



## Vittorio Casella

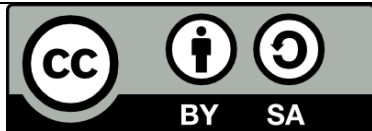
Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

email: [vittorio.casella@unipv.it](mailto:vittorio.casella@unipv.it)



# Variabili casuali a $n$ componenti: calcolo delle probabilità

# License/Licenza



This document is © 2013 **Vittorio Casella, University of Pavia, vittorio.casella@unipt.it**, available under the **creative commons 3.0 license**.

You are free:

to Share — to copy, distribute and transmit the work

to Remix — to adapt the work

to make commercial use of the work.

Under the following conditions:

**Attribution** — You must attribute the work in the manner specified by the author (see the red text above) or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).

**Share Alike** — If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

See <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> for details.



Questo documento è ©2013 **Vittorio Casella, Università di Pavia, vittorio.casella@unipv.it**, disponibile sotto la **licenza creative commons 3.0**.

Tu sei libero:

di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera

di modificare quest'opera

di usare quest'opera per fini commerciali

Alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore (vedo testo in rosso sopra) o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

**Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Per dettagli: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.it>



## Esempi di vc n-dimensionali

---

Ci sono fenomeni aleatori che forniscono, come risultato di una estrazione, non un numero, ma un vettore:

- la determinazione con metodi topografici delle coordinate planimetriche o planoaltimetriche di un punto ha come risultato un vettore a due o tre componenti;
- la determinazione con GPS delle coordinate di un punto ha come risultato un vettore a 3 componenti;
- la compensazione di una rete (sia essa una rete di livellazione, una rete topografica classica o GPS) fornisce come risultato un vettore avente un numero anche grande di componenti.

## Funzione densità di probabilità; probabilità di un insieme

---

Consideriamo la vc  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$ . Ad essa è associata, salvo casi eccezionali, una funzione densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  si ha che

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_{\mathbf{u} \in A} d\mathbf{u} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

**Domanda.** *Non è sufficiente considerare  $\mathbf{X}$  un aggregato di  $n$  vc monodimensionali e trattare ciascuna di esse individualmente? No, perché tale approccio trascura le correlazioni fra le varie componenti.*

## Media, varianza e covarianza

---

La componente  $i$ -esima della vc  $\mathbf{X}$  ha media

$$\mu_i = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} u_i f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Le diverse componenti possono essere raccolte nel vettore  $n$ -dimensionale delle medie

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^t$$

La componente  $i$ -esima della vc  $\mathbf{X}$  ha varianza

$$\sigma_i^2 = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} (u_i - \mu_i)^2 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

La covarianza fra la componente  $i$ -esima e la  $j$ -esima è definita come

$$\sigma_{ij} = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} (u_i - \mu_i)(u_j - \mu_j) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Vale evidentemente  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  per la commutatività del prodotto.

## La matrice di varianza-covarianza

---

Varianze e covarianze si raccolgono nella matrice di varianza-covarianza.

$$\mathbf{C}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ & & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

La matrice è evidentemente simmetrica ed è quindi sufficiente considerarne una parte.

## Coefficiente di correlazione lineare

---

Il coefficiente di correlazione lineare fra la componente  $i$ -esima e la  $j$ -esima è definito come

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Si tratta di una grandezza normalizzata, che stima la correlazione fra due vc indipendentemente dall'unità di misura.

Il coefficiente di correlazione lineare  $\rho$  prende valori nell'intervallo  $[-1,1]$ ; valori prossimi a zero dicono correlazione inesistente; valori vicini a 1 in modulo dicono correlazione elevata. Valori positivi indicano una proporzionalità diretta; valori negativi indicano una proporzionalità inversa.

# La densità di probabilità normale n–dimensionale

---

La densità di probabilità monodimensionale

$$f_N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Consideriamo ora la vc  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$  a  $n$  dimensioni. Essa è distribuita come una normale se

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (2)$$

dove  $|\boldsymbol{\Sigma}|$  indica il determinante della matrice. La formula (2) è una generalizzazione della (1).



