Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR

Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Interpolazione 1D

Dispense

License/Licenza

Interpolazione 1D – 1

Sono individuabili due fasi

- dal modello all'esperimento
- dall'esperimento al modello

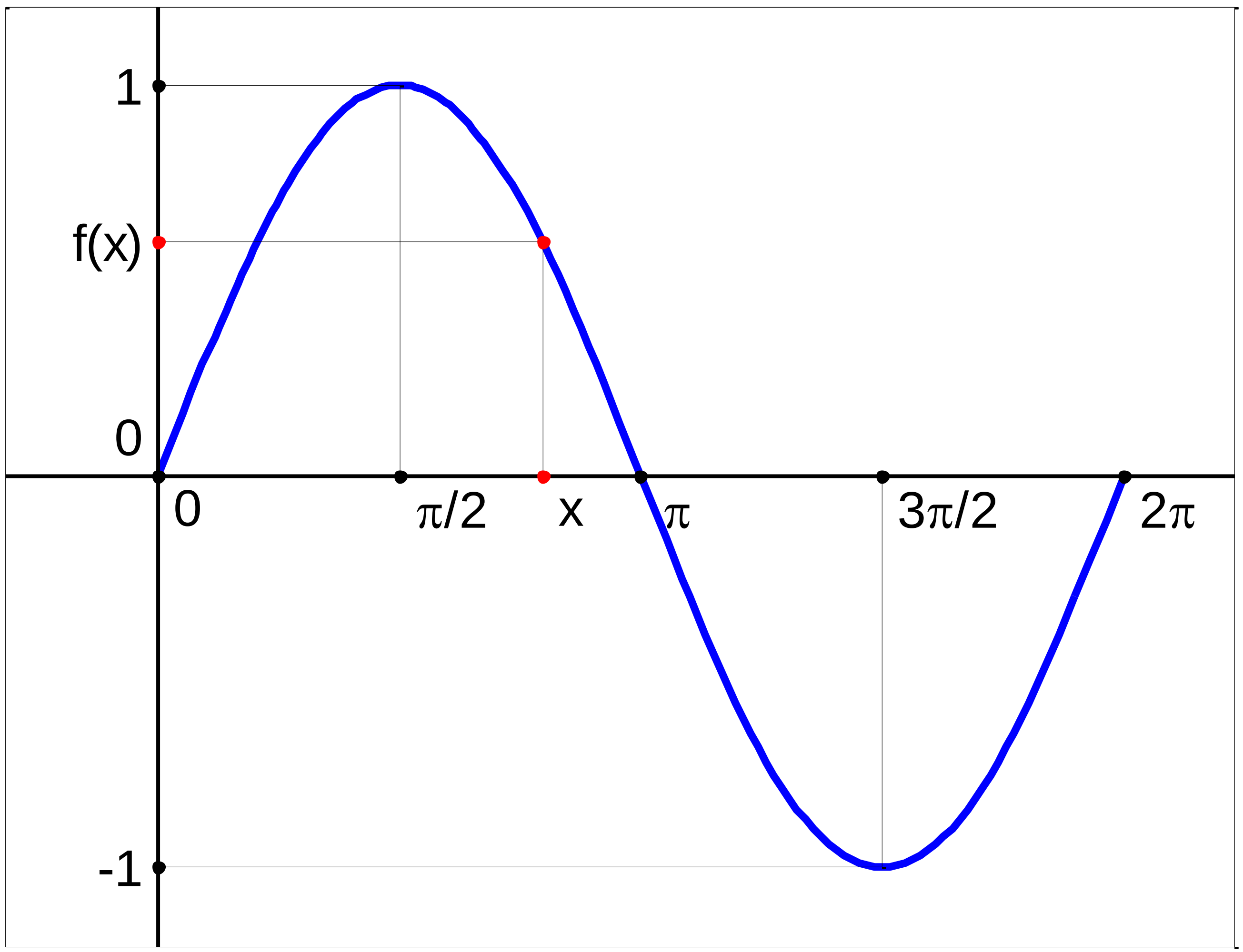
Dal modello all'esperimento

Se conosco analiticamente una funzione, ne posso prevedere il valore in ogni punto

Esempio: la funzione

$$y = \sin(x)$$

Per qualunque valore di x, conosco il valore assunto dalla funzione in quel punto



Dall'esperimento al modello

Nei casi pratici non conosco la funzione che descrive un fenomeno:

- andamento della temperatura di una persona al variare del tempo
- concentrazione di un inquinante in una certa posizione al variare del tempo
- allungamento di un cavo di acciaio al variare del carico
- massimo allungamento di una fune da bungee-jumping al variare del peso della persona appesa

Si può pensare di effettuare misure discrete (che si oppone a continue) per conoscere i vari fenomeni su un insieme finito di punti.

Tali punti sono in generale distribuiti irregolarmente, cioè non si può supporre che siano equispaziati, anche se in certi casi lo sono.

Come si può gestire la conoscenza limitata e discreta di una funzione?

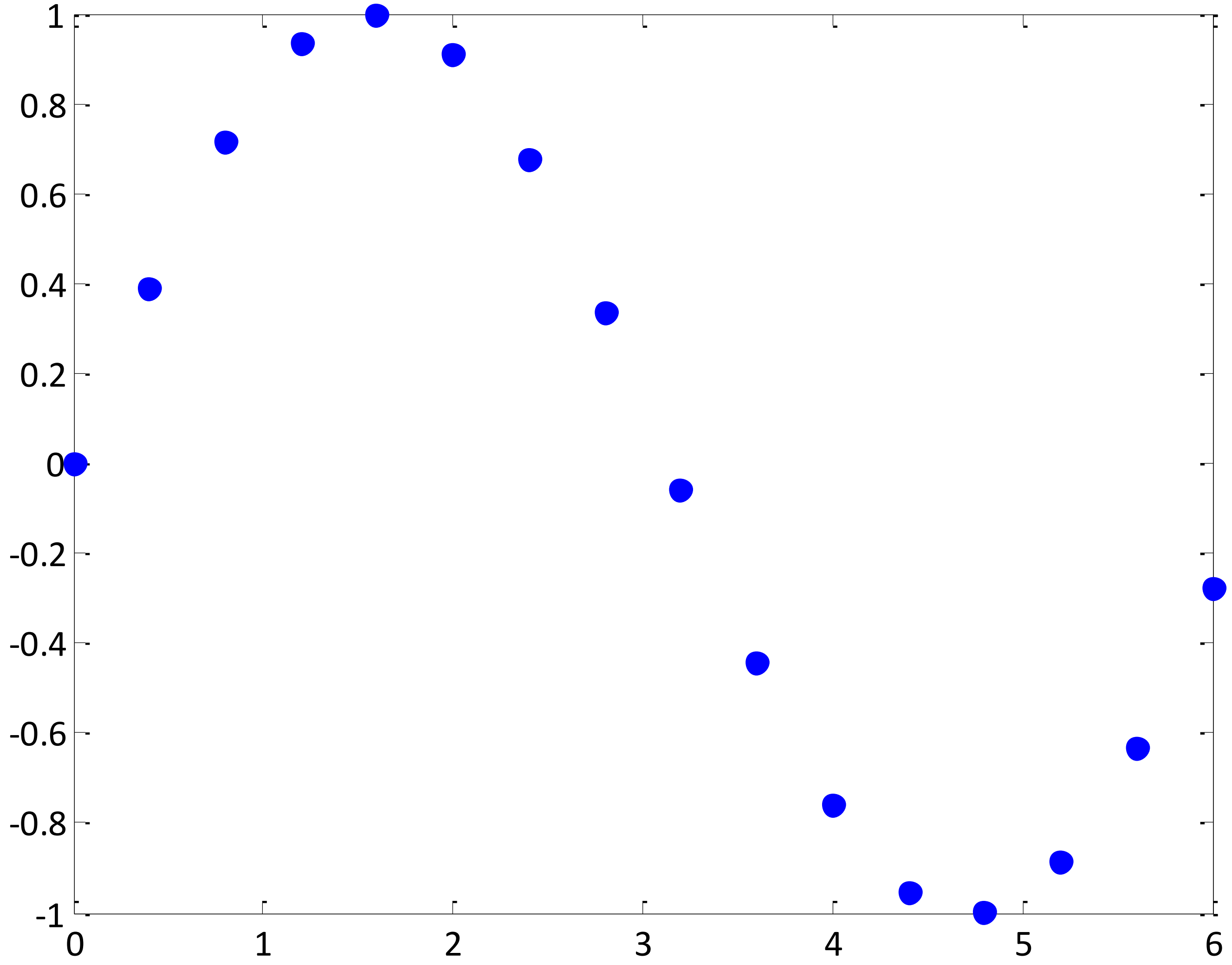
Rappresentazione discreta di una funzione - 1

Punti sui quali conosco il valore della funzione: **nodi**.

