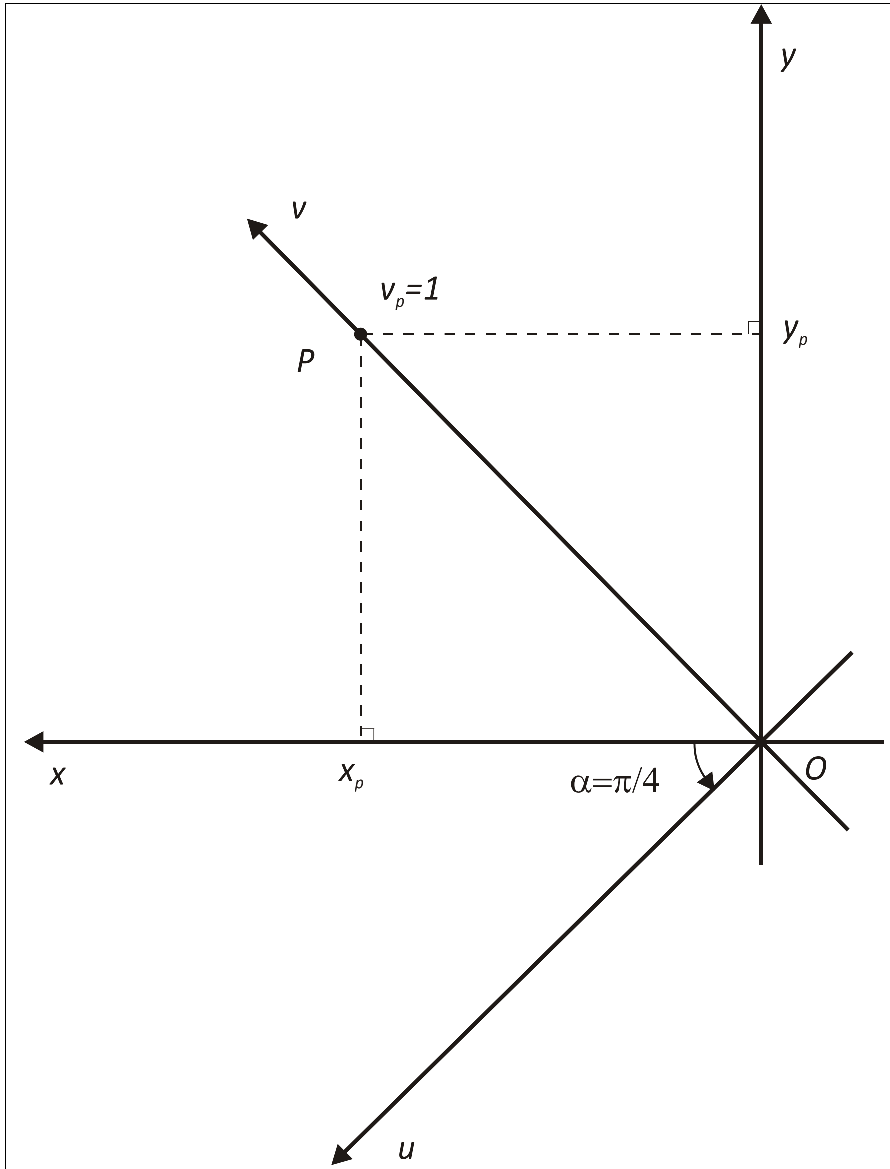
La chiralità ha a che fare con l'orientamento reciproco degli assi coordinati, con la destra e la sinistra.

La dimostrazione della matrice della rotazione è basata su considerazioni sull'orientamento degli assi.

Viene il dubbio: la matrice di rotazione trovata è sempre valida o lo è solo nei SR destrorsi?

Consideriamo un controesempio.