## La densità di probabilità normale n–dimensionale

---

Dimostriamo che la formula (2) è una generalizzazione della (1). Nel caso unidimensionale si ha

$$n = 1$$

$$\Sigma = [\sigma^2]$$

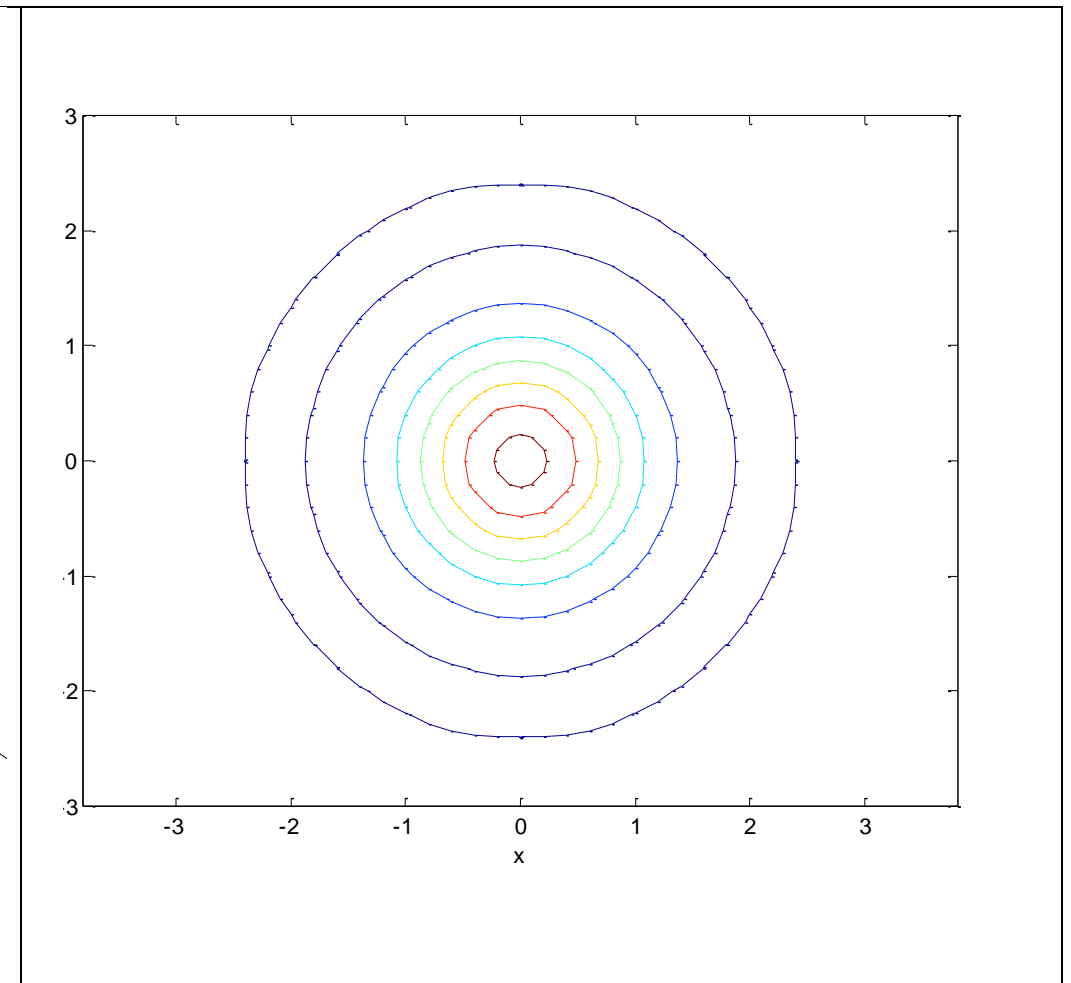
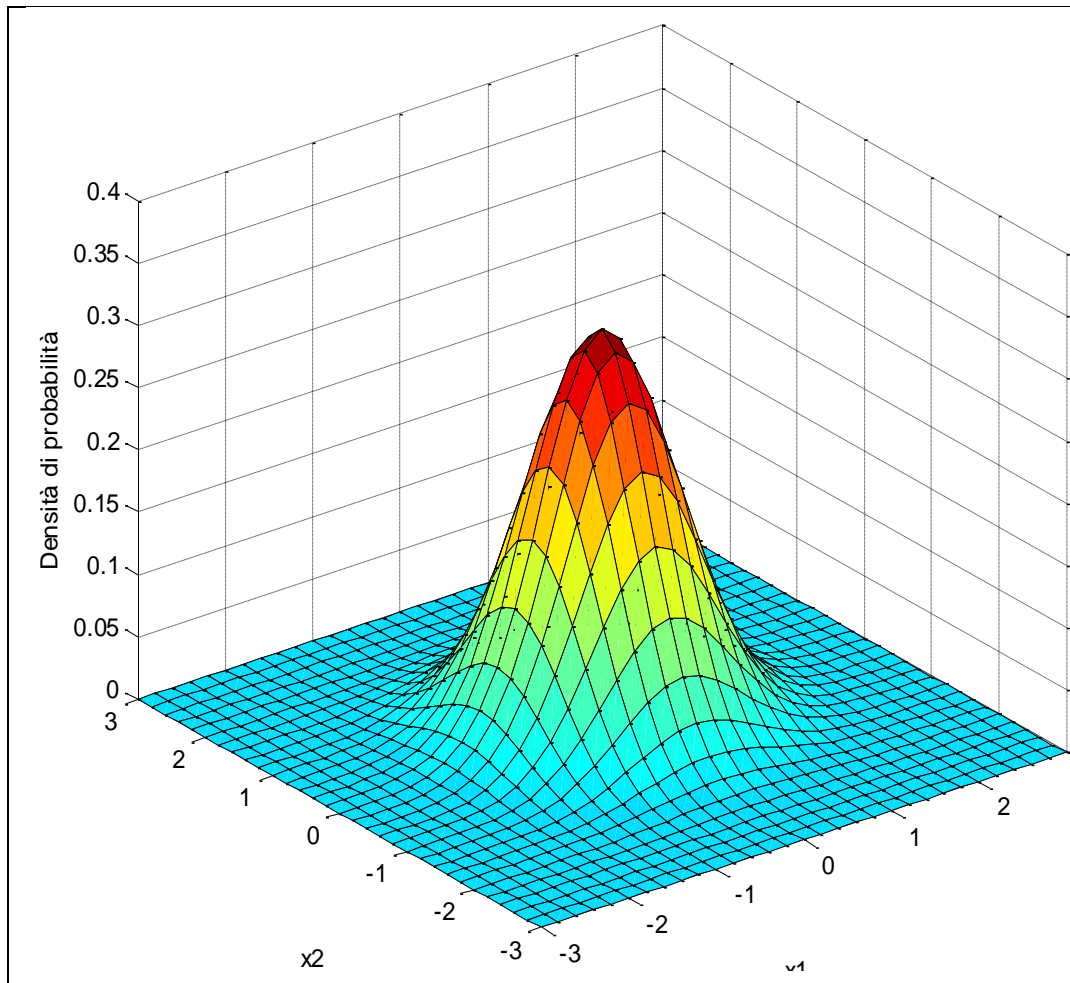
$$|\Sigma|^{1/2} = (\sigma^2)^{1/2} = \sigma$$

