



Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET

Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it



Teoria degli errori nel caso normale - 1

Dispense

Licenza

Questa presentazione è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 Italia

Tu sei libero:



di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera



di modificare quest'opera

Alle seguenti condizioni:



Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.



Non commerciale — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.



Condividi allo stesso modo — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Equazioni di collinearità – Notazioni

1. $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ $i = 1, 2, \dots, p$ $j = 1, 2, \dots, s$: coordinate immagine del punto i -esimo proiettato sull'immagine j -esima.
2. $\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ $i = 1, 2, \dots, p$: coordinate oggetto del punto i -esimo. La notazione è indipendente dal fatto che le coordinate siano note a priori (GCP) o meno (TP).
3. $\mathbf{X}_{0j} = (X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j})$ $j = 1, 2, \dots, s$: coordinate oggetto del centro di presa dell'immagine j -esima.
4. $\mathbf{\Omega}_j = (\omega_j, \varphi_j, \kappa_j)$ $j = 1, 2, \dots, s$: angoli di assetto dell'immagine j -esima.
5. c : lunghezza focale della camera.

Richiamo: equazioni di collinearità (equazioni della fotografia positiva)

Collinearità per il punto i -esimo, proiettato sull'immagine j -esima **positiva**.

$$x_{ij} = -c \frac{r_{11j}(X_i - X_{0j}) + r_{21j}(Y_i - Y_{0j}) + r_{31j}(Z_i - Z_{0j})}{r_{13j}(X_i - X_{0j}) + r_{23j}(Y_i - Y_{0j}) + r_{33j}(Z_i - Z_{0j})}$$
$$y_{ij} = -c \frac{r_{12j}(X_i - X_{0j}) + r_{22j}(Y_i - Y_{0j}) + r_{32j}(Z_i - Z_{0j})}{r_{13j}(X_i - X_{0j}) + r_{23j}(Y_i - Y_{0j}) + r_{33j}(Z_i - Z_{0j})}$$
(1)

Gli elementi come ad esempio r_{11j} sono elementi della matrice di rotazione dell'immagine j -esima

$$\mathbf{R}(\omega_j, \varphi_j, \kappa_j)$$

Convenzione delle rotazioni - 1

Nelle dispense vale, per le matrici di rotazione, la convenzione usata anche da Kraus:

il sistema di riferimento-immagine (O, x, y, z) si è allontanato da quello oggetto (G, X, Y, Z) con la seguente successione di rotazioni

- rotazione di un angolo ω in senso antiorario attorno a x
- rotazione di un angolo φ in senso antiorario attorno al trasformato di y
- rotazione di un angolo κ in senso antiorario attorno al trasformato di z

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\omega_j, \varphi_j, \kappa_j) &= \mathbf{R}_{xyz}(\omega_j, \varphi_j, \kappa_j) = \\ &= \mathbf{R}_x(\omega_j) \mathbf{R}_y(\varphi_j) \mathbf{R}_z(\kappa_j)\end{aligned}$$

Convenzione delle rotazioni – 2

Esplicitiamo le rotazioni

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \\ \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & -\sin \omega \cos \varphi \\ \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Richiamo: equazioni della restituzione

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} \quad K_{x1} = \frac{R_{111} x_1 + R_{121} y_1 - R_{131} c}{R_{311} x_1 + R_{321} y_1 - R_{331} c}$$

$$Y = Y_{01} + (Z - Z_{01})K_{y1} \quad K_{y1} = \frac{R_{211} x_1 + R_{221} y_1 - R_{231} c}{R_{311} x_1 + R_{321} y_1 - R_{331} c}$$

$$X = X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2} \quad K_{x2} = \frac{R_{112} x_2 + R_{122} y_2 - R_{132} c}{R_{312} x_2 + R_{322} y_2 - R_{332} c}$$

$$Y = Y_{02} + (Z - Z_{02})K_{y2} \quad K_{y2} = \frac{R_{212} x_2 + R_{222} y_2 - R_{232} c}{R_{312} x_2 + R_{322} y_2 - R_{332} c}$$

Richiamo: equazioni della restituzione - 2

$$Z = \frac{X_{02} - X_{01} - Z_{02} K_{x2} + Z_{01} K_{x1}}{K_{x1} - K_{x2}}$$

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01}) K_{x1}$$

$$Y^{(1)} = Y_{01} + (Z - Z_{01}) K_{y1}$$

$$Y^{(2)} = Y_{02} + (Z - Z_{02}) K_{y2}$$

La presa fotogrammetrica ideale

I centri di presa dei fotogrammi di una strisciata appartengono a una linea orizzontale, cioè parallela al piano (X, Y) oggetto