Controesempio sulle rotazioni per SR sinistrorsi



[controesempio_rotazione_piano_assi_sinistrorsi.cdr, wmf]

Consideriamo due coppie di assi sinistrorsi (O,x,y) e (N,u,v) e ipotizziamo che la seconda sia ruotata rispetto alla prima di $\pi/4$ in senso antiorario. Consideriamo il punto P avente coordinate

$$\mathbf{u}_P = (0,1)^t$$

Le sue coordinate (O,x,y) sono facilmente ricavabili dal disegno

$$\mathbf{x}_P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^t$$

Controesempio sulle rotazioni per SR sinistrorsi - 2

Ricaviamo ora il valore di $\mathbf{x}_P$ usando la matrice di rotazione, usando cioè la relazione

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}(45°)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

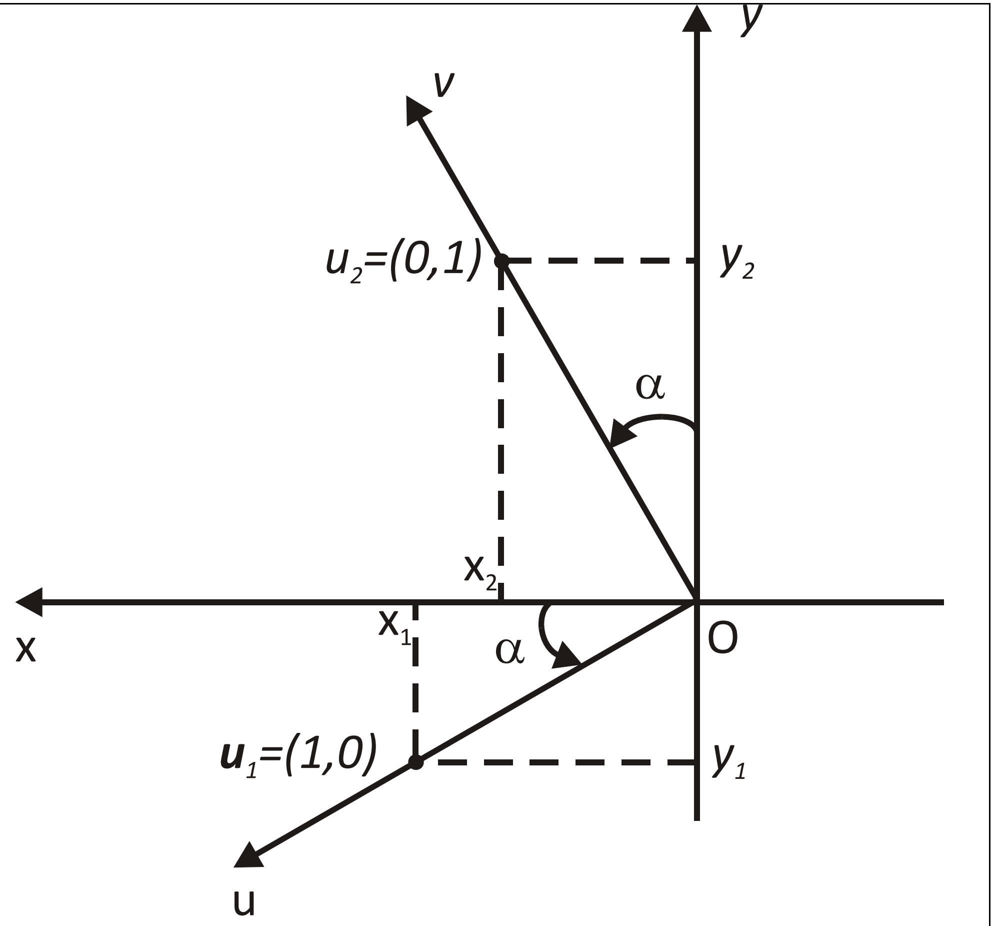
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Si ottiene un risultato diverso, in contraddizione con quanto ottenuto con la trigonometria elementare e ciò conferma che la matrice delle rotazioni usata finora vale solo per i SR destrorsi.

La matrice della rotazione antioraria in un SR sinistrorso

Ripetiamo la dimostrazione della matrice di rotazione per SR sinistrorsi. Scegliendo i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ come nel primo caso e ragionando in modo analogo si ottiene

$$\mathbf{R}^S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



[dimostrazione_rotazione_piano_algebra_sinistrorsi.wmf]

3 - Aspetti convenzionali

Esempi

Un collega ha calcolato la rototraslazione piana che connette le coordinate cartografiche del GPS UTM-WGS84 alle Cassini-Soldner di RSM. Posso usare i parametri determinati dal mio amico?

