Vittorio Casella

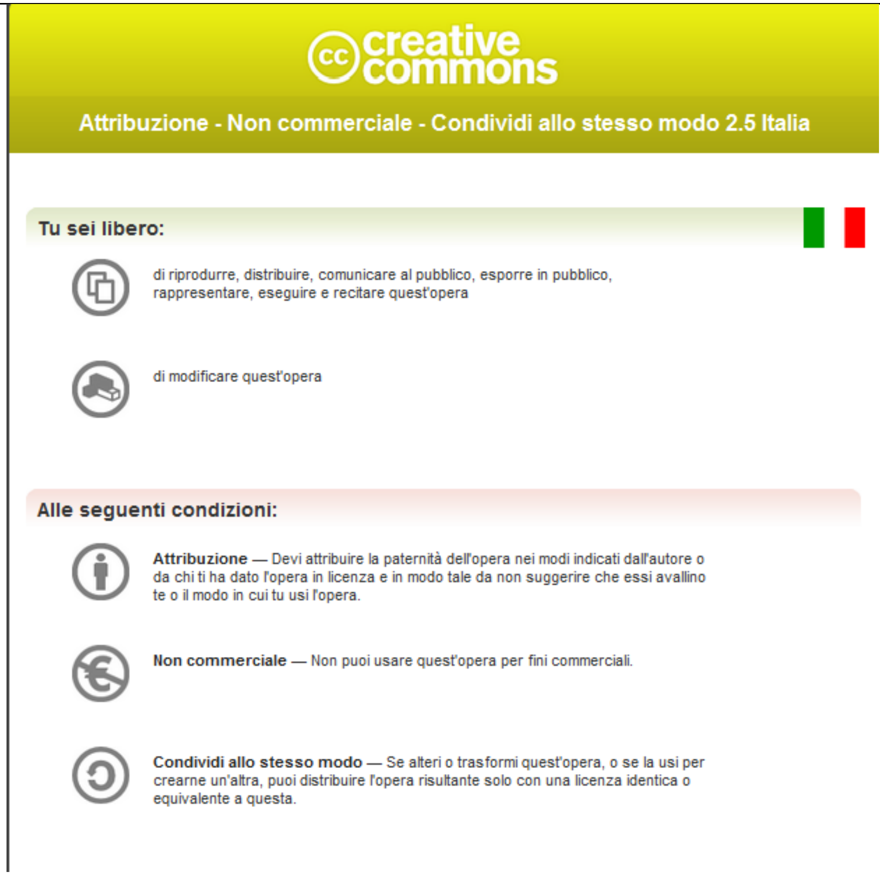
Laboratorio di Geomatica - DIET - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

I Minimi Quadrati lineari
Parte 1

Licenza

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



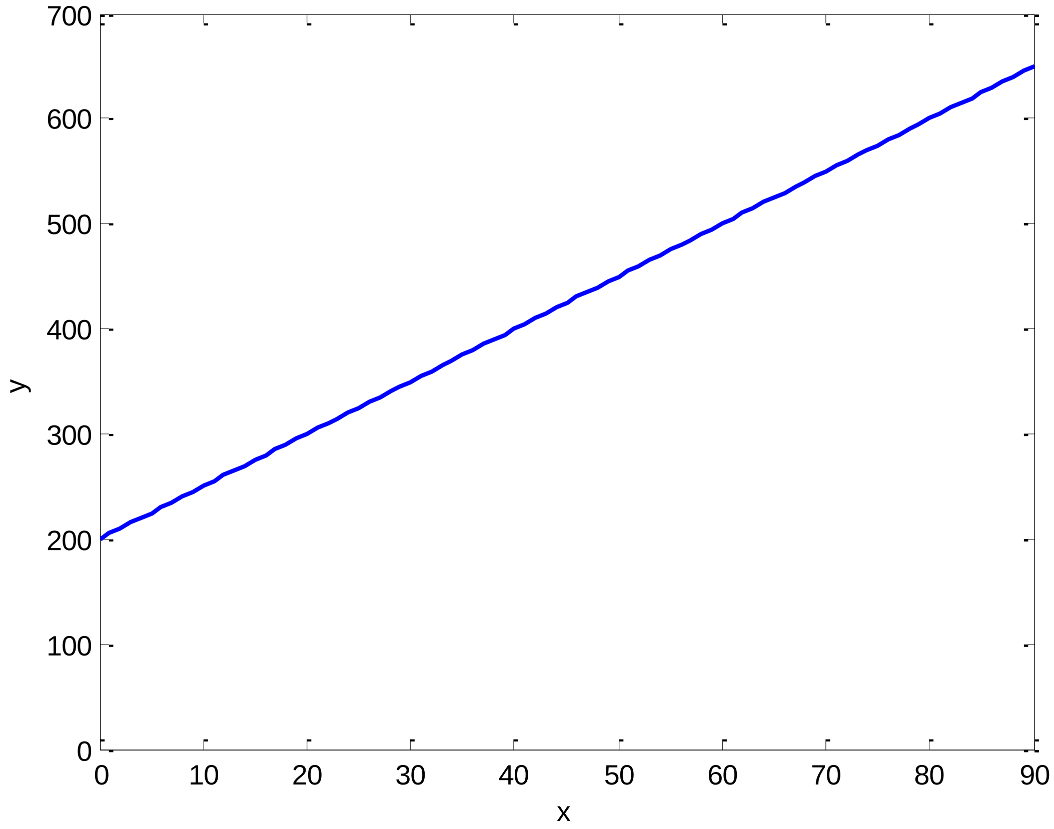
Che cosa studiare

L'esempio del fenomeno lineare

Molti fenomeni seguono la legge

$$y = px + q \qquad (1)$$

Si tratta di un fenomeno lineare, il cui grafico, nello spazio (O,x,y) è rappresentato da una retta



[retta_interpolante_1.m]

Esempi di fenomeni lineari: la dilatazione termica

Molti fenomeni sono descritti dalla legge (1). In fisica, ad esempio:

- la dilatazione termica
- la molla

Nel caso della dilatazione termica, p e q rappresentano rispettivamente il coefficiente di dilatazione termica e la lunghezza iniziale; x e y rispettivamente la variazione di temperatura e la lunghezza dell'oggetto considerato.