I SR-immagine dei fotogrammi di una strisciata sono paralleli

- Gli assi X e y immagine dei vari fotogrammi sono paralleli
- La loro origine appartiene alla stessa retta, dunque tutti gli assi giacciono nello stesso piano orizzontale
- Per tutti i fotogrammi di una strisciata, l'asse della camera è parallelo alla stessa direzione, *verticale* (ortogonale al piano X, Y oggetto)

Gli assi delle strisciate sono linee parallele e *orizzontali* (parallele al piano (X, Y) oggetto)

In genere i voli fotogrammetrici cercano di realizzare tale condizione ideale.

Definizione di presa normale – 1

La presa normale è una idealizzazione, in cui si acquisisce nel modo ideale. Consideriamo una **coppia** di fotogrammi positivi aventi valori particolari di orientamento esterno

- il piano focale (x,y) è parallelo al piano-oggetto (X,Y)

$$\omega_j = \varphi_j = 0 \quad j = 1,2$$

- l'asse x del SR immagine è parallelo all'asse X del SR oggetto

$$k_j = 0 \quad j = 1,2$$

- il centro di presa dell'immagine 1 si trova nell'origine del SR oggetto; il centro di presa dell'immagine 2 si trova sull'asse oggetto X a una distanza B dall'origine

$$\mathbf{X}_{O_1} = (0,0,0)$$

$$\mathbf{X}_{O_2} = (B,0,0)$$

Definizione di presa normale - 2

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equazioni della fotografia nel caso normale

Consideriamo un punto P avente coordinate oggetto

$$\mathbf{X} = (X, Y, Z)$$

Consideriamo i punti-immagine generati da P sulle due immagini, π_1 e π_2 , aventi coordinate-immagine

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

Le equazioni della fotografia diventano

$$\begin{aligned} x_1 &= -c \frac{X}{Z} & x_2 &= -c \frac{X - B}{Z} \\ y_1 &= -c \frac{Y}{Z} & y_2 &= -c \frac{Y}{Z} \\ & & &= y_1 \end{aligned}$$

Equazioni della restituzione nel caso normale

$$X = \frac{B x_1}{x_1 - x_2}$$

$$y^{(1)} = \frac{B y_1}{x_1 - x_2} \quad y^{(2)} = \frac{B y_2}{x_1 - x_2}$$

$$Z = \frac{cB}{x_2 - x_1}$$

Teoria degli errori – formule rigorose

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\Delta Z}{c}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \sqrt{2}\sigma \sqrt{\frac{B}{\Delta Z}}\right)^2} \frac{x_1}{c}$$
$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\Delta Z}{c}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \frac{y_1}{c} \sqrt{2}\sigma\right)^2} \quad (2)$$
$$\sigma_z = \frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \sqrt{2}\sigma$$

Teoria degli errori – formule normalmente usate - 1

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\left(\frac{\Delta Z}{c} \sigma\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma\right)^2} \\ \sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\Delta Z}{c} \sigma\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \frac{y_1}{c} \sqrt{2} \sigma\right)^2} \\ \sigma_z &= \frac{\Delta Z}{c} \frac{1}{B/\Delta Z} \sqrt{2} \sigma\end{aligned}\tag{3}$$

Sono conformi alle formule 2.7-2 di Kraus, pag. 40. In Kraus compare la precisione di misura della parallasse x , σ_{p_x} , mentre io inserisco la grandezza $\sqrt{2} \sigma$ dove σ indica la precisione con cui vengono misurate le coordinate lastra.

Teoria degli errori – formule normalmente usate - 2

Poiché la parallasse x è la differenza $x_2 - x_1$, in caso di collimazioni monoscopiche è certamente corretto scrivere $\sigma_{\rho_x} = \sqrt{2} \sigma$; in caso di collimazioni stereoscopiche, alcuni autori sostengono che vale approssimativamente $\sigma_{\rho_x} \cong \sigma$: la collimazione stereo consente di misurare la parallasse con la stessa precisione con cui si collima un punto.

non leggere

Dipendenza dal posto - 1

Gli errori dipendono dal posto, dunque non tutti i punti di un modello vengono restituiti con la stessa precisione: nel caso della presa normale ciò è vero solo per gli errori delle componenti x ed y , che dipendono rispettivamente da x_1 e y_1 , cioè le coordinate lastra del punto omologo che si trova sulla prima immagine. La particolare geometria della presa normale implica che gli errori delle quote siano invece costanti per tutto il modello: ciò non si verifica in genere per fotogrammi con orientamento qualsiasi.