Insieme dei nodi: **supporto**. Esso può essere:

- regolare: i nodi sono distribuiti regolarmente, cioè sono equispaziati
- irregolare o sparso: i nodi non sono distribuiti regolarmente

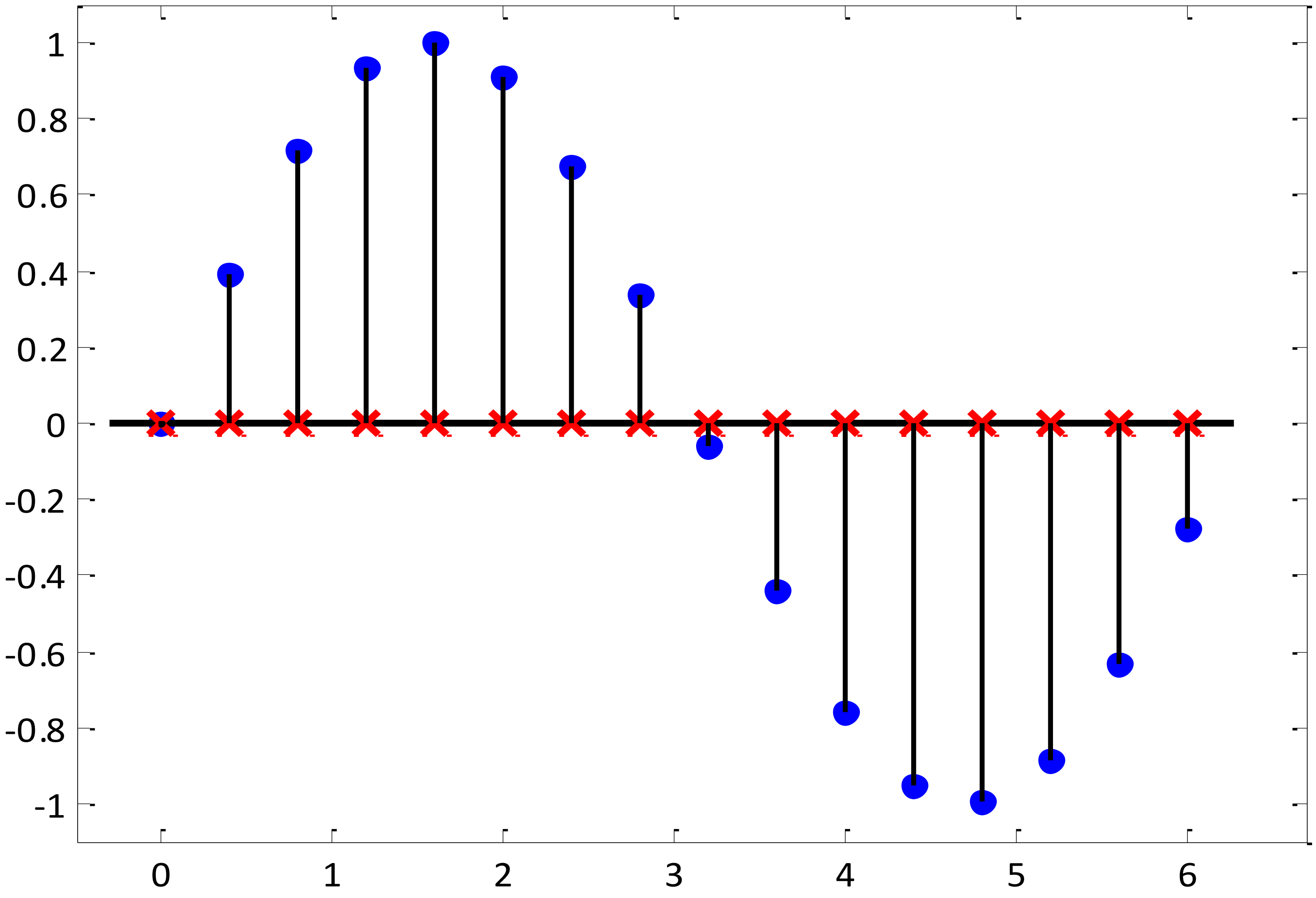
Esempio di supporto regolare – 1



`[interp_1d_100.m, emf]`

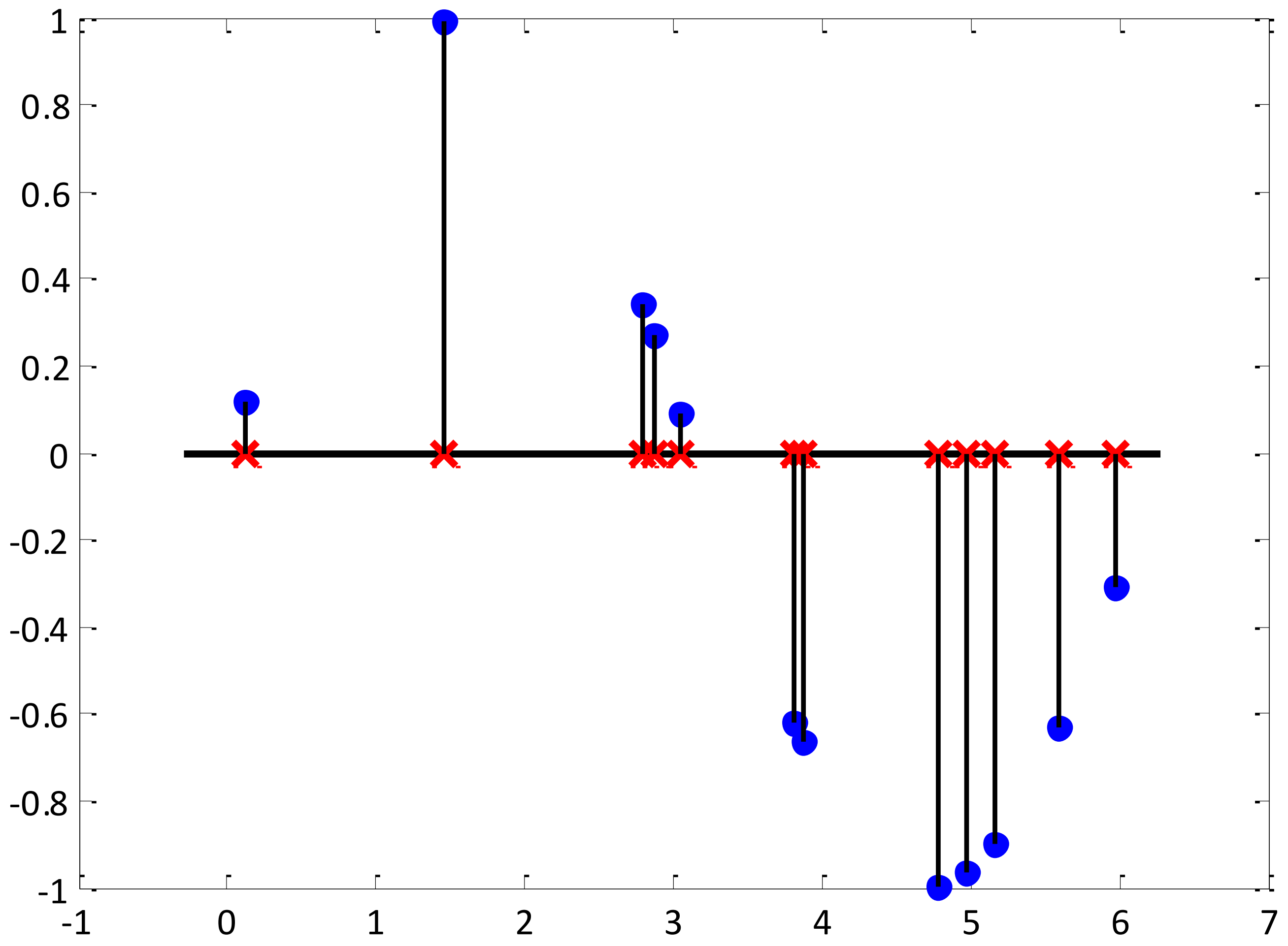
I nodi sono equispaziati

Esempio di supporto regolare – 2



[interp_1d_101.m, fig]

Esempio di supporto sparso

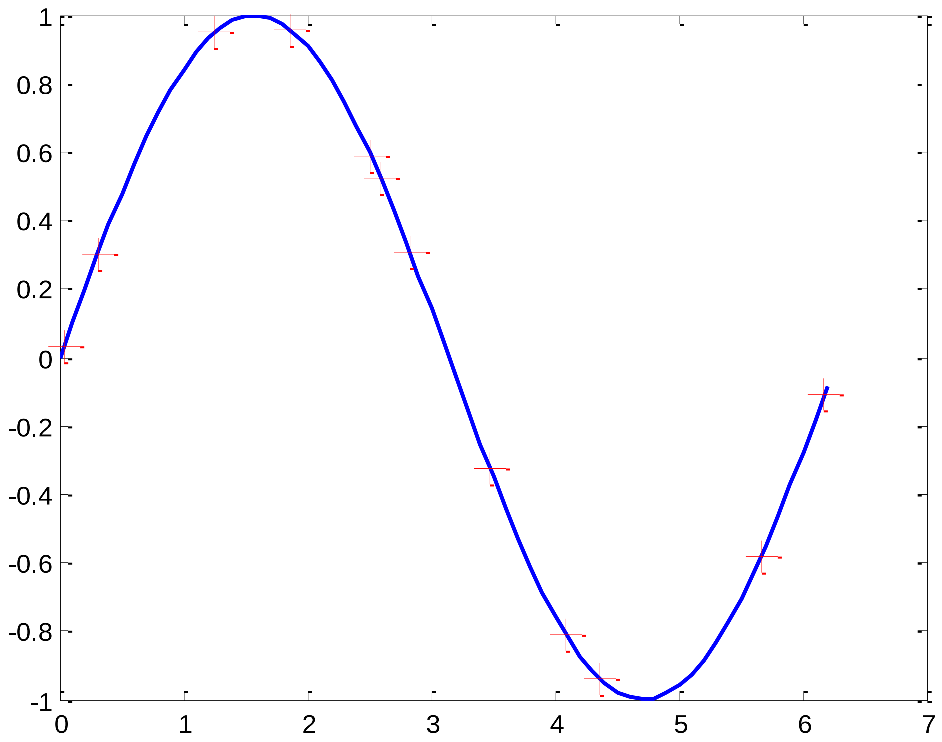


`[interp_1d_102.m, fig]`

I nodi non sono equispaziati

Rapporto fra conoscenza completa e conoscenza discreta di una funzione

Conosco il valore di una funzione solo in alcuni punti. Esempio: scelgo a caso 12 punti su cui immagino di conoscere la fz [interp_1d_1.emf]. Attenzione, di regola non conosco f



Il problema della seconda interpolazione

Sapere il comportamento della funzione sui nodi è di limitato interesse. Nel caso del bungee-jumping, mi interessa poco sapere l'elongazione a 80 e 100 Kg; io voglio sapere l'elongazione relativa al mio peso, 90 Kg.