$$\Sigma^{-1} = \sigma^{-2}$$

$$(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu) = \sigma^{-2} (x - \mu)^t (x - \mu) = \sigma^{-2} (x - \mu)^2$$

CVD

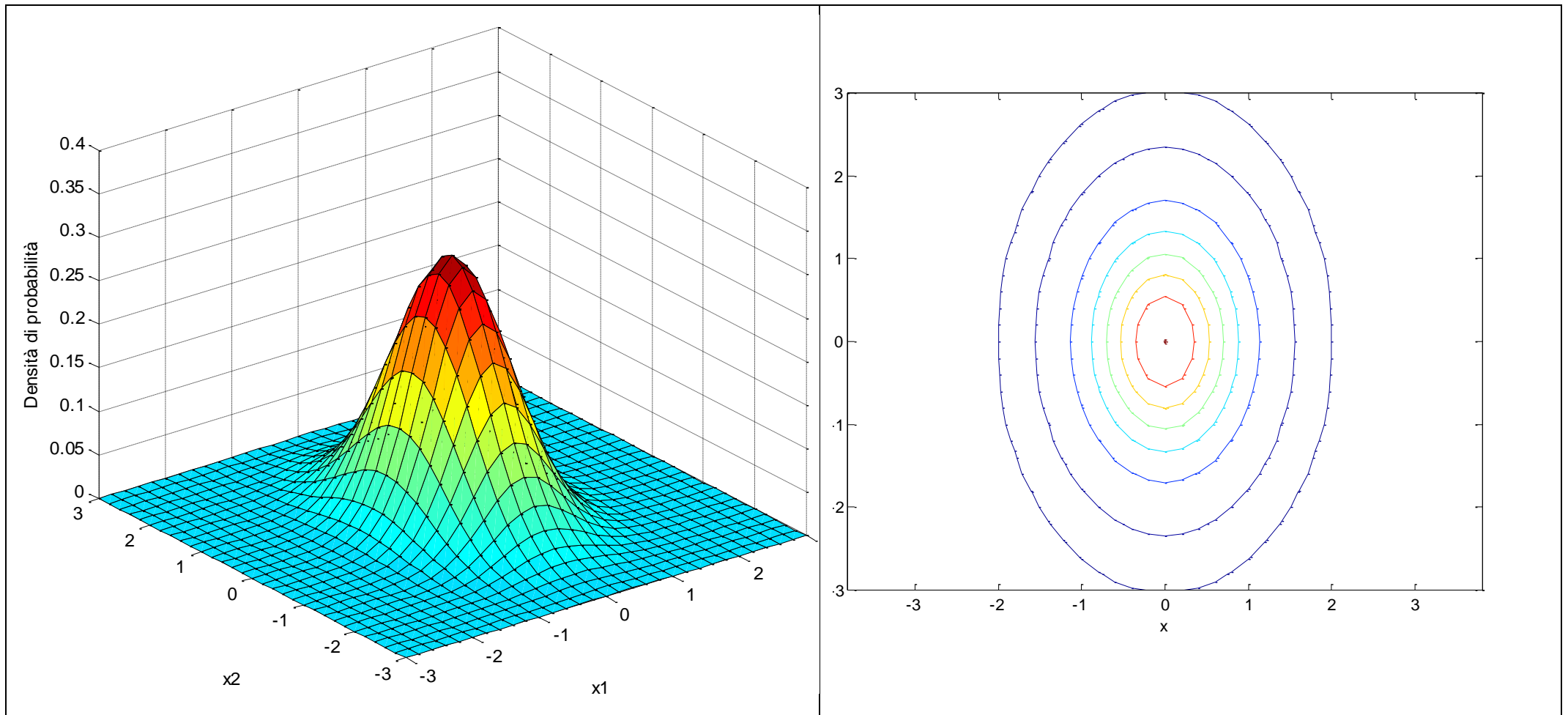
# Esempi – 1



[grafico\_normale\_2d\_2.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

