Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Variabili casuali a n componenti: calcolo delle probabilità

License/Licenza

Esempi di vc n-dimensionali

Ci sono fenomeni aleatori che forniscono, come risultato di una estrazione, non un numero, ma un vettore:

- la determinazione con metodi topografici delle coordinate planimetriche o planoaltimetriche di un punto ha come risultato un vettore a due o tre componenti;
- la determinazione con GPS delle coordinate di un punto ha come risultato un vettore a 3 componenti;
- la compensazione di una rete (sia essa una rete di livellazione, una rete topografica classica o GPS) fornisce come risultato un vettore avente un numero anche grande di componenti.

Funzione densità di probabilità; probabilità di un insieme

Consideriamo la vc $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^t$. Ad essa è associata, salvo casi eccezionali, una funzione densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ si ha che

$$P\left(\mathbf{X} \in A\right) = \int_{\mathbf{u} \in A} d\mathbf{u}\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Domanda. *Non è sufficiente considerare* **X** *un aggregato di n vc monodimensionali e trattare ciascuna di esse individualmente?* No, perché tale approccio trascura le correlazioni fra le varie componenti.

Media, varianza e covarianza

La componente *i*-esima della vc **X** ha media

$$\mu_i = \int_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} d\mathbf{u}\, u_i\ f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Le diverse componenti possono essere raccolte nel vettore *n*-dimensionale delle medie

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right)^t$$

La componente *i*-esima della vc **X** ha varianza

$$\sigma_i^2 = \int_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} d\mathbf{u}\left(u_i - \mu_i\right)^2\ f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

La covarianza fra la componente *i*-esima e la *j*-esima è definita come

$$\sigma_{ij} = \int_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} d\mathbf{u}\left(u_i - \mu_i\right)\left(u_j - \mu_j\right) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Vale evidentemente $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ per la commutatività del prodotto.

La matrice di varianza-covarianza

Varianze e covarianze si raccolgono nella matrice di varianza-covarianza.

$$\mathbf{C_{XX}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ & & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

La matrice è evidentemente simmetrica ed è quindi sufficiente considerarne una parte.

Coefficiente di correlazione lineare

Il coefficiente di correlazione lineare fra la componente *i*-esima e la *j*-esima è definito come

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \, \sigma_j}$$

Si tratta di una grandezza normalizzata, che stima la correlazione fra due vc indipendentemente dall'unità di misura.

Il coefficiente di correlazione lineare ρ prende valori nell'intervallo $[-1,1]$; valori prossimi a zero dicono correlazione inesistente; valori vicini a 1 in modulo dicono correlazione elevata. Valori positivi indicano una proporzionalità diretta; valori negativi indicano una proporzionalità inversa.

La densità di probabilità normale n–dimensionale

La densità di probabilità monodimensionale

$$f_N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

Consideriamo ora la vc $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^t$ a n dimensioni. Essa è distribuita come una normale se

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \qquad (2)$$

dove $\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|$ indica il determinante della matrice. La formula (2) è una generalizzazione della (1).

La densità di probabilità normale n–dimensionale

Dimostriamo che la formula (2) è una generalizzazione della (1). Nel caso unidimensionale si ha