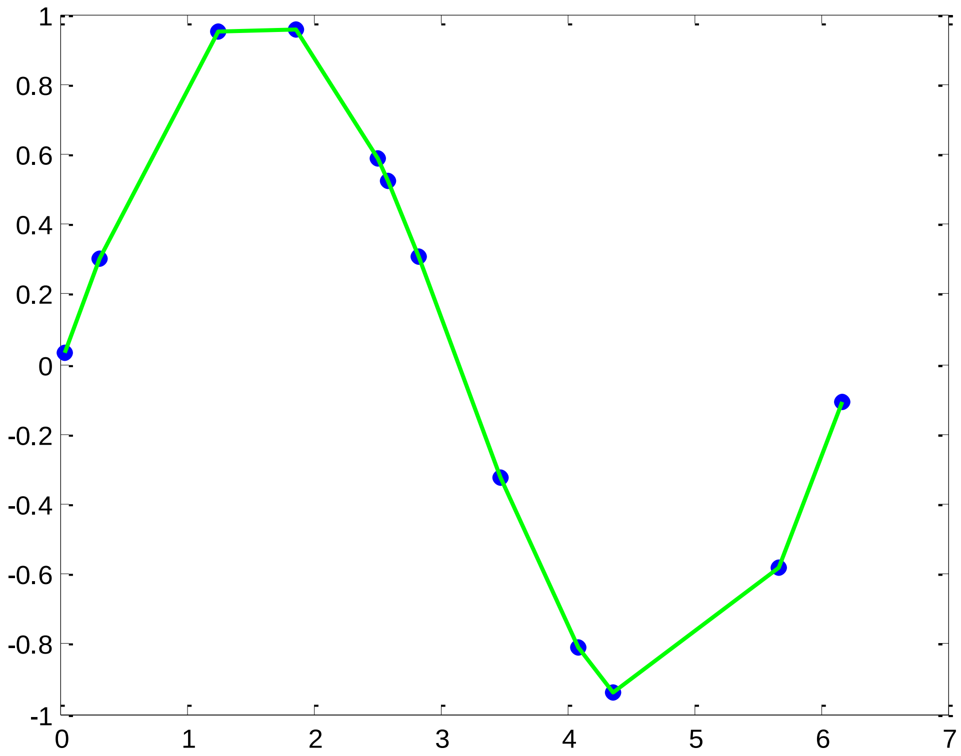
Come ricostruire l'andamento della funzione in tutti gli altri *punti*? Si tratta di interpolare: ricostruire l'andamento di una funzione su punti qualsiasi a partire dalla conoscenza della funzione sui nodi. Se i punti su cui di stima la funzione sono contenuti fra gli estremi del supporto, si parla di *interpolazione*.

Se i punti su cui di stima la funzione sono esterni al supporto, si parla di *estrapolazione*.

Perché si parla di seconda interpolazione?

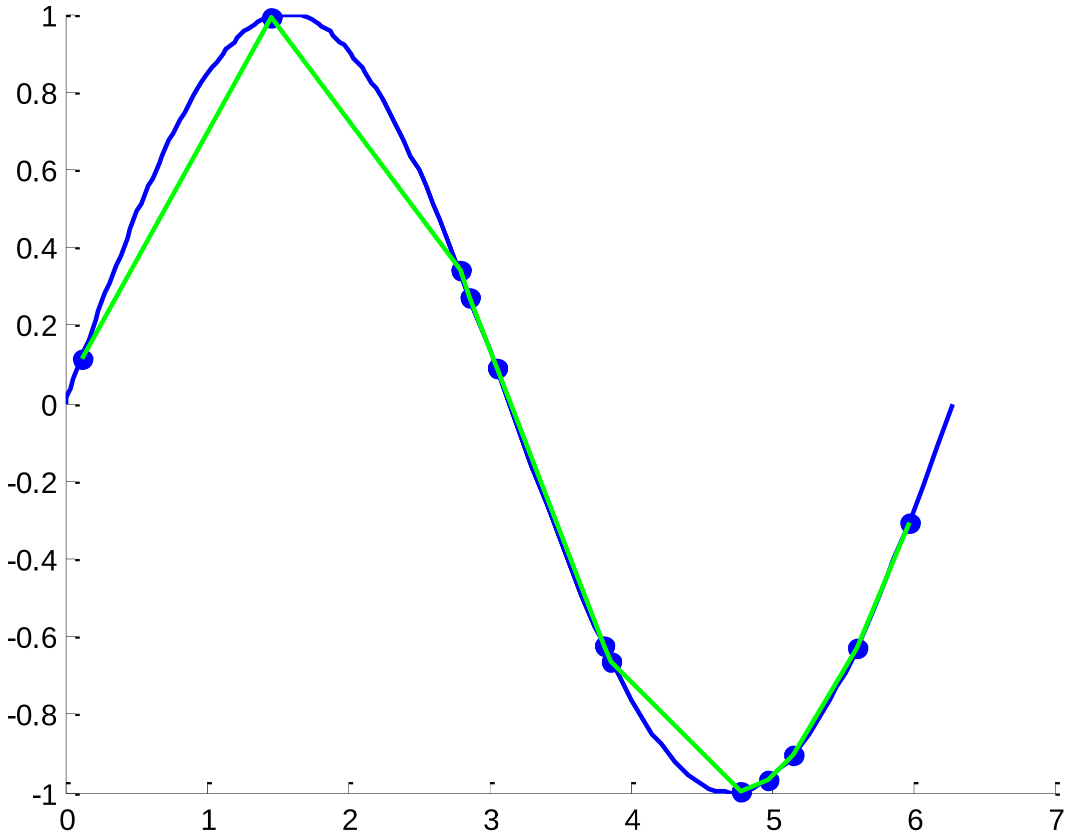
Un metodo per l'interpolazione su supporto sparso o regolare: l'interpolazione lineare

Sul piano cartesiano (O,x,y), congiungo con un segmento i nodi



[interp_1d_10.m]

Interpolazione lineare sparsa: confronto fra i valori interpolati e quelli veri



[interp_1d_10.m]

Attenzione: nella realtà non si conosce la curva vera blu!!

Altri metodi di interpolazione 1D

- lineare
- nearest neighbour
- quadratico
- cubico
- spline (molte)
- ecc

Si possono applicare pressoché indifferentemente al caso di supporto regolare e sparso.

Idea: dovendo stimare il valore di una funzione in un punto qualsiasi, si conside-rano i nodi circostanti e, con un qualche criterio, si stima la funzione.

Metodi basati sul supporto regolare: la prima interpolazione

Anche se i metodi usati per la seconda interpolazione sono sostanzialmente indifferenti al tipo di supporto, si preferisce in genere usare un supporto regolare

Esempio: la temperatura corporea

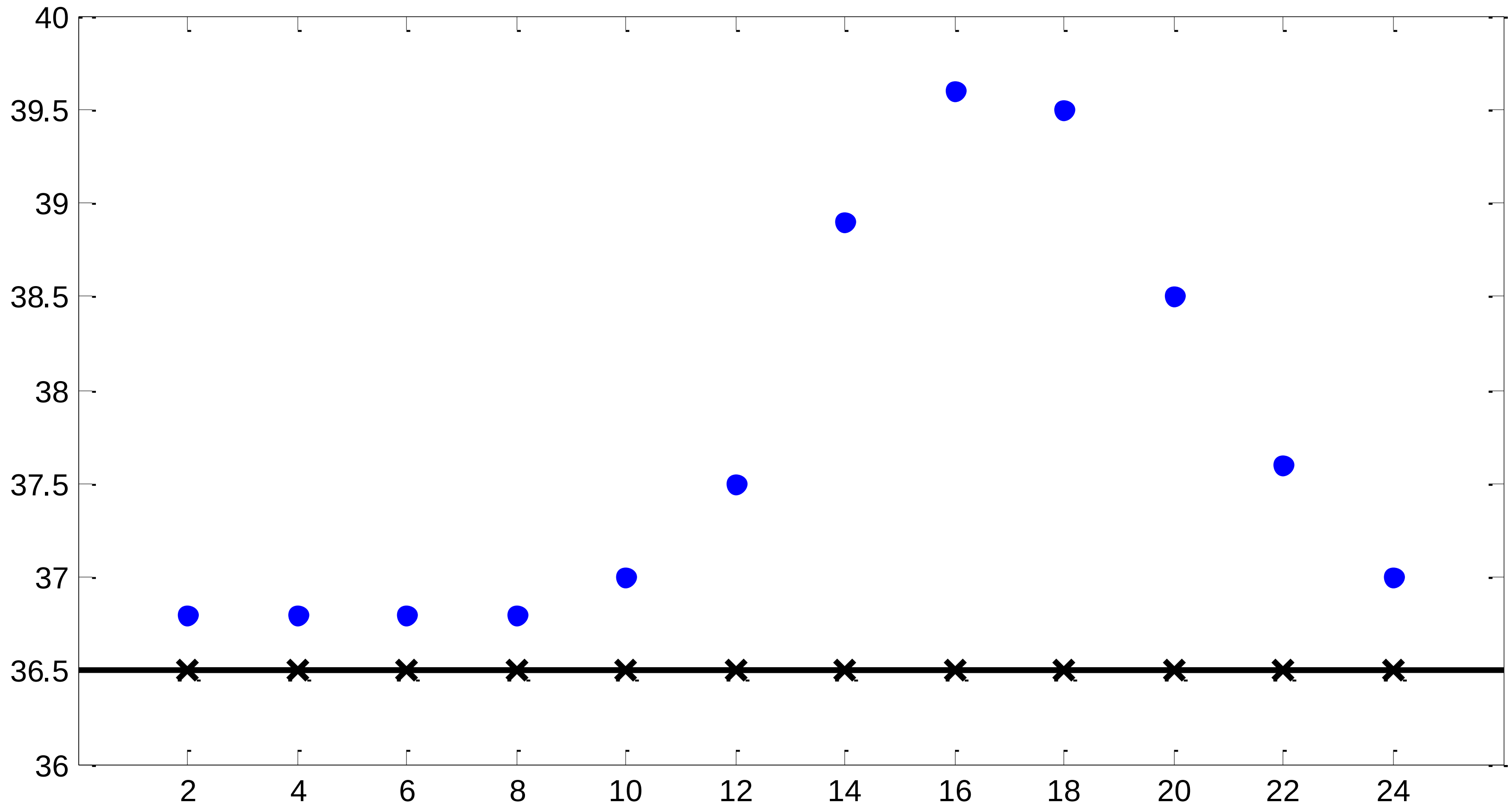
Nell'ambito di una sperimentazione, si vuole conoscere l'andamento della temperatura corporea di una persona.