L'università di Pavia ha determinato i parametri di una trasformazione di Helmert valida per il territorio di RSM che trasforma dal datum WGS84 al datum RSM. Posso inserirli come parametri in ArcGIS?

Solo dopo aver accertato che le convenzioni siano le stesse

Aspetti convenzionali

Le convenzioni riguardano

- il senso in cui si misurano gli angoli: orario o antiorario
- l'ordine in cui le trasformazioni che compongono una TCP4 o altre vengono eseguiti
- l’appartenenza del SR considerati alla famiglia destrorsa o sinistrorsa
- la posizione di osservazione (banale nel caso 2D)

- Un ordine diverso nella composizione delle trasformazioni si traduce in un formalismo diverso
- La stessa relazione fisica si traduce in ennuple di parametri diverse a seconda della convenzione scelta.
- La stessa ennupla, inserita in equazioni diverse, porta a risultati diversi

3.1 - Altre questioni

Le equazioni della TCP4 in altre convenzioni

A seconda della convenzione scelta, le equazioni della TCP4 cambiano

Convenzione TSR (traslazione, scala, rotazione)

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \tag{7}$$

Convenzione RTS (rotazione, traslazione, scala)

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}(\alpha)\left(\lambda \mathbf{u}_P + \mathbf{T}\right) \tag{8}$$

Dimostrazione della TCP4 nella convenzione RTS

	(O,x,y)	
Rotazione di un angolo α in senso antiorario		$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P^{(1)}$
	$\left(N,u^{(1)},v^{(1)}\right)$	
Traslazione di un vettore $\mathbf{T}$		$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{T} + \mathbf{u}_P^{(2)}$
	$\left(N,u^{(2)},v^{(2)}\right)$	
Cambio di scala di un fat-tore λ		$\mathbf{u}_P^{(2)} = \lambda \mathbf{u}_P$
	$\left(N,u,v\right)$	

La TCP4 come successione di trasformazioni elementari - 3

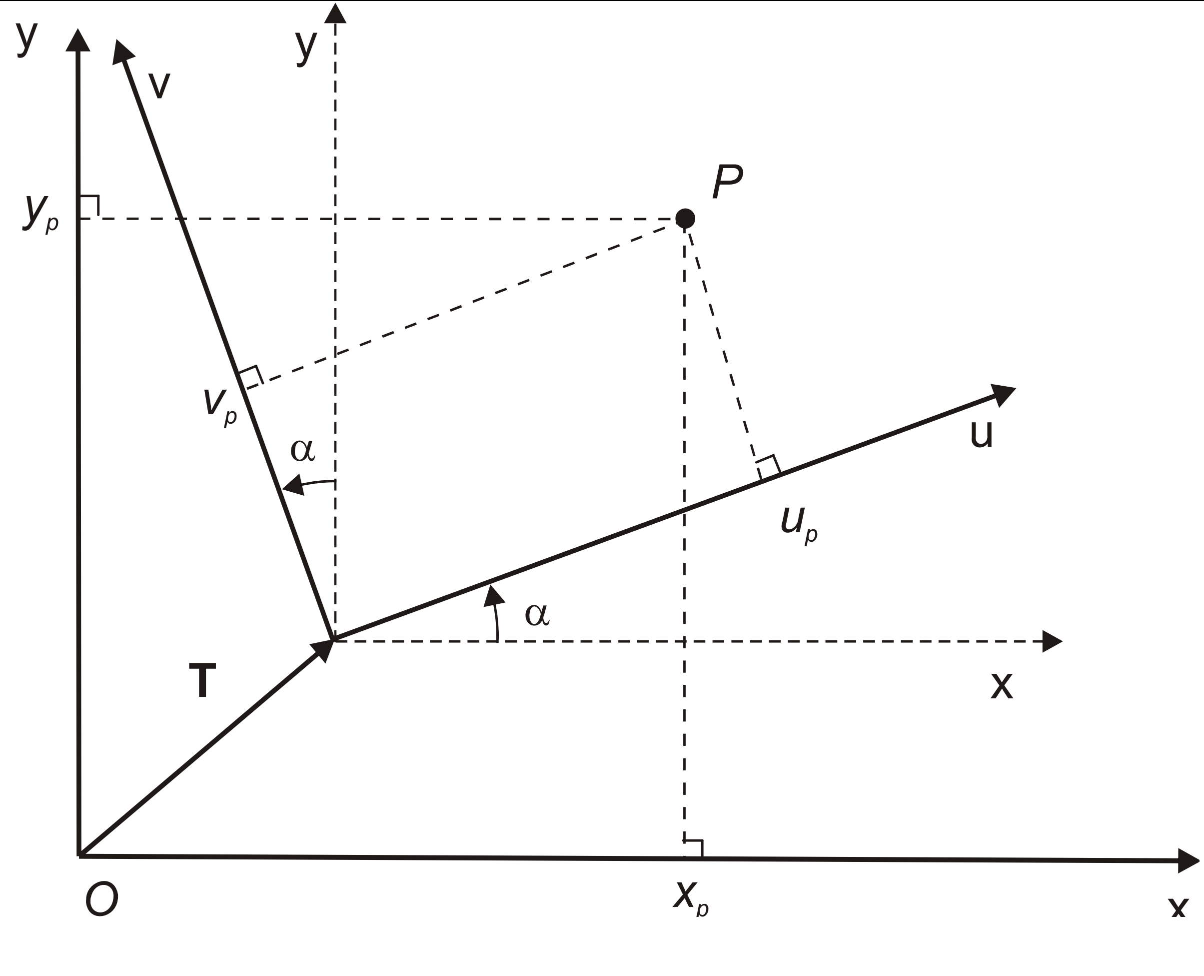
Tali relazioni possono essere composte in cascata nel modo seguente