$$n = 1$$

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\sigma^2 \right]$$

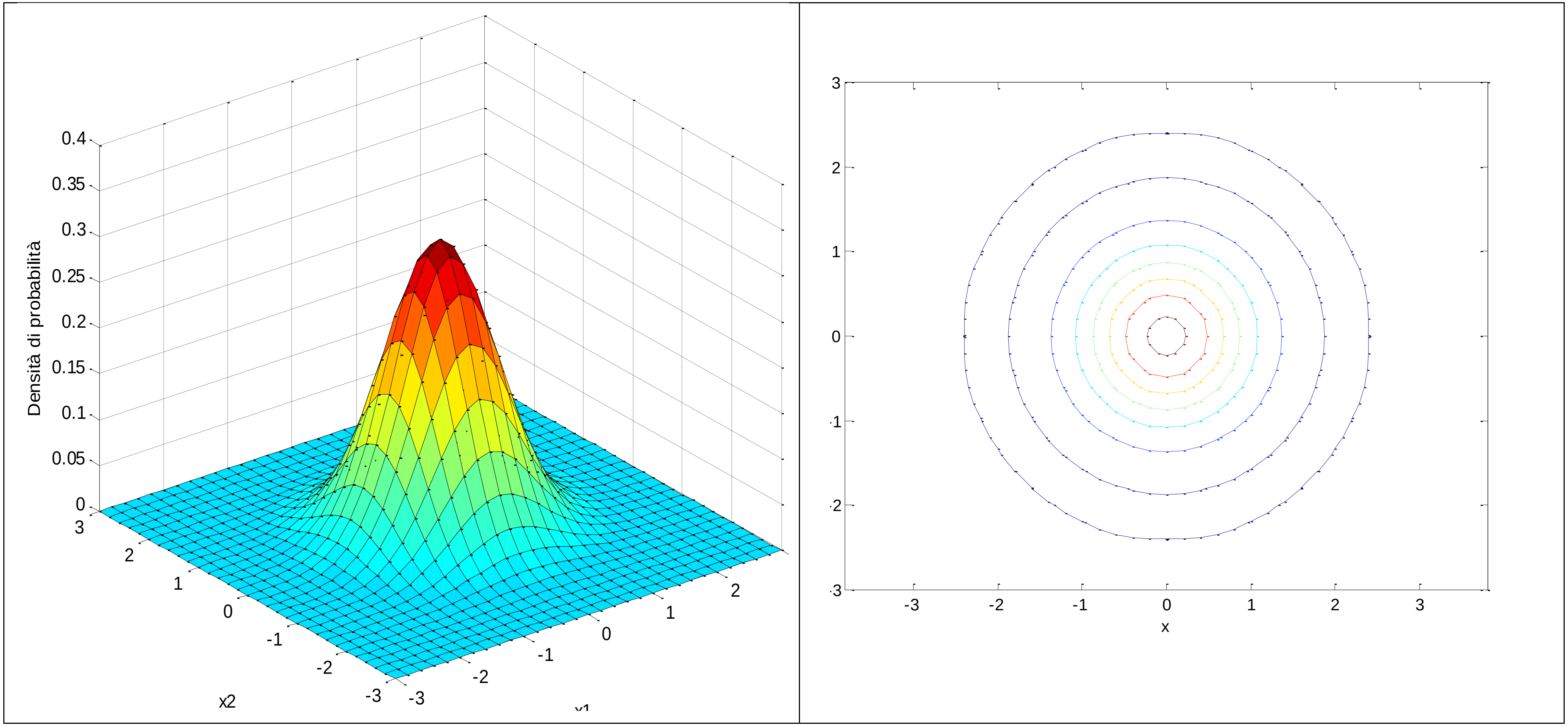
$$\left| \mathbf{\Sigma} \right|^{1/2} = \left(\sigma^2 \right)^{1/2} = \sigma$$

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \sigma^{-2}$$

$$\left(x - \mu \right)^t \Sigma^{-1} \left(x - \mu \right) = \sigma^{-2} \left(x - \mu \right)^t \left(x - \mu \right) = \sigma^{-2} \left(x - \mu \right)^2$$