La funzione corrispondente non è nota a priori, non è scritta su alcun libro: bisogna misurare.

Non potendolo fare in continuo, decidiamo di misurare ogni due ore.

La temperatura corporea – 1

Ora	T°
2	36,8
4	36,8
6	36,8
8	36,8
10	37,0
12	37,5
14	38,9
16	39,6
18	39,5
20	38,5
22	37,6
24	37,0



[esempio1.m]

NOTA BENE: dati di pura fantasia inventati da me.

La temperatura corporea – 2

Conosciamo la funzione temperatura solo su un insieme discreto.

Tale conoscenza può essere rappresentata in forma tabellare oppure in modo grafico.

Nodi: insieme dei punti $\left(x_i, f_i\right)$ su cui conosco la funzione, $i = 1,2,\ldots,n$

Precisazione

In questo contesto, *discreto* non ha il significato usuale, indicante una qualità intermedia. Discreto si oppone a continuo.

Qual è il nostro scopo? Conoscere la funzione in ogni punto. Meglio: conoscere una ragionevole approssimazione della funzione (che è sconosciuta) in ogni punto.

Definizione di interpolazione

Nota una funzione f sui punti $\left(x_i, f_i\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$ stimare il suo valore su un punto qualunque x, $\min\left(x_i\right) \le x \le \max\left(x_i\right)$.

La temperatura corporea – 3

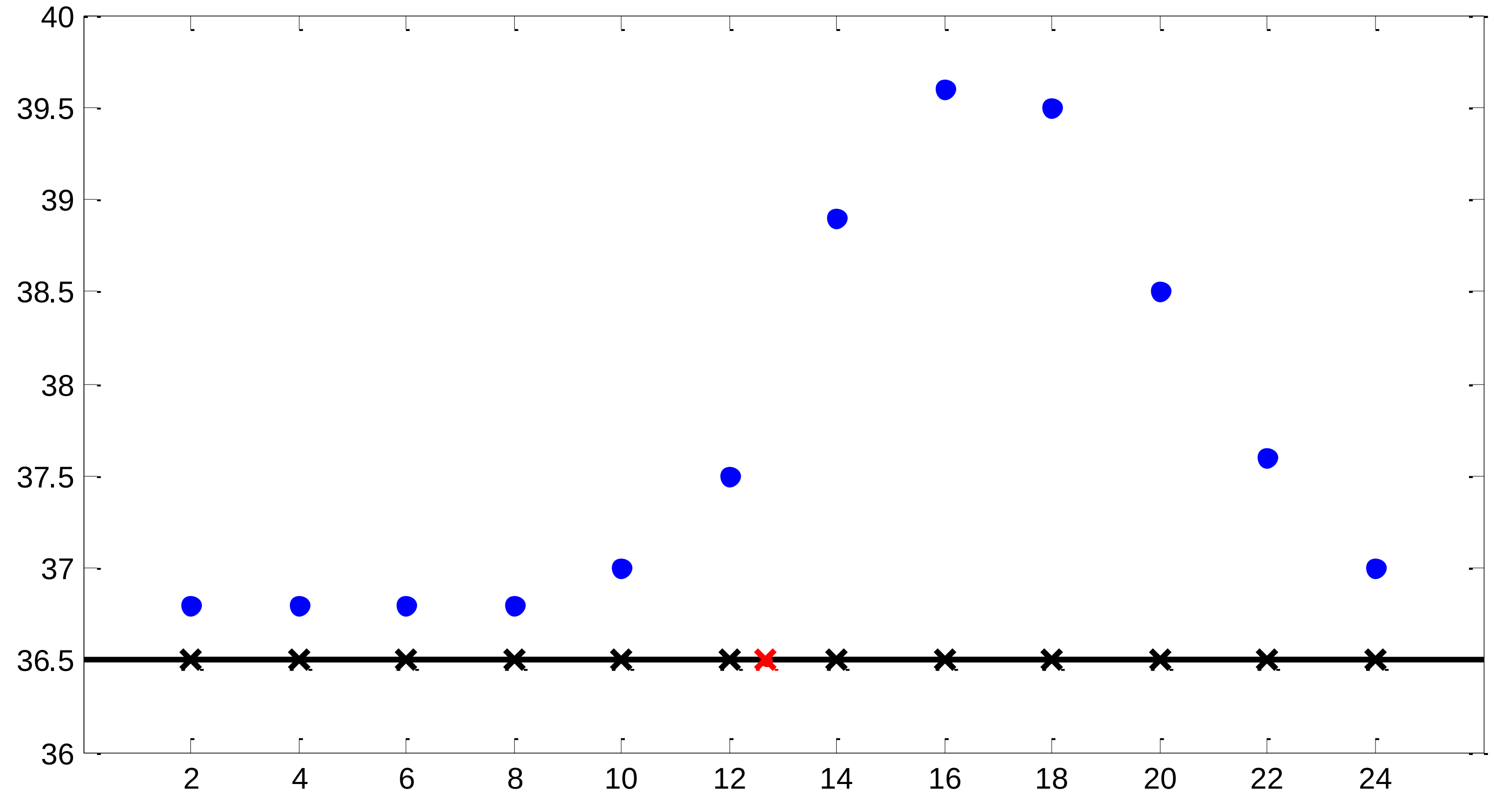
Al paziente è stato somministrato un farmaco alle 8.20 e il protocollo di ricerca richiede di misurare la temperatura 4 ore dopo.

Qual’era la temperatura alle 12.40? Non è stata misurata. Ma possiamo cercare di ricostruirla in modo ragionevole, valutando le temperatura sui nodi precedenti e seguenti.

Si tratta di un problema di interpolazione.

La temperatura corporea – 4

Come ricostruire la temperatura alle ore 12:40 (12.667in decimale)?



[esempio2.m]

Metodi per l'interpolazione 1D

Ve ne sono moltissimi. Appartengono alla famiglia dei *piecewise polynomials*

- Nearest neighbour
- Lineare
- Cubico
- Spline

I piecewise polynomials sono basati sul seguente approccio: si suddivide il dominio della funzione in un certo numero di intervalli e si rappresenta la funzione con polinomi diversi, tanti quanti gli intervalli.

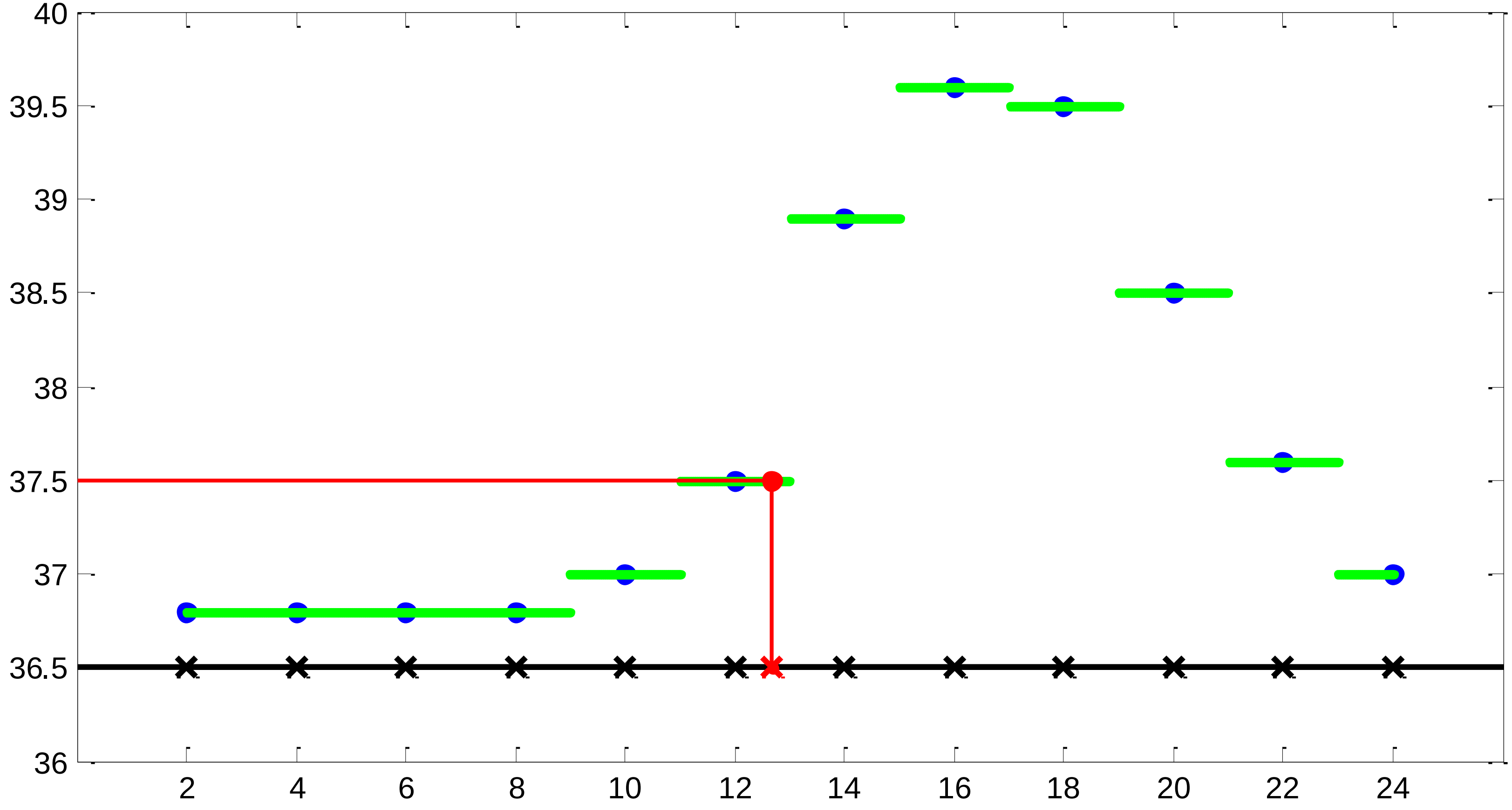
Esistono altri metodi basati ad esempio su polinomi globali: viene usato un unico polinomio, di grado da definire, per rappresentare la funzione su tutto il dominio.