Gli errori sono minimi vicino a centro del fotogramma, in cui x_1 e y_1 sono piccole, e massimi ai bordi.

Intervalli abbracciati da x_1 e y_1 . Nel caso di ricoprimento 60%, indicando con l - elle minuscolo- la dimensione del fotogramma, che si oppone a L , la dimensione dell'impronta a terra del fotogramma, si ha

$$-0.1l \leq x_1 \leq 0.5l$$

$$-0.5l \leq y_1 \leq 0.5l$$

Dipendenza dal posto - 2

Come tenerne conto?

Strategia 1: errore massimo. Assegnare a x_1 e y_1 valori alti, in modo da trovare l'errore massimo; io uso spesso 100 mm.

Strategia 2: errore medio. Preso atto che l'errore in x è funzione di x_1

$$\sigma_x(x_1) = \sqrt{\left(\frac{Z}{c} \sigma\right)^2 + \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma\right)^2}$$

si può definire σ_x come la media pesata di $\sigma_x(x_1)$, calcolata sul dominio

$$-0.1/ \leq x_1 \leq 0.5/$$

Errore planimetrico come media pesata – 1

La grandezza da mediare è $\sigma_X(x_1)$

Il peso è x_1

$$a = -0.1/$$

$$b = 0.5/$$

$$\sigma_X = \frac{\int_a^b dx_1 x_1 \sigma_X(x_1)}{\int_a^b dx_1 x_1} \quad (4)$$

Errore planimetrico come media pesata - 2

Per semplicità passiamo alle varianze

$$\sigma_x^2 = \frac{\int_a^b dx_1 x_1 \sigma_x^2(x_1)}{\int_a^b dx_1 x_1} =$$
$$= \frac{\int_a^b dx_1 x_1 \left(\left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 + \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 \right)}{\int_a^b dx_1 x_1}$$

Errore planimetrico come media pesata - 3

Denominatore

$$\int_a^b dx_1 x_1 = \frac{x_1^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Errore planimetrico come media pesata - 4

Numeratore

$$\int_a^b dx_1 x_1 \left(\left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 + \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 \right) =$$
$$= \int_a^b dx_1 x_1 \left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 + \int_a^b dx_1 x_1 \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2$$

Primo addendo

$$\int_a^b dx_1 x_1 \left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 =$$
$$= \left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 \int_a^b dx_1 x_1 = \left(\frac{Z}{c} \sigma \right)^2 \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

Errore planimetrico come media pesata - 5

Secondo addendo

$$\begin{aligned} & \int_a^b dx_1 x_1 \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{x_1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 = \\ & = \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 \int_a^b dx_1 x_1^3 = \\ & = \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 \frac{x_1^4}{4} \Big|_a^b = \\ & = \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \sigma \right)^2 \left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right) \end{aligned}$$

Errore planimetrico come media pesata - 6

Sintesi

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{\int_a^b dx_1 x_1 \sigma_x^2(x_1)}{\int_a^b dx_1 x_1} = \\ &= \frac{\left(\frac{Z}{c} \sigma\right)^2 \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + \left(\frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \sigma\right)^2 \left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right)}{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}\end{aligned}\quad (5)$$

osservando che

$$\left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)$$

Errore planimetrico come media pesata - 7

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \left(\frac{Z}{c}\sigma\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\frac{1}{B/Z}\frac{1}{c}\sqrt{2}\sigma\right)^2 \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{Z}{c}\sigma\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{B/Z}\frac{1}{c}\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Passando alla radice quadrata si ottiene infine

$$\sigma_x = \left(\frac{Z}{c}\sigma\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{B/Z}\frac{1}{c}\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)}$$

La formula vale per σ_x e per σ_y , ma **i limiti di integrazione sono diversi.**

Errore come media pesata

$$\sigma_x = \left(\frac{Z}{c} \sigma \right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \right)^2 \left(\frac{(0.5l)^2}{2} + \frac{(-0.1l)^2}{2} \right)}$$

$$\sigma_y = \left(\frac{Z}{c} \sigma \right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{B/Z} \frac{1}{c} \sqrt{2} \right)^2 \left(\frac{(0.5l)^2}{2} + \frac{(-0.5l)^2}{2} \right)}$$