$$\mathbf{u}_P^{(2)} = \lambda \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{T} + \mathbf{u}_P^{(2)} = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}(\alpha)\left(\mathbf{T} + \lambda \mathbf{u}_P\right)$$

Importanza dell'ordine delle trasformazioni

Consideriamo due SR (O,x,y) e (N,u,v) la cui posizione è quella del disegno Se si adotta la convenzione TSR (traslazione, scala, rotazione), la loro relazione è descritta da un certo insieme di parametri. Se si adotta la convenzione RTS (rotazione, traslazione, scala), la stessa relazione fisica è da un altro insieme di parametri	

Importanza dell'ordine delle trasformazioni – 2

La stessa relazione fisica fra due SR è descritta da parametri diversi, se si adottano convenzioni diverse

Inserire un set di parametri nelle due relazioni (7) e (8) porta a relazioni diverse

Esempio sulla rototraslazione

Consideriamo due SR (O,x,y) e (N,u,v) non scalati, solo rototraslati

- La posizione di N è, nel SR (O,x,y), $(1,1)^t$
- Gli assi di (N,u,v) sono ruotati di 50^g in senso antiorario rispetto a quelli di (O,x,y)

Nella convenzione (traslazione, rotazione) si ha

$$\mathbf{T} = (1,1)^t$$

$$\alpha = 50^g$$

Nella convenzione (rotazione, traslazione) si ha

$$\alpha = 50^g$$

$$\mathbf{T} = \left(\sqrt{2},0\right)^t$$

Esempi sul diverso effetto dello stesso set di parametri inserito nelle equazioni corrispondenti a diverse convenzioni - 1

Consideriamo un esempio.

Coordinate di un punto P nel SR (N,u,v)

$$\mathbf{u}_P = (2,3)^t$$

Parametri della trasformazione

$$\mathbf{T} = (1,-2)^t$$

$$\lambda = 1.5$$

$$\alpha = 30^g$$

Esempi sul diverso effetto dello stesso set di parametri inserito nelle equazioni corrispondenti a diverse convenzioni - 2

Convenzione TSR (traslazione, scala, rotazione)

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$

Coordinate di P rispetto a (O, x, y)

$$\mathbf{x}_P = \left(1.63, 3.37\right)^t$$

Convenzione RTS (rotazione, traslazione, scala)

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}(\alpha)\left(\lambda \mathbf{u}_P + \mathbf{T}\right)$$

Coordinate di P rispetto a (O, x, y)

$$\mathbf{x}_P = \left(2.43, 4.04\right)^t$$

Lo stesso punto, gli stessi parametri, ma convenzioni diverse

Il problema inverso - 1

Lo scopo è determinare i parametri di una trasformazione di coordinate che connette due SR

Servono (pochi) punti doppi: punti di cui si conoscono le coordinate in entrambi i SR