Nel caso dell'allungamento elastico delle molla, p e q si identificano rispettivamente con il *coefficiente di allungamento* e con la lunghezza a riposo; x e y rispettivamente con la forza applicata e la lunghezza della molla.

Esempi di fenomeni lineari: la molla

Una molla è un sistema fisico avente equazione

$$l = \mu F + l_r \text{ dove} \qquad (2)$$

l lunghezza della molla

l_r lunghezza a riposo della molla (non sollecitata da alcuna forza)

μ coefficiente di allungamento della molla

F forza con cui la molla viene sollecitata

In questo caso p e q si identificano rispettivamente con il coefficiente di allungamento e con la lunghezza a riposo; x e y rispettivamente con la forza applicata e la lunghezza della molla

Esempi di fenomeni lineari: la molla - 2

Attenzione

$$l = \mu F + l_r$$

Nei testi di Fisica compare il coefficiente elastico κ, che corrisponde al reciproco della quantità μ indicata. Non casualmente la quantità μ è stata indicata come coefficiente di allungamento, per sottolineare la differenza. E' evidente del resto l'equivalenza fra la trattazione canonica e la mia, che è più semplice, ai fini del discorso che intendo fare.

Affrontiamo preliminarmente il formalismo dei MQ con riferimento al caso della molla.

Il problema diretto e quello inverso

La legge (2) può essere usata in due modi: il problema diretto e quello inverso.

Il **problema diretto,** dalla teoria all'esperimento. Si conoscono i parametri μ e l_r e si deve prevedere il comportamento della molla, cioè che lunghezza assumerà la molla se sollecitata con una certa forza.

Il **problema inverso**, dall'esperimento alla teoria. In un contesto sperimentale, la misura di alcune coppie di valori (F_i, l_i), fatta l'ipotesi che il fenomeno segua la legge (2), permette di ricavare i parametri incogniti μ e l_r.

Il problema diretto con un esempio

Una molla elicoidale ha una lunghezza a riposo di 200 mm e un coefficiente di allungamento di 5 mm/N (50 mm di allungamento per una sollecitazione di 10 N, corrispondenti a circa 1Kg; attenzione, si tratta di valori poco sensati fisicamente, ma comodi per la visualizzazione). Si vuole conoscere la lunghezza della molla sollecitata con una forza di 18 N:

$$l(18) = k18 + l_r = 290\,\text{mm}$$

Se la forza applicata è di 35 N, la lunghezza è

$$l(35) = k35 + l_r = 375\,\text{mm}$$

Il problema diretto con un esempio - 2

In generale, se si vuole predire la lunghezza della molla in corrispondenza di *m* valori della forza, si può ripetere il calcolo altrettante volte

$$l_i = \mu F_i + l_r \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Che equivale

$$\begin{aligned} l_1 &= \mu F_1 + l_r \\ l_2 &= \mu F_2 + l_r \\ &\vdots \\ l_m &= \mu F_m + l_r \end{aligned} \qquad (3)$$

Valori della forza applicata (N)
12
22
36
48
61
77

Formulazione matriciale del problema diretto

Il sistema di equazioni (3) può essere espresso nel formalismo delle matrici $$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & 1 \\ F_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ F_m & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu \\ l_r \end{pmatrix} \qquad (4)$$ L'esecuzione degli m calcoli (3) equivale a $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$	(3) $$\begin{aligned} l_1 &= \mu F_1 + l_r \\ l_2 &= \mu F_2 + l_r \\ &\vdots \\ l_m &= \mu F_m + l_r \end{aligned}$$

Se si vuole conoscere il comportamento della molla, in corrispondenza di certi valori di F_i, si costruiscono la matrice **A** e il vettore **X** e si calcola il loro prodotto. Nel vettore **Y** così trovato si leggono i valori l_i cercati.

Formulazione matriciale del problema diretto - 2

```
A =
    12      1
    22      1
    36      1
    48      1
    61      1
    77      1

X =

     5
   200
```