- Verranno presi in considerazione solo: nearest neighbour e lineare.

L'interpolazione nearest neighbour

Il valore della funzione *f* nel punto *x* coincide con il valore che *f* ha nel nodo più vicino. La funzione che viene così ricostruita è costante a tratti.

T(12:40)=37.5



[esempio3.m]

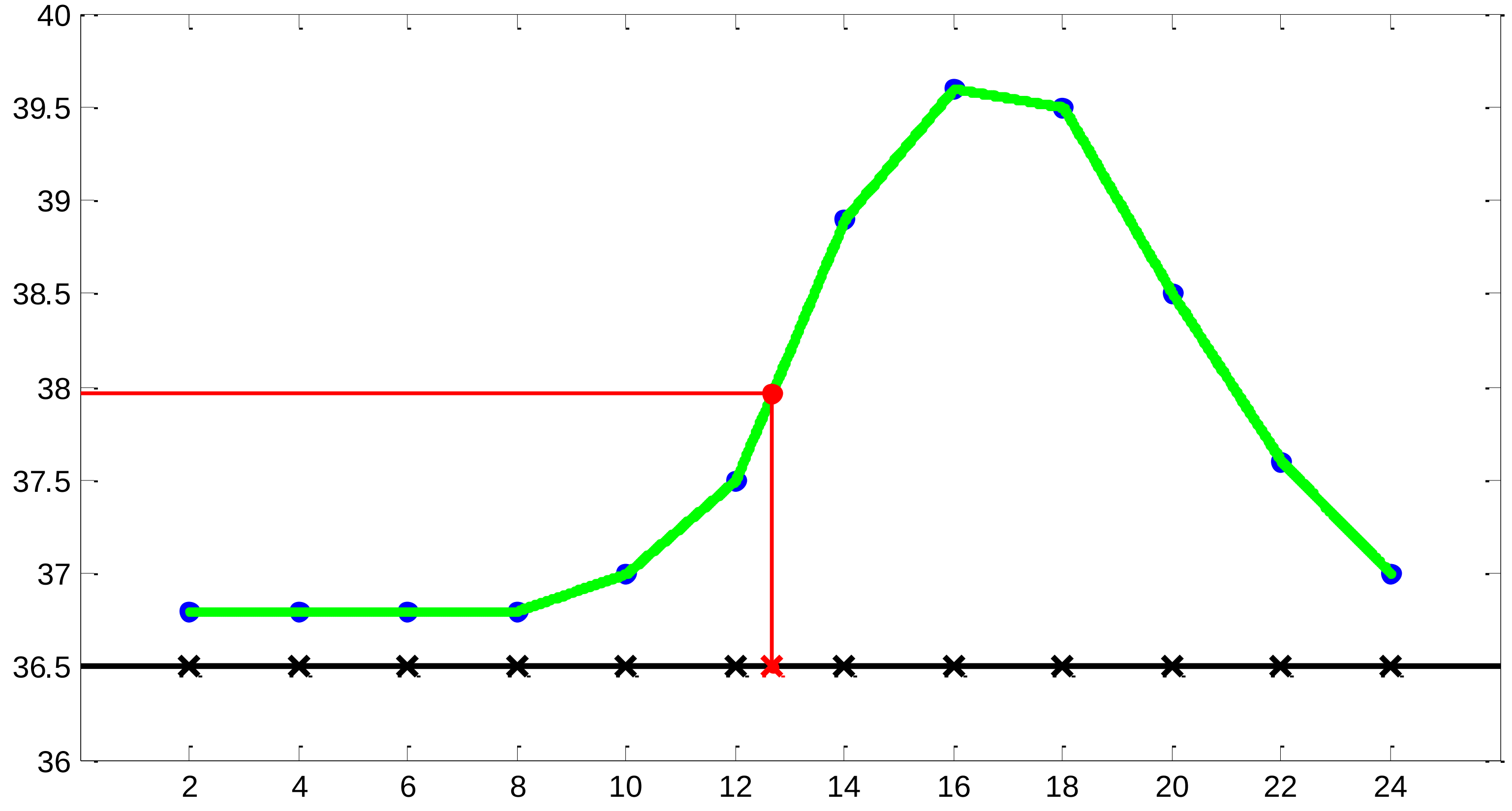
L’interpolazione lineare

Si usano come polinomi definiti a tratti le funzioni lineari.

Idea semplice: si congiungono i nodi con segmenti...

La funzione è continua, ma non le sue derivate.

T(12:40)=38.0



[esempio4.m]

Metodi diversi portano a risultati diversi.

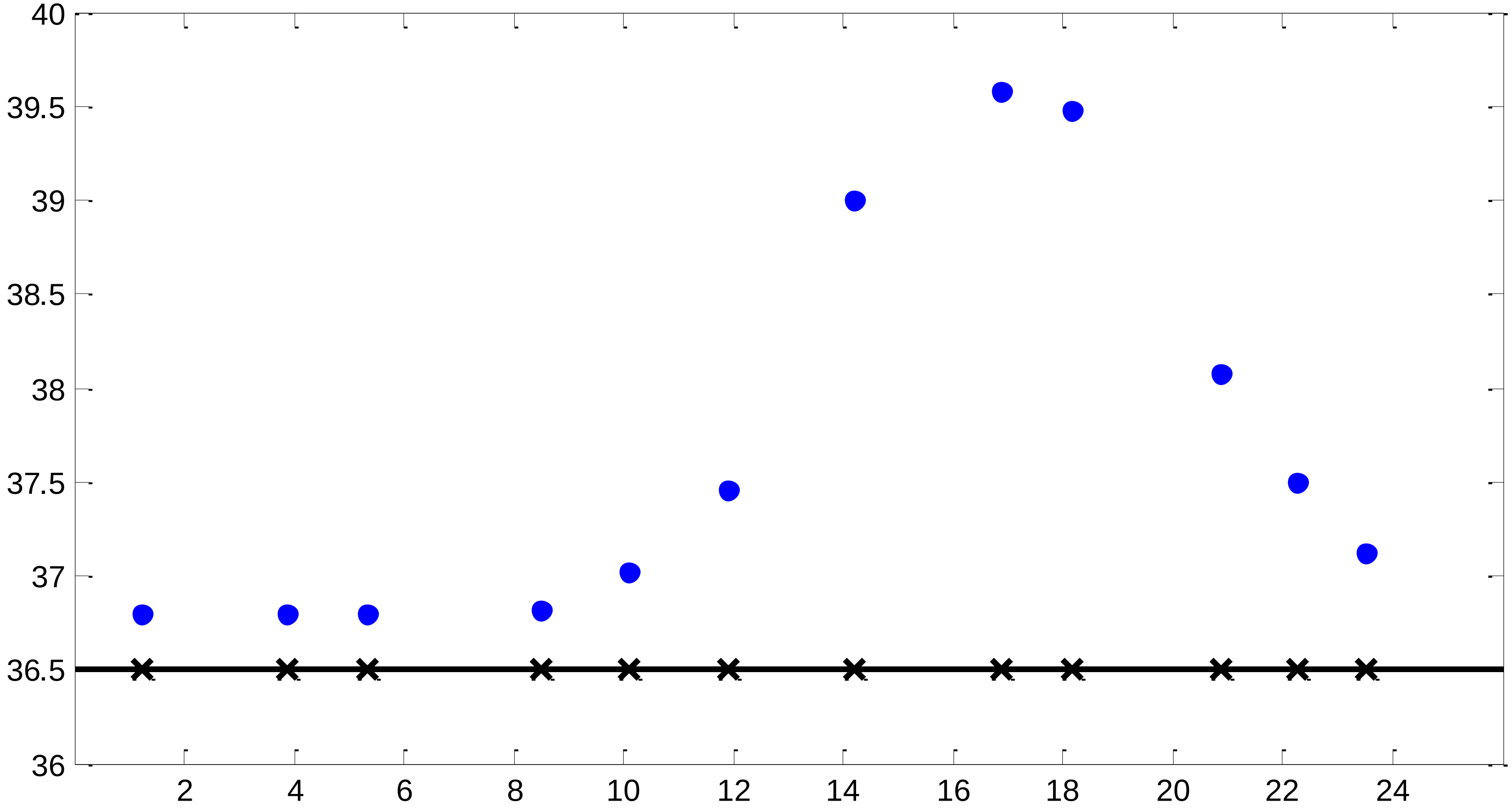
Seconda interpolazione

L'interpolazione illustrata finora costituisce la **seconda interpolazione**, quella in cui viene stimato il valore di una funzione in un punto qualunque a partire dalla sua conoscenza su un insieme di nodi.