CVD

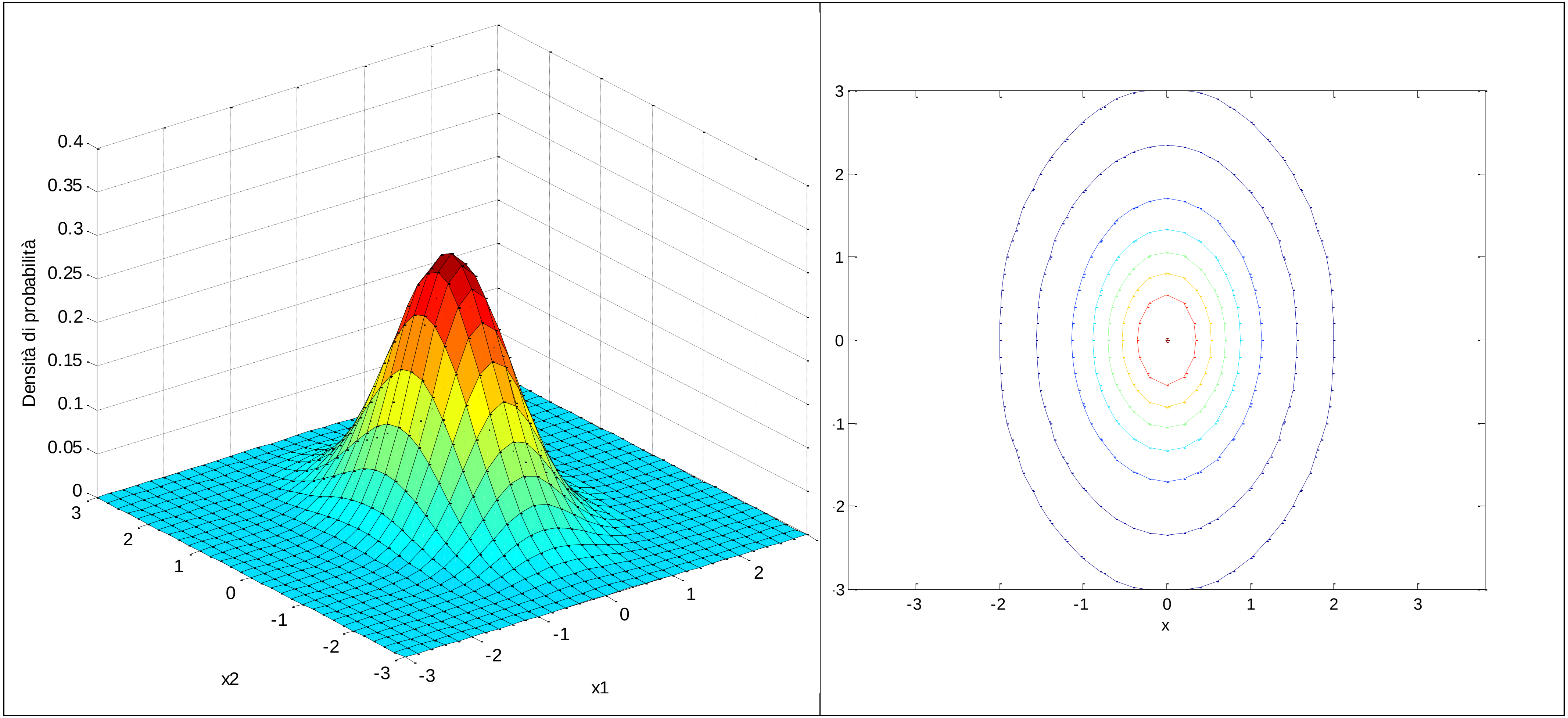
Esempi – 1



[grafico_normale_2d_2.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

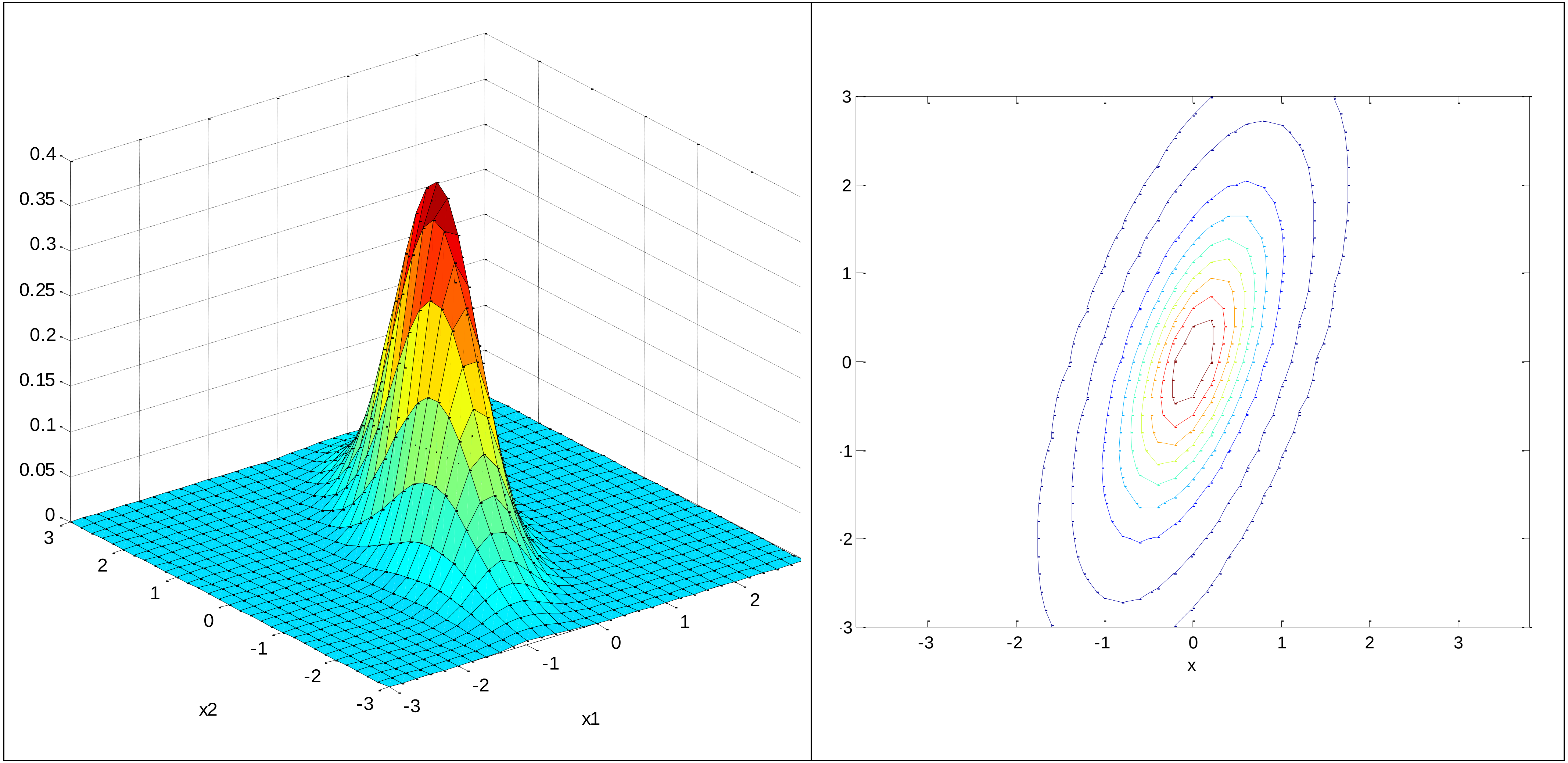
Esempi – 2



[grafico_normale_2d_3.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Esempi – 3



[grafico_normale_2d_1.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.30 \\ 0.30 & 1.00 \end{bmatrix}$$