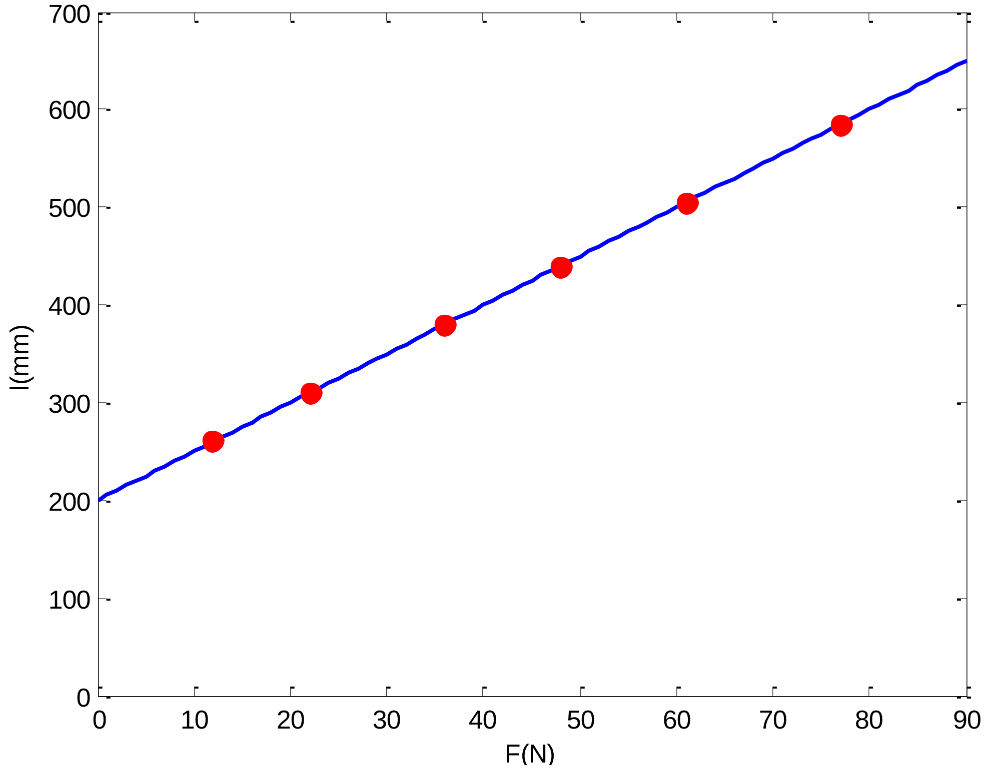
```
Y =

   260
   310
   380
   440
   505
   585
```

Output del codice Matlab che effettua il calcolo e restituisce nel vettore Y le elongazioni

`[retta_interpolante_1.m]`

Formulazione matriciale del problema diretto - 3

I punti (F_i, l_i), appartengono esattamente a una retta.



[retta_interpolante_1.m]

Formulazione matriciale del problema diretto - 4

Il vettore **Y** contiene le elongazioni stimate; **X** contiene i parametri del sistema. La matrice **A** è detta **matrice disegno** o del **modello deterministico** e indica quale tipo di *esperimento* è stato compiuto, da intendersi in questo caso come numero ed entità delle forze applicate.	$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & 1 \\ F_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ F_m & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu \\ l_r \end{pmatrix} \qquad (4)$$

1 - Il problema inverso per la molla

Il problema inverso

Consideriamo una molla di cui non si conoscono i parametri. Si decide di *misura-re* alcune coppie

$$\left(F_i, l_i\right) \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{5}$$

e si cerca di stimare le proprietà del fenomeno a partire dal suo comportamento. In termini pratici di tratta di applicare un insieme di forze, tipicamente mediante pesi calibrati, e di misurare la lunghezza. Successivamente bisogna calcolare la retta passante per i punti.

Il vettore delle osservazioni

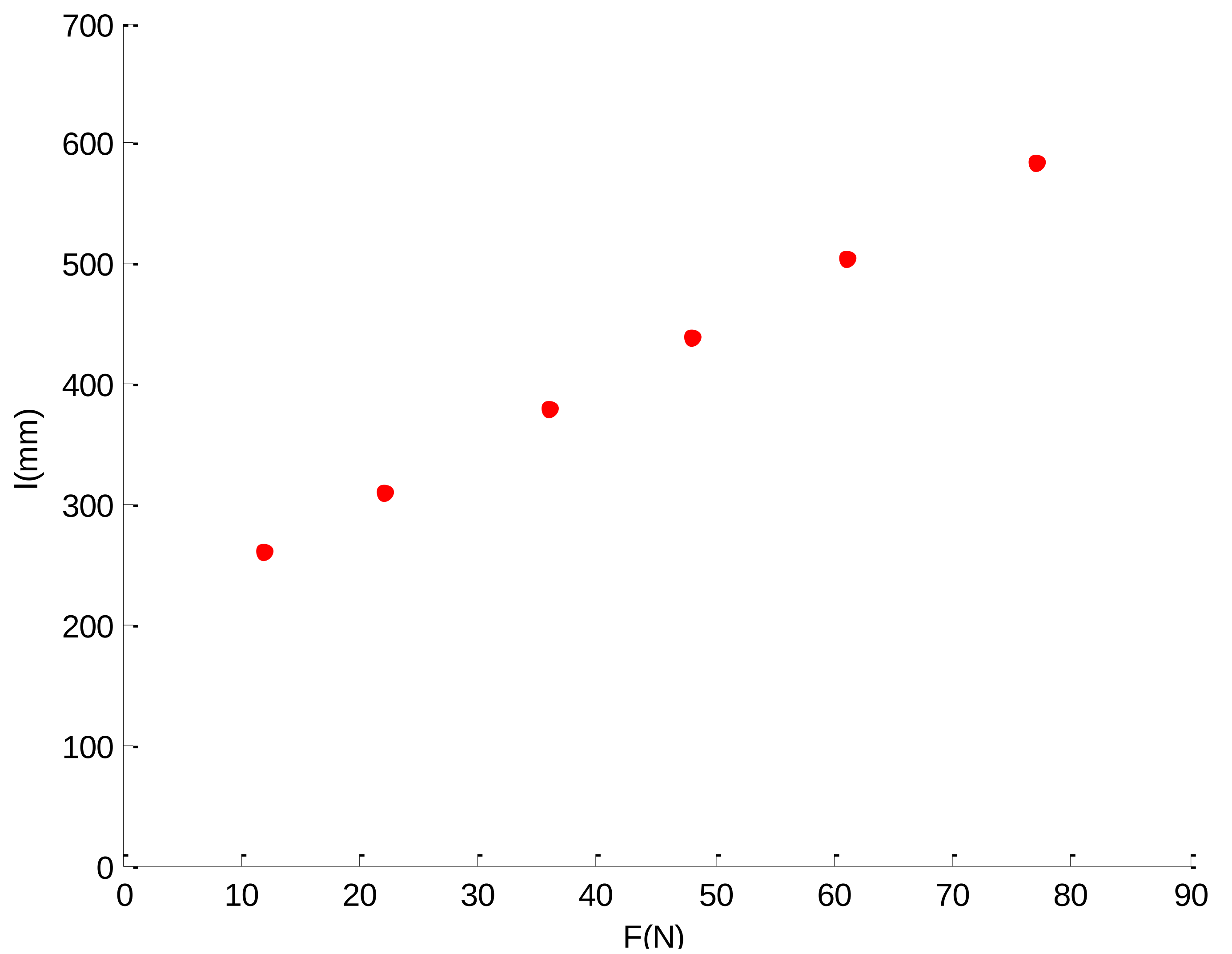
Nel problema inverso, il vettore **Y** non rappresenta ciò che deve essere calcolato, ma ciò che si conosce in forza di misure. Si indica $\mathbf{Y}_0$ per sottolineare che esso contiene m ben precise misure