Evidentemente esiste una prima interpolazione…

La temperatura corporea – 5

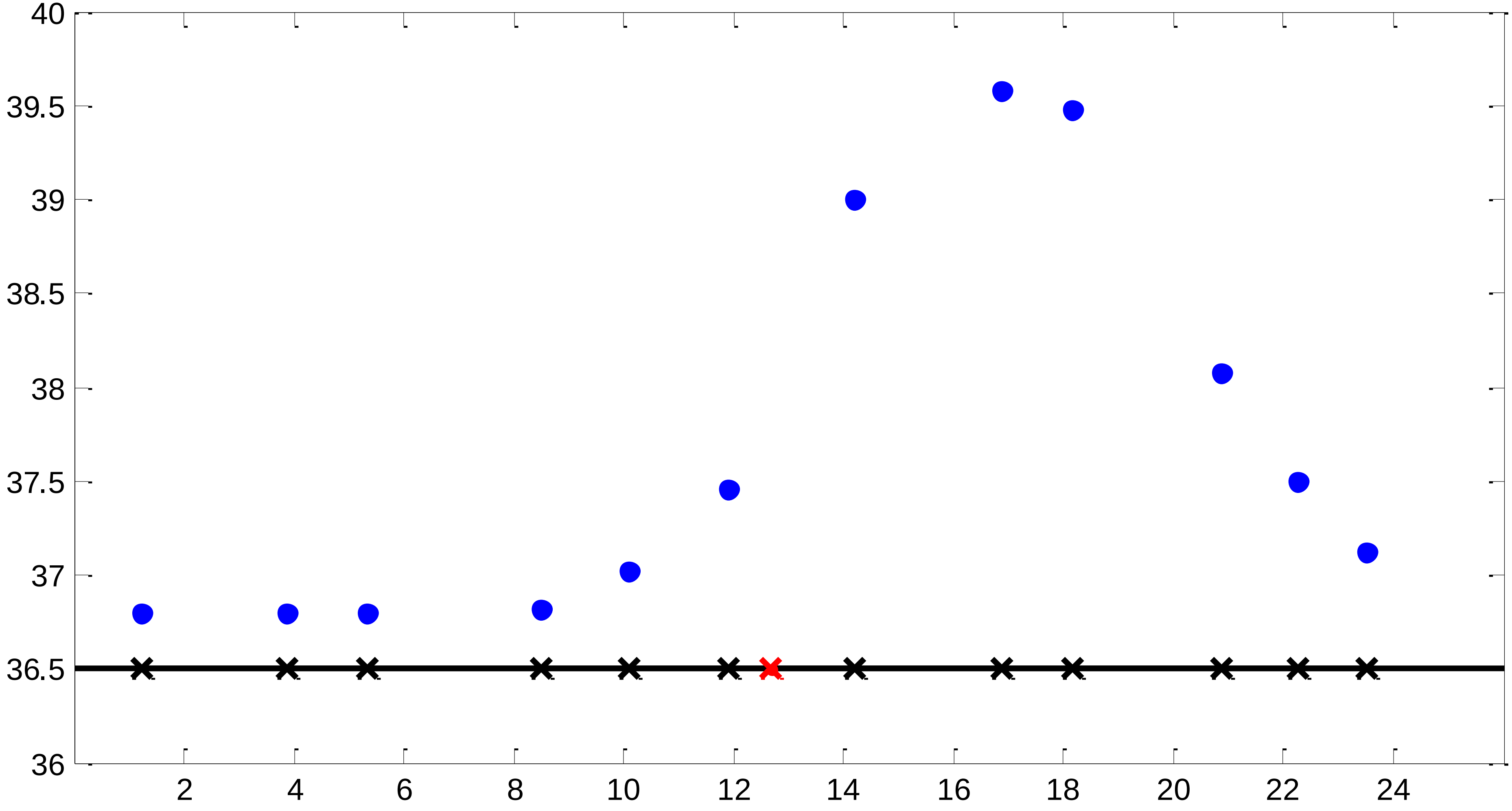
Immaginiamo che, per errore, malinteso o imperizia, le temperature vengano acquisite in istanti irregolari.

L'obiettivo è il solito…	

[esempio5.m]

La temperatura corporea – 6

… determinare la temperatura alle 12:40



[esempio6.m]

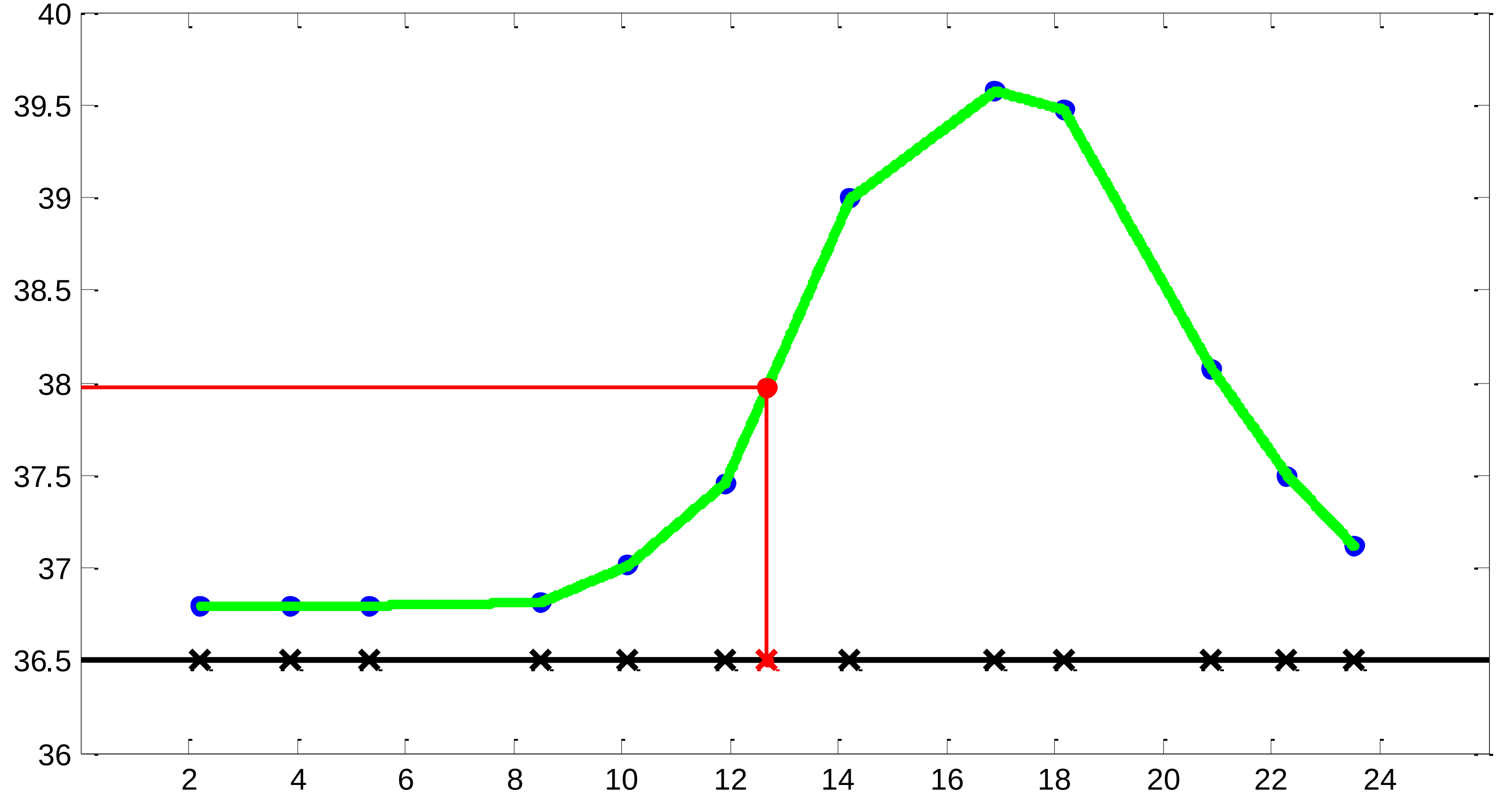
Metodi per l’interpolazione 1D su nodi irregolari

Per effettuare l’interpolazione su nodi sparsi sono possibili due approcci:

- (caso a) interpolare direttamente sui nodi disponibili (eseguire la seconda interpolazione su nodi sparsi)
- (caso b) eseguire una fase preliminare e determinare la funzione su un nuovo insieme di nodi regolari (prima interpolazione); applicare a questi ultimi i metodi già illustrati.

La seconda interpolazione su nodi irregolari

Tutti i metodi di interpolazione illustrati in precedenza possono essere applicati anche al caso di nodi irregolari: il caso a è facilmente risolto.