$$\sigma_z = \frac{Z}{c} \frac{1}{B/Z} \sqrt{2} \sigma$$

Esempio 1

Precisioni teoriche

$$R_f = 0.6$$

$$c = 150 \text{ mm}$$

$$B/H = 0.61 \text{ mm}$$

$$\sigma = 0.01 \text{ mm}$$

Errori calcolati come media pesata

| Scala carta | Scala fotogramma | Altezza volo | sigma_x | sigma_y | sigma_z |
|-------------|------------------|--------------|---------|---------|---------|
| 1000 | 5000 | 750 | 0,12 | 0,09 | 0,12 |
| 2000 | 8000 | 1200 | 0,19 | 0,15 | 0,18 |
| 5000 | 13000 | 1950 | 0,31 | 0,24 | 0,30 |
| 10000 | 18000 | 2700 | 0,42 | 0,33 | 0,42 |
| 25000 | 30000 | 4500 | 0,71 | 0,55 | 0,69 |
| 50000 | 40000 | 6000 | 0,94 | 0,73 | 0,92 |

Esempio 2

Precisioni teoriche

$$R_f = 0.6$$

$$c = 300 \text{ mm}$$

$$B/H = 0.31$$

$$\sigma = 0.01 \text{ mm}$$

Errori calcolati come media pesata

| Scala carta | Scala fotogramma | Altezza volo | sigma_x | sigma_y | sigma_z |
|-------------|------------------|--------------|---------|---------|---------|
| 1000 | 5000 | 1500 | 0,12 | 0,09 | 0,23 |
| 2000 | 8000 | 2400 | 0,19 | 0,15 | 0,37 |
| 5000 | 13000 | 3900 | 0,31 | 0,24 | 0,60 |
| 10000 | 18000 | 5400 | 0,42 | 0,33 | 0,83 |
| 25000 | 30000 | 9000 | 0,71 | 0,55 | 1,38 |
| 50000 | 40000 | 12000 | 0,94 | 0,73 | 1,84 |