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0m} \end{pmatrix}$$

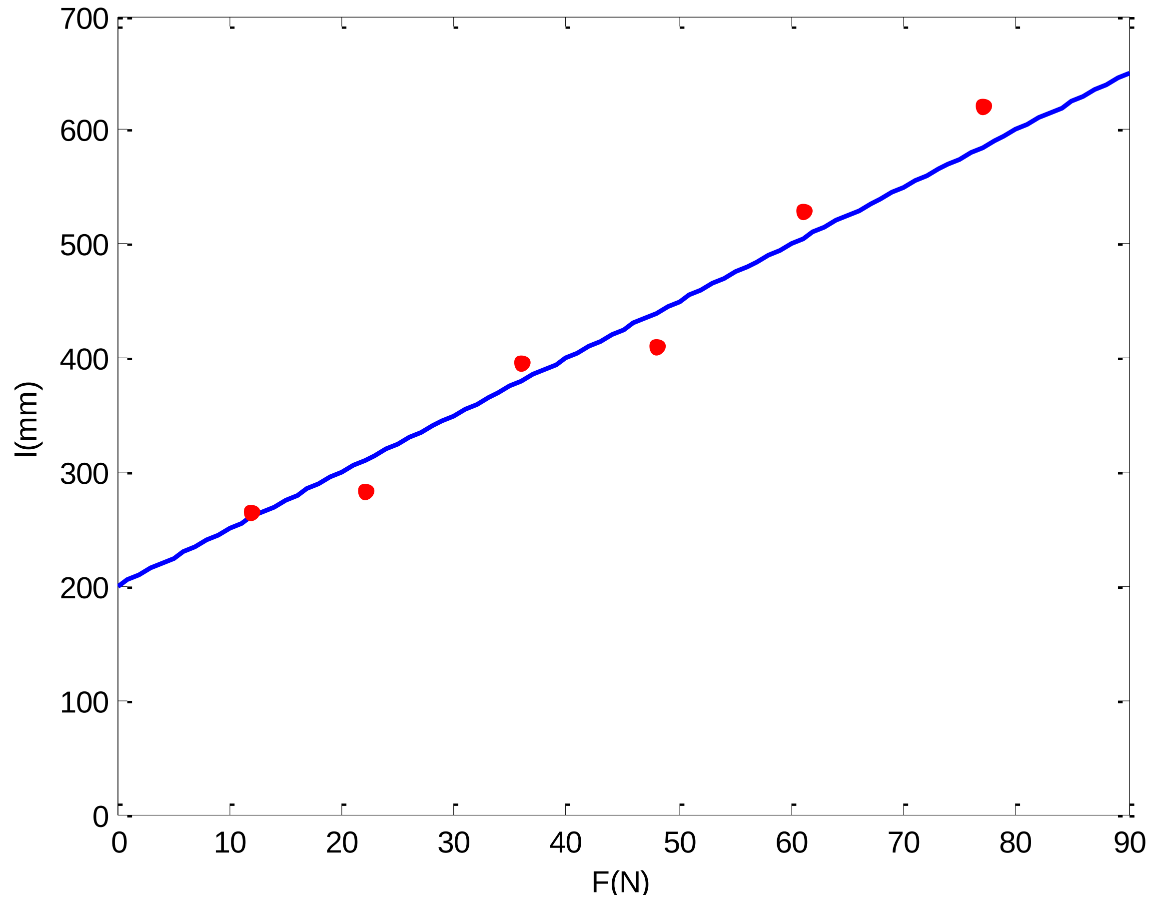
$\mathbf{Y}_0$ è detto in generale **vettore delle osservazioni**.

I punti misurati in assenza di errori accidentali

In un mondo perfetto, in assenza di errori di misura, gli *m* punti sono esattamente su una linea. L'equazione delle retta può essere determinata con i metodi della geometria analitica, usando due degli *m* punti disponibili.