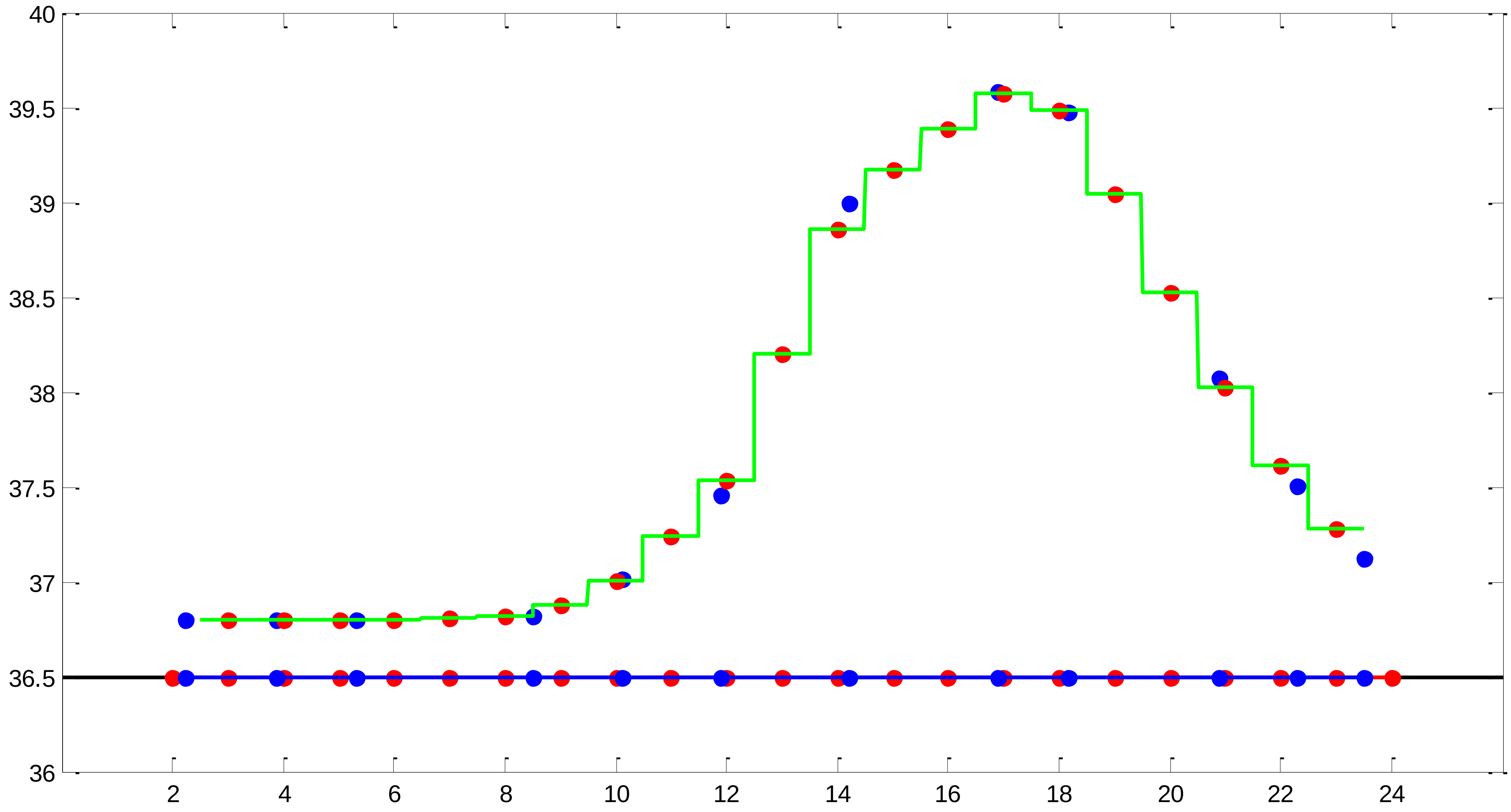
[esempio7.m]

La prima interpolazione

Nel caso 1D, praticamente tutti i metodi utili a svolgere la seconda interpolazione possono essere usati per eseguire la prima.

Si tratta di scegliere il passo dei nodi regolari, per esempio ogni ora.

La prima interpolazione – 2



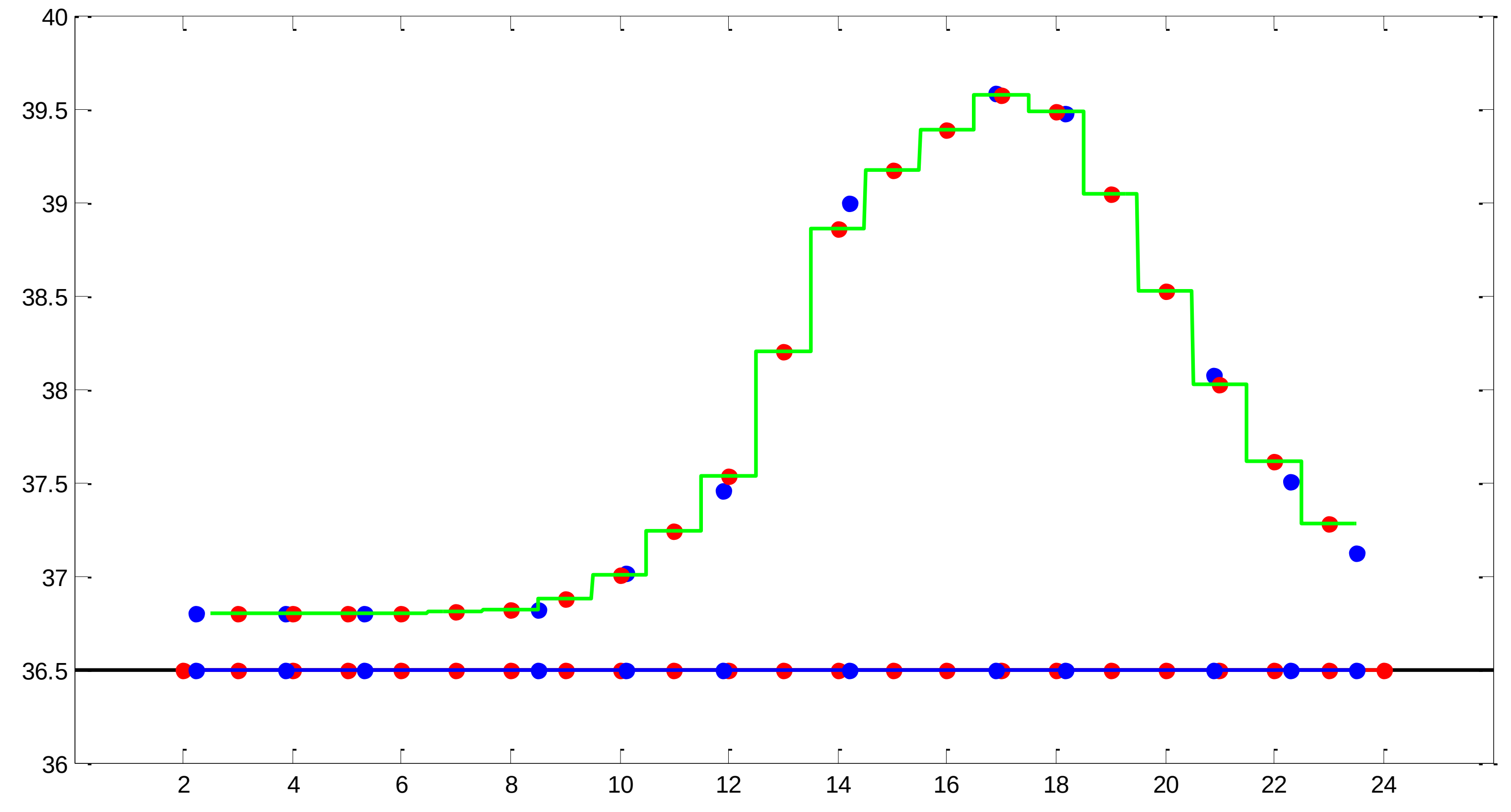
[esempio8.m]

La prima interpolazione – 3

Blu: nodi originari

Rossi: nodi regolari determinati con 1° interpolazione con metodo lineare

Verde: funzione determinata con seconda interpolazione con metodo nearest



Sintesi

Metodo a due passi

- Si parte da nodi irregolari
- Si determina con la prima interpolazione il comportamento della funzione su nodi regolari
- A partire dai nodi regolari, si determina il valore della funzione su punti qualunque (seconda interpolazione)

Metodo a un passo

- Si parte da nodi irregolari
- Si applica uno dei metodi di interpolazione noti ai nodi irregolari per determinare la determina funzione su punti qualunque

Sintesi - 2

La prima interpolazione è in genere più complessa perché lavora su punti sparsi e irregolari

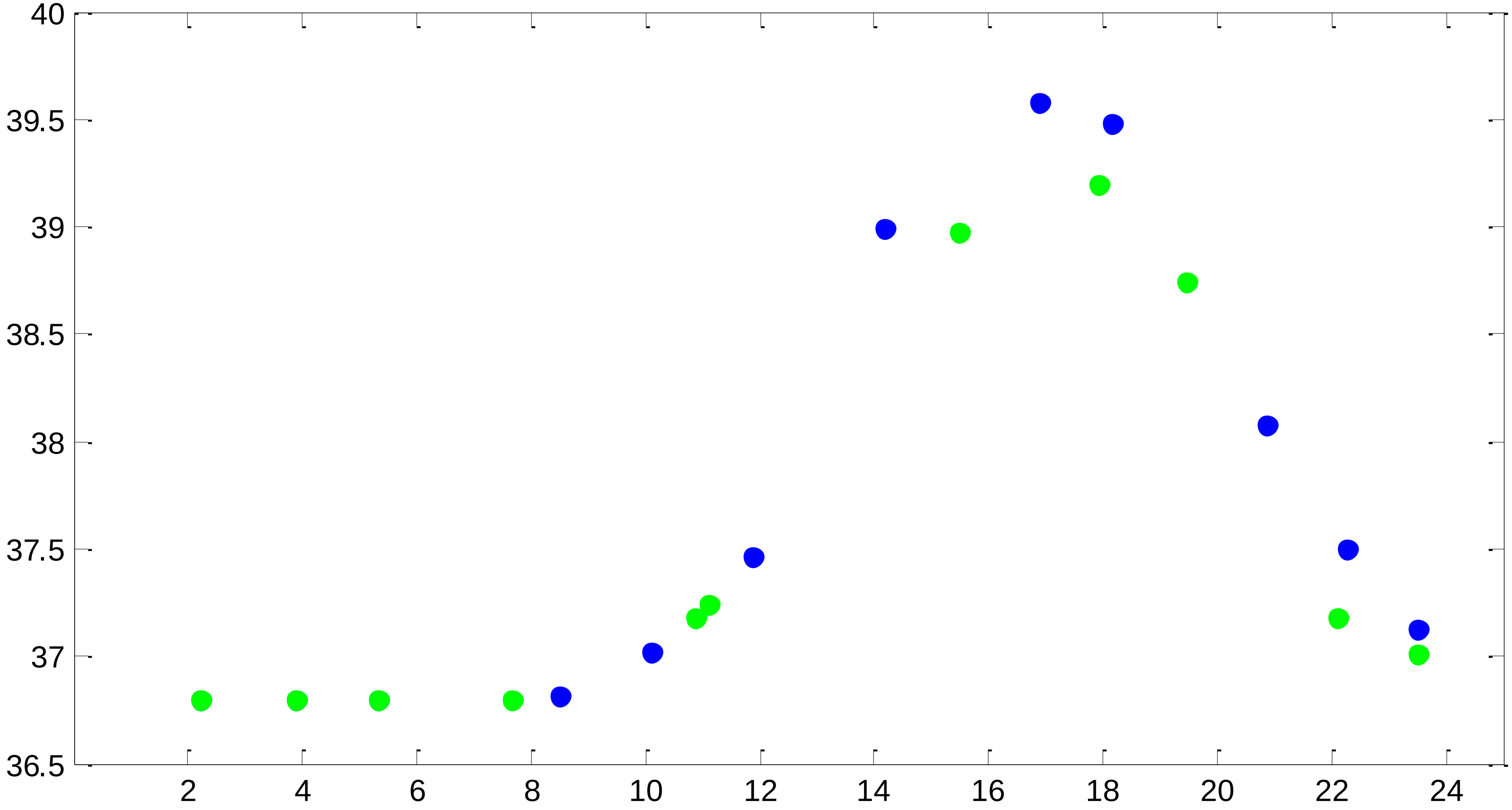
La seconda interpolazione lavora si una situazione regolare e in genere presenta meno difficoltà.