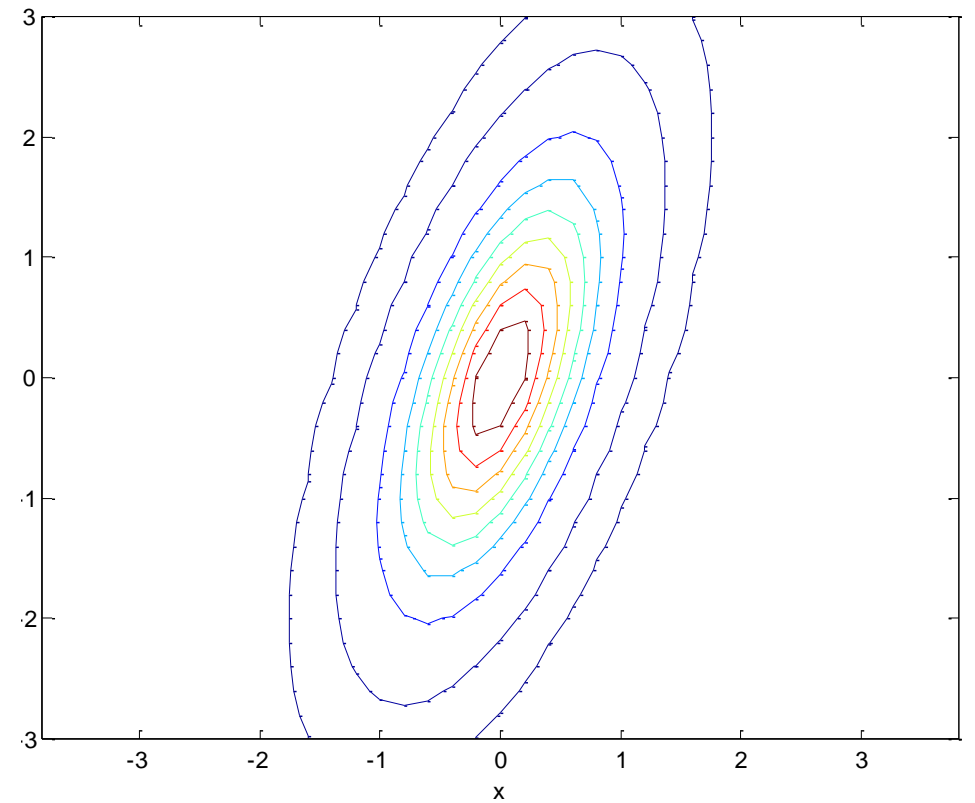
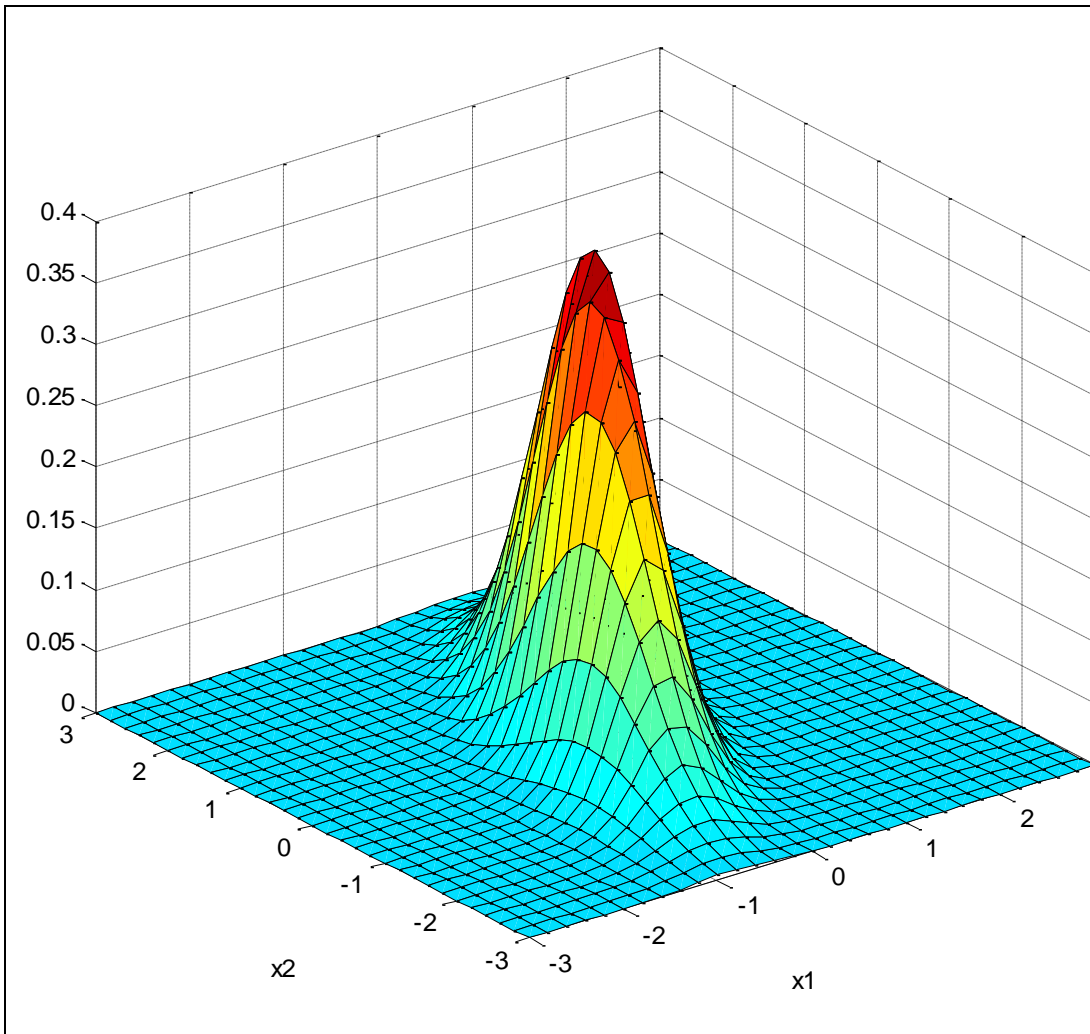
## Esempi – 2



[grafico\_normale\_2d\_3.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.80 \end{bmatrix}$$

## Esempi – 3



[grafico\_normale\_2d\_1.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.30 \\ 0.30 & 1.00 \end{bmatrix}$$