Esempio 3

Precisioni teoriche

$$R_f = 0.8$$

$$c = 150 \text{ mm}$$

$$B/H = 0.31$$

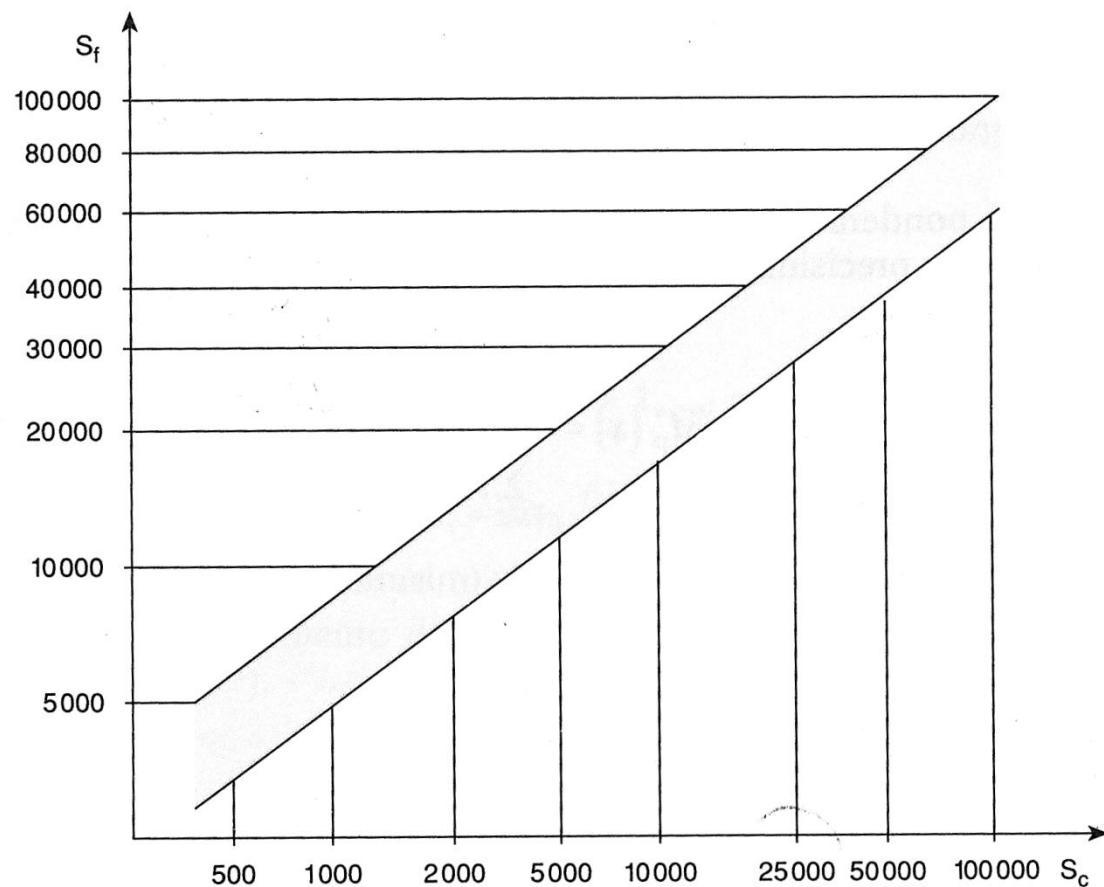
$$\sigma = 0.01 \text{ mm}$$

Errori calcolati come media pesata

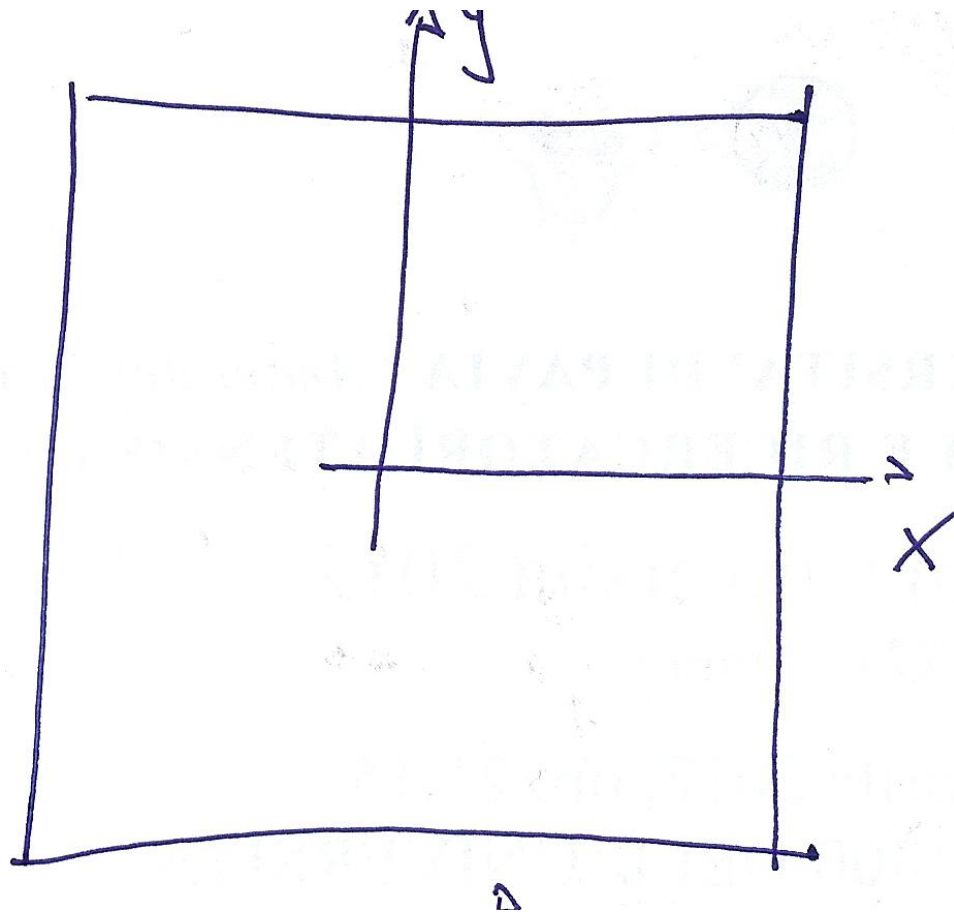
| Scala carta | Scala fotogramma | Altezza volo | sigma_x | sigma_y | sigma_z |
|-------------|------------------|--------------|---------|---------|---------|
| 1000 | 5000 | 750 | 0,19 | 0,16 | 0,23 |
| 2000 | 8000 | 1200 | 0,31 | 0,26 | 0,37 |
| 5000 | 13000 | 1950 | 0,50 | 0,42 | 0,60 |
| 10000 | 18000 | 2700 | 0,69 | 0,58 | 0,83 |
| 25000 | 30000 | 4500 | 1,15 | 0,97 | 1,38 |
| 50000 | 40000 | 6000 | 1,54 | 1,29 | 1,84 |

Grafico corrispondenza scala carta e scala fotogramma

RELAZIONE FRA LA SCALA DEL FOTOGRAMMA E LA SCALA DELLA CARTA



SR Immagine



[sr_immagine.png]

Regione di integrazione