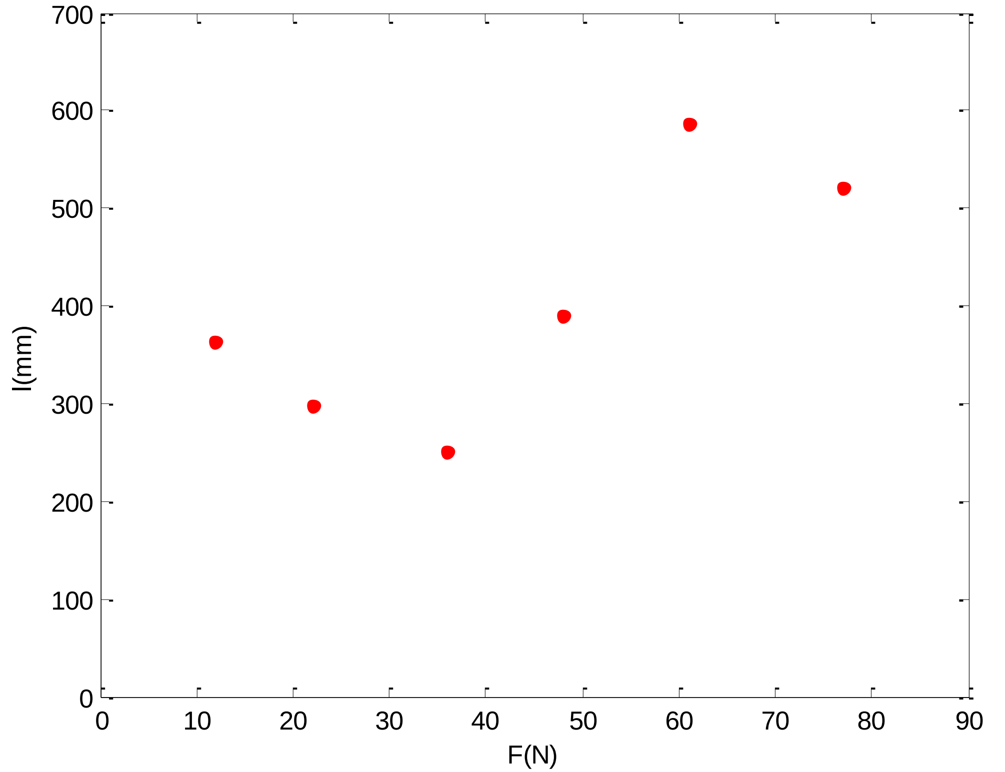
I punti misurati in presenza di errori accidentali

Nel mondo reale le misure di lunghezza della molla contengono errori accidentali e la loro rappresentazione è del tipo Non esiste una retta che passa per gli *m* punti. Blu: la retta vera, che conosciamo solo perché i dati sono simulati; nei problemi reali non è nota Rosso: i punti misurati	 [retta_interpolante_3.m]

I punti misurati in presenza di errori accidentali -2

Possiamo scegliere due degli *m* punti e usare la geometria analitica? Si tratta di una spreco di informazione, che può condurre a risultati di bassa qualità.

Vogliamo usare tutta l'informazione contenuta degli *m* punti.



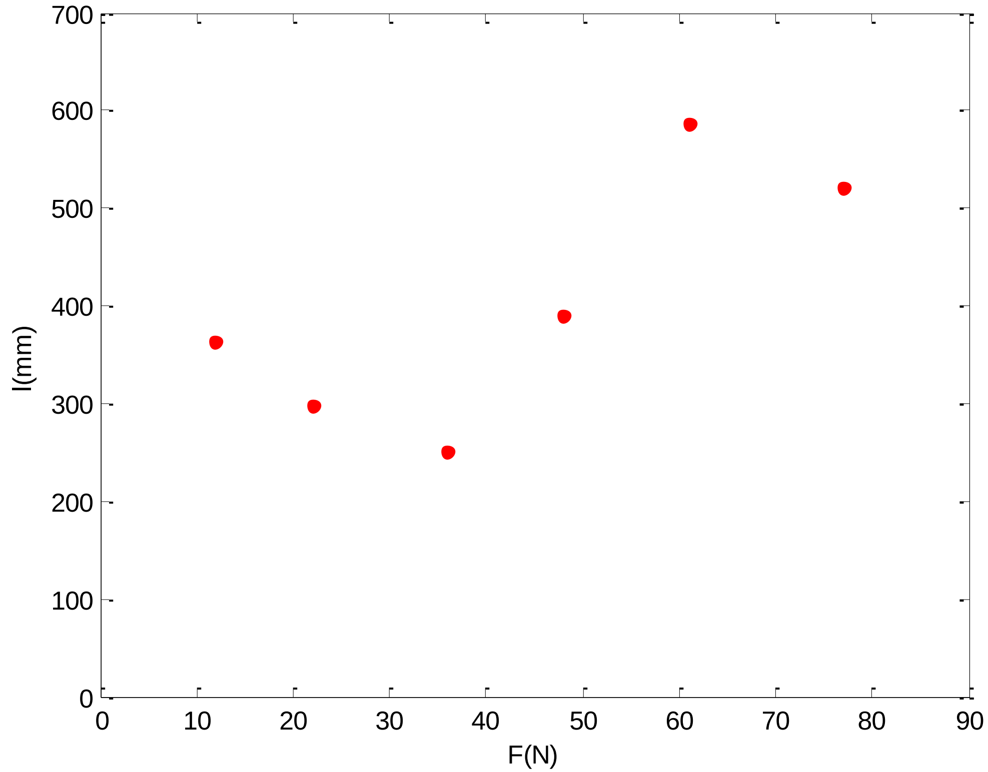
[retta_interpolante_3.m]

I punti misurati in presenza di errori accidentali -3

L'esempio mostrato contiene errori accidentali davvero grandi, per scopi didattici.

Si può notare che se si scegliessero i primi due punti per calcolare la retta interpolante con i metodi della geometria analitica, tale retta avrebbe addirittura pendenza: vengono applicate forze traenti e la molla si accorcia...