Si conoscono le coordinate $(u_i, v_i)^t$ e $(x_i, y_i)^t$ di un numero s di punti doppi

Riconsideriamo l'equazione della TCP4 nella nostra convenzione per il generico punto *P*

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P$$

La forma scalare delle stesse equazioni per il punto *P*

$$x_P = T_x + \lambda\left(u_P \cos\alpha - v_P \sin\alpha\right)$$

$$y_P = T_y + \lambda\left(u_P \sin\alpha + v_P \cos\alpha\right)$$

Il problema inverso - 2

La forma scalare per il generico punto doppio *i*-esimo

$$x_i = T_x + \lambda\left(u_i \cos\alpha - v_i \sin\alpha\right)$$

$$y_i = T_y + \lambda\left(u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha\right)$$

Particolarità: le grandezze x_i, y_i, u_i e v_i sono note

Il problema inverso - 3

Per gli s punti doppi possiamo scrivere il sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 &= T_x + \lambda\left(u_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha\right) \\
y_1 &= T_y + \lambda\left(u_1 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha\right) \\
&\vdots \\
x_i &= T_x + \lambda\left(u_i \cos\alpha - v_i \sin\alpha\right) \\
y_i &= T_y + \lambda\left(u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha\right) \\
&\vdots \\
x_s &= T_x + \lambda\left(u_s \cos\alpha - v_s \sin\alpha\right) \\
y_s &= T_y + \lambda\left(u_s \sin\alpha + v_s \cos\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Il sistema è composto da $2s$ equazioni. Le grandezze x_i, y_i, u_i e v_i sono tutte note e le uniche incognite sono T_x, T_y, α e λ (4 incognite). Tali equazioni possono essere risolte con la tecnica dei minimi quadrati, MQ.

Trasformazione di SR ottenuta mediante trasformazione di coordinate

Determino numerosi (anche migliaia) di punti nel SR (N,u,v)

Determino pochi (4-6) di questi anche nel SR (O,x,y); tipicamente con GPS; i punti doppi devono abbracciare il rilievo

Stimo i parametri di una TCP4

Li applico a tutti i punti del rilievo, ottenendo le loro coordinate (O,x,y) mediante la banale applicazione di una TCP4

Esercizi svolti – 1

Esercizio 3 Consideriamo due sistemi di coordinate (O, x, y) e (N, u, v). I due SR inizialmente coincidevano e successivamente il secondo si è *allontanato* dal primo con una successione di trasformazioni:

- traslazione $\mathbf{T}$;
- cambio di scala λ.
- rotazione in senso antiorario α;

Indicare quali relazioni, dirette e inverse, legano le coordinate $\mathbf{x}_p$ e $\mathbf{u}_p$ di uno stesso punto P.

$\mathbf{x}_p =$	$\mathbf{T} + \lambda\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_p$
$\mathbf{u}_p =$	$\lambda^{-1}\mathbf{R}^t(\alpha)(\mathbf{x}_p - \mathbf{T})$

Consideriamo una trasformazione come quella indicata avente i parametri:

$\mathbf{T}$	λ	α
$(2.943, 3.276)^t$	2.448	43.0462^g

Consideriamo i punti P_1 e P_2; del primo sono note le coordinate rispetto a (N, u, v), mentre del secondo sono note le (O, x, y). Trovare le coordinate mancanti.
Nota bene. La definizione delle varie grandezze in gioco è quella delle dispense, se non diversamente precisato.

	x	y	u	v
P_1	0.294	11.530	1.266	3.307
P_2	1.906	-2.920	-1.914	-1.709

Esercizi svolti – 2

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2.943 \\ 3.276 \end{bmatrix} + 2.448 \begin{bmatrix} 0.779976 & -0.625809 \\ 0.625809 & 0.779976 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.266 \\ 3.307 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.294 \\ 11.530 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = 0.408497 \begin{bmatrix} 0.779976 & 0.625809 \\ -0.625809 & 0.779976 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.906 \\ -2.920 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.943 \\ 3.276 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1.914 \\ -1.709 \end{bmatrix}$$

Non leggere

NON LEGGERE

Da fare

dualismo assi/mondo

trasformazioni infinitesime

dalla matrice all'angolo