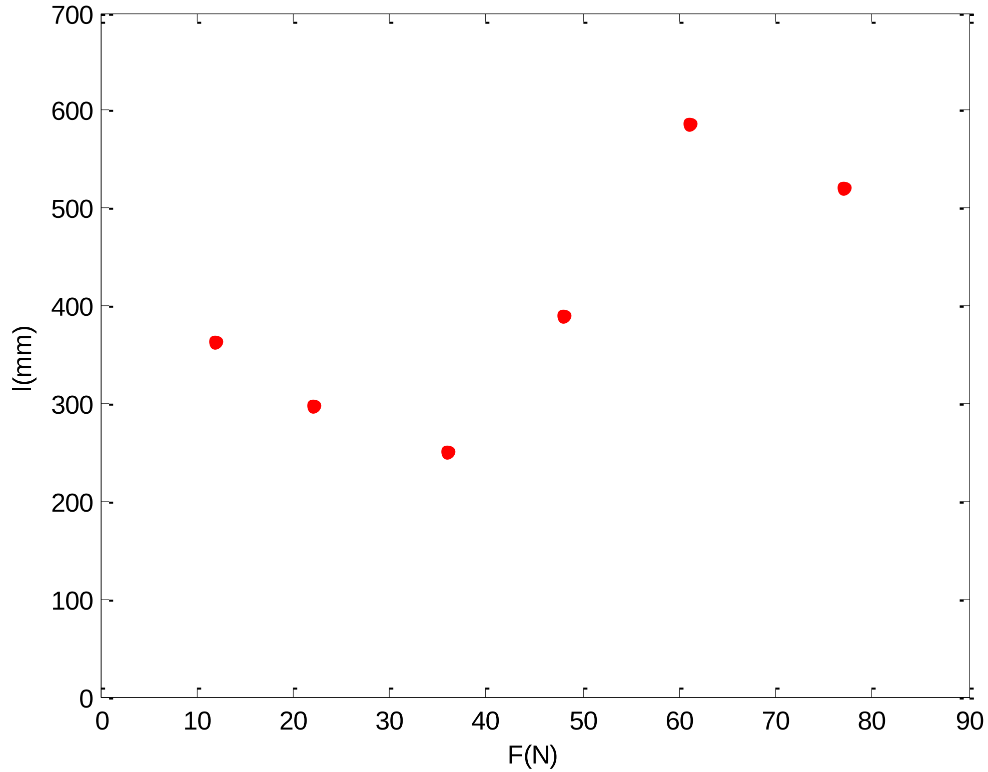
Si dimostrerà in seguito che la retta interpolante generalizzata, usando tutta l'informazione e non solo due punti, produce risultati migliori.



[retta_interpolante_3.m]

Interpretazione geometrica del problema inverso

Interpretazione geometrica. Dati gli m punti misurati $\left(F_i, l_i\right)$, bisogna calcolare la retta che passa per essi (retta interpolante). Ma i punti misurati, pur rappresentando un fenomeno lineare, a causa degli errori con cui la grandezza l viene misurata, non sono allineati in senso geometrico. Dunque non esiste, in senso geometrico classico, la retta passante per i punti.



[retta_interpolante_3.m]

Interpretazione algebrica del problema inverso

Per ognuno dei punti misurati si può scrivere un'equazione

$$l_{0i} = \mu F_i + l_r$$

Gli m punti corrispondono al sistema

$$\begin{aligned} l_{01} &= \mu F_1 + l_r \\ l_{02} &= \mu F_2 + l_r \\ &\vdots \\ l_{0m} &= \mu F_m + l_r \end{aligned}$$

Risolvere il problema inverso significa risolvere il sistema di equazioni rispetto a (μ, l_r).

Interpretazione algebrica del problema inverso - 2

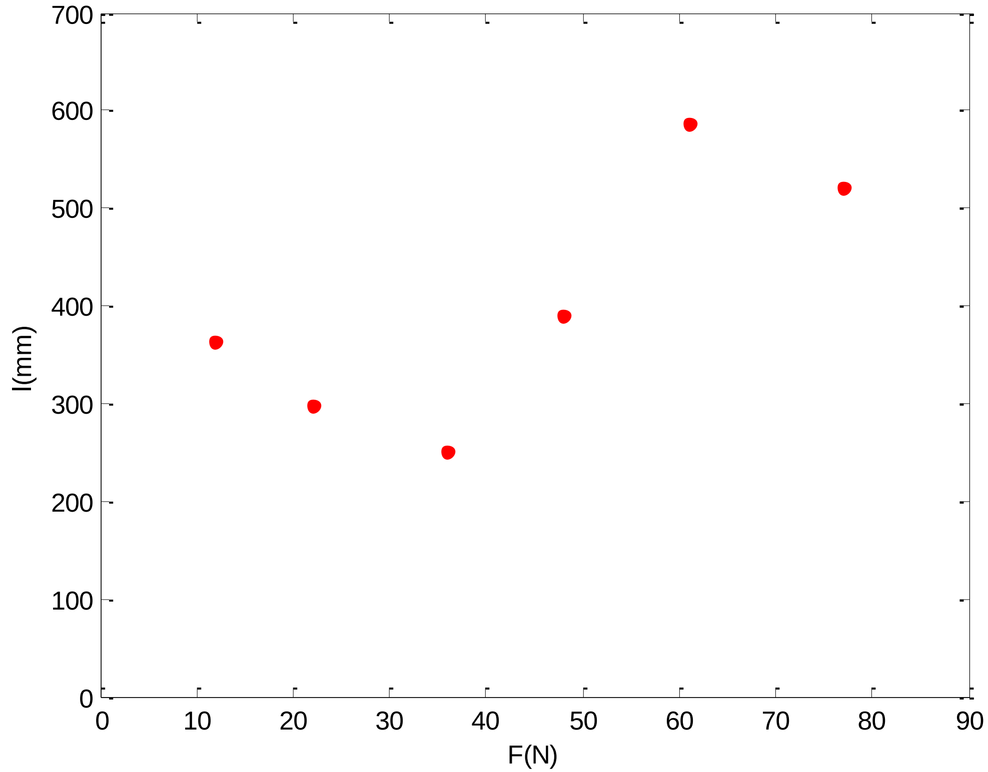
Usando il formalismo matriciale, il problema inverso equivale a risolvere il sistema $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}$ rispetto a $\mathbf{X}$.	$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ \vdots \\ l_{0m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & 1 \\ F_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ F_m & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu \\ l_r \end{pmatrix}$

L'algebra lineare insegna che non è possibile risolvere un sistema di m (>2) equazioni indipendenti in due incognite.

Idee per la soluzione generalizzata del problema inverso

Cercare la retta che, pur non passando esattamente per alcuno dei punti misurati, sia abbastanza vicina a tutti.

Bisogna definire che cosa si intenda per vicinanza della retta ai punti.



[retta_interpolante_3.m]

Vettori e rette

Vi è corrispondenza biunivoca fra i vettori $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$ e le rette del piano: la prima componente del vettore rappresenta la pendenza e la seconda il termine noto.

Formulazione del problema inverso

La matrice del modello deterministico è nota

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_1 & 1 \\ F_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ F_m & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo un insieme di lunghezze misurate, contenute nel vettore

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ \vdots \\ l_{0m} \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare, fra gli infiniti vettori $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$, quello corrispondente alla retta che meglio si adatta ai punti misurati.

La funzione del modello

La funzione del modello

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

stima le elongazioni di una molla avente i parametri $\mathbf{X}$, sottoposta alle forze contenute in $\mathbf{A}$; tali elongazioni stimate appartengono esattamente a una retta. La funzione del modello è definita

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$$

Si può considerare la differenza

o *vettore degli scarti*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{X}) &= \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{Y}_0 - \mathbf{A}\mathbf{X} \end{aligned} \qquad (6)$$

Si determina la stima delle incognite $\hat{\mathbf{X}}$ in modo che il vettore differenza o *vettore degli scarti* $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ abbia norma minima.

La soluzione generalizzata o ai MQ – 3

La norma di **U**(**X**)

$$\left\|\mathbf{v}(\mathbf{X})\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X})\right\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{Y}_{0i} - \mathbf{Y}(\mathbf{X})_i\right)^2$$

Definiamo la funzione G (goal)

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$G(\mathbf{X}) = \left\|\mathbf{v}(\mathbf{X})\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X})\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{Y}_{0i} - \mathbf{Y}(\mathbf{X})_i\right)^2$$

La soluzione generalizzata o ai MQ – 4

Definizione della soluzione MQ

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}} &= \min_{\mathbf{X}} G(\mathbf{X}) = \\
&= \min_{\mathbf{X}} \left\| \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X}) \right\|^2 = \\
&= \min_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{Y}_{0i} - \mathbf{Y}(\mathbf{X})_i \right)^2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

La soluzione generalizzata o ai MQ - 5

Le seconda delle **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** evidenzia come si tratti di minimizzare la somma dei quadrati delle componenti di un vettore e questo spiega il nome attribuito a tale metodo, detto dei *minimi quadrati*.

La soluzione del problema MQ lineare

La funzione da minimizzare

$$G(\mathbf{X}) = \left\| \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(\mathbf{X}) \right\|^2$$

è una funzione di più variabili a valori reali e può essere minimizzata con le u-suali tecniche della analisi, imponendo che il gradiente si annulli nel punto di minimo (condizione che in questo caso è necessaria e sufficiente). Svolgendo i calcoli si conclude

$$\hat{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^t \, \mathbf{Y}_0$$

dove $\hat{\mathbf{X}}$ rappresenta la stima ai MQ delle incognite. Il vettore

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} \tag{8}$$

rappresenta le altezze stimate (*vere*), da confrontare con quelle misurate.

La soluzione del problema MQ lineare - 2

Il vettore degli scarti

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}$$

rappresenta un primo importante elemento per valutare l'adattamento del modello ai dati.

Il più generale problema di MQ lineari

Rapporti fra le grandezze osservate **Y** e quelle incognite **X**

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

Soluzione MQ

$$\hat{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t\left(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{b}\right)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}{m-n}$$

$\hat{\sigma}_0^2$ è una stima della varianza delle osservazioni **Y**, equidi sperse

Dispersione dei parametri stimati: matrice di varianza-covarianza di $\hat{\mathbf{X}}$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}$$

Valutazione dei risultati

Il vettore degli scarti

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}$$

rappresenta un primo importante elemento per valutare l'adattamento del modello ai dati.

Il parametro

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^t \hat{\mathbf{v}}}{m-n}$$

gioca un ruolo chiave nei MQ e, per i problemi in cui le osservazioni hanno la stessa dispersione, costituisce una stima della varianza delle osservazioni **Y**, equidi sperse

Valutazione dei risultati - 2

Infine il metodo dei MQ consente anche di stimare la dispersione dei parametri stimati. Dispersione dei parametri stimati: matrice di varianza-covarianza di $\hat{\mathbf{X}}$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \left(\mathbf{A}^t \mathbf{A} \right)^{-1}$$

Un esempio - 1

Esempio di dati fortemente dispersi, per motivi didattici, `dati_retta_1.txt`	12.00 313.30 22.00 241.18 36.00 315.87 48.00 391.43 61.00 328.34 77.00 671.30

Il vettore $\mathbf{Y}_0$	313.30 241.18 315.87 391.43 328.34 671.30

Un esempio - 2

La matrice A	$\begin{matrix} 12.00 & 1 \\ 22.00 & 1 \\ 36.00 & 1 \\ 48.00 & 1 \\ 61.00 & 1 \\ 77.00 & 1 \end{matrix}$

La matrice $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$	$\begin{matrix} 13878 & 256 \\ 256 & 6 \end{matrix}$

Un esempio - 3

La matrice $\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}$ A	0.0003 -0.0144 -0.0144 0.7827

Il vettore $\hat{\mathbf{X}}$	4.8919 168.1835

Un esempio - 4

Il vettore $\hat{\mathbf{Y}}$	226.8860 275.8047 344.2909 402.9933 466.5876 544.8575

Il vettore v degli scarti	86.4140 -34.6247 -28.4209 -11.5633 -138.2476 126.4425

Un esempio - 5

Il parametro σ_0	105.72

La matrice di varianza-covarianza	0.0358 -1.5263 -1.5263 82.7429

La sigma	0.1891 9.0963

NON LEGGERE

I MQ con pesi

Il formalismo sviluppato finora assegna alle diverse osservazioni (le diverse componenti della vc $\mathbf{Y}$) lo stesso peso, cioè le tratta come equidi sperse.

Il parametro $\hat{\sigma}_0^2$ è da interpretare come una stima della varianza delle m componenti equidi sperse del vettore delle osservazioni $\mathbf{Y}$.

Ci sono due casi in cui ciò non è possibile:

- quando le misure sono della stessa tipologia ma hanno proprietà statistiche diverse;
- quando nel calcolo ai MQ le osservazioni sono disomogenee

Esempi preliminari sulle misure dirette

Misuriamo ripetutamente la distanza topografica fra due punti, usando un unico distanziometro elettronico. Indichiamo con d_i le diverse misure fatte. La miglior stima che si può dare della distanza vera è

$$\hat{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{9}$$

dove n è il numero delle ripetizioni. La dispersione delle singole misure può essere stimata con

$$\hat{s}_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{d}\right)^2} \tag{10}$$

Nota bene. La dispersione della stima (9) è invece

$$\hat{s}_M = \frac{\hat{s}_D}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

e questo indica proprio il vantaggio delle ripetizione delle misure.

Esempi preliminari sulle misure dirette – 2

Supponiamo ora che n_1 misure d_i^A vengano acquisite con un distanziometro avente una certa precisione e altre n_2 *della stessa distanza* d_i^B siano acquisite con un secondo distanziometro avente una diversa qualità. *Ipotizziamo che i due strumenti siano rettificati*.

Come usare tutte le misure per stimare il valore vero? E' giusto calcolare la media empirica con la (9)? Evidentemente no perché ciò equivarrebbe ad attribuire alla diverse misure lo stesso peso, che è sbagliato.

La media ponderata

Vengono effettuate n misure di una stessa grandezza, con altrettanti strumenti, aventi in generale dispersioni diverse.

Si può schematizzare il processo dicendo che le varie misure x_i sono estratte da altrettante vc aventi la stessa media e dispersioni diverse

$$x_i \in \mathrm{X}\left[\mu, \sigma_i\right]$$

Come determinare la stima della media vera? Con la formula della media pesata: indicati con w_i i pesi

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Si ha

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

La media ponderata - 2

Per quanto riguarda la dispersione di $\hat{x}$, applicando la propagazione della varianza-covarianza si ha

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2} \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2} \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \frac{1}{w_i} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2} \sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Vedi:

http://it.wikipedia.org/wiki/Media_(statistica)#Media_ponderata_con_la_varianza

Vedi somaro: http://ishtar.df.unibo.it/stat/avan/stat/medpesnota.html#err

La media ponderata - 3

In sintesi

$$x_i \in \mathrm{X}\left[\mu, \sigma_i\right]$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

La media ponderata - 4

Nota bene. La media ponderata si riconduce al caso della media empirica semplice se le misure sono equidi sperse, cioè se

$$\sigma_i = \sigma \qquad \forall i$$

Si ha evidentemente

$$w_i = w \qquad \forall i$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w} = \frac{w \sum_{i=1}^{n} x_i}{n w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w} = \frac{1}{n w} = \frac{\sigma^2}{n}$$

La media ponderata - 5

Che succede se si conoscono, invece delle vere dispersioni, i loro rapporti

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 q_i^2 \qquad \forall i$$

Si conoscono solo i q_i e si definiscono i pesi

$$w_i' = \frac{1}{q_i^2} = \sigma_0^2 w_i$$

Dove la seconda dice il rapporto dei pesi con quelli veri. Calcoliamo la media ponderata con i w_i'

$$\hat{\mu}' = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i' x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i'} = \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \mu$$

La media ponderata è invariante per riscalamento delle varianze.

La media ponderata - 6

$$\hat{\sigma}'^2_{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w'_i} = \frac{1}{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sigma^2_{\hat{\mu}}}{\sigma_0^2}$$

Il calcolo della dispersione delle media empirica viene scalato di un fattore $1/\sigma_0^2$

.

Se, invece delle vere varianze, si conoscono semplicemente i loro rapporti, il calcolo delle media empirica non viene influenzato.

Il calcolo della sua dispersione invece sì.

Esempi di MQ con pesi: misure dello stesso tipo ma con proprietà statistiche diverse

Una rete di livellazione misurata con diversi strumenti aventi precisione diverse. Nel problema ai MQ si inserisce lo stesso tipo di osservazione, il dislivello, ma bisogna attribuire correttamente i pesi.

Nel calcolo di una rete GPS statica, le osservazioni sono le basi, ma a ciascuna deve essere attribuito il peso derivante dalla matrice di varianza-covarianza ottenuta durante il calcolo della base stessa.

NON LEGGERE

Formulazione matriciale del problema diretto

In corrispondenza dei valori $x_1, x_2, \dots, x_m$ il fenomeno

Errore. L'origine riferimento non è stata trovata. assumerà i valori

$$y_i = px_i + q \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{12}$$

che equivale a dire

$$\begin{aligned} y_1 &= px_1 + q \\ y_2 &= px_2 + q \\ &\vdots \\ y_m &= px_m + q \end{aligned} \tag{13}$$

TODO

Visualizzare scarti

Accompagnare esempio retta con esempio numerico