Perché i nodi regolari?

Nel caso 1D il vantaggio dei nodi regolari non è evidente. Tuttavia i nodi regolari facilitano

- Confronto fra due situazioni
- Calcoli: per quante ore la temperatura è stata superiore a 38°

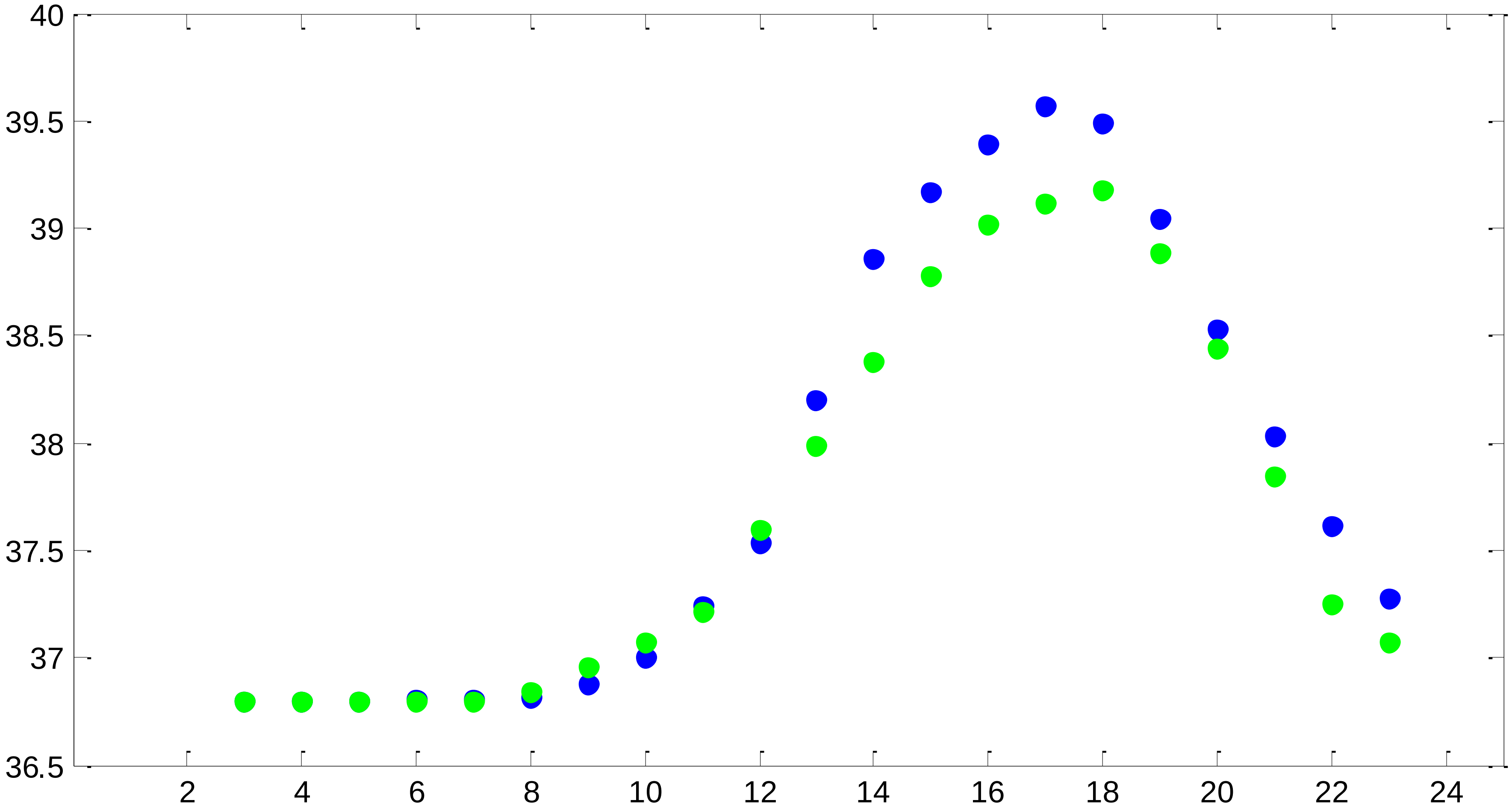
Confronto fra due curve



[esempio9.m]

Due pazienti diversi: non è facile comparare l'andamento.

Confronto fra due curve – 2

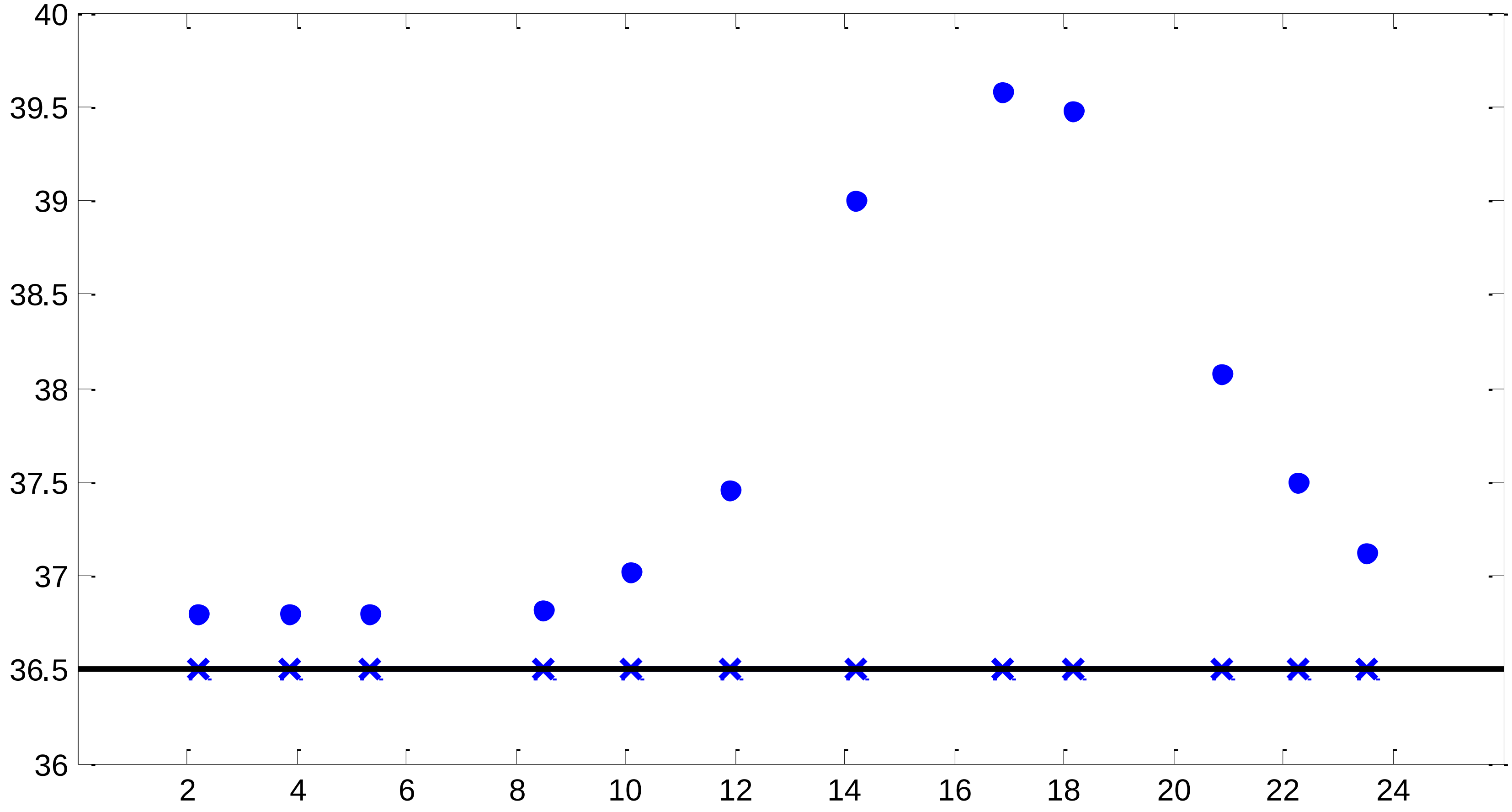


[esempio10.m]

Dopo la regolarizzazione il confronto è più semplice

Valutazioni quantitative

Per quante ore la temperatura è stata superiore a 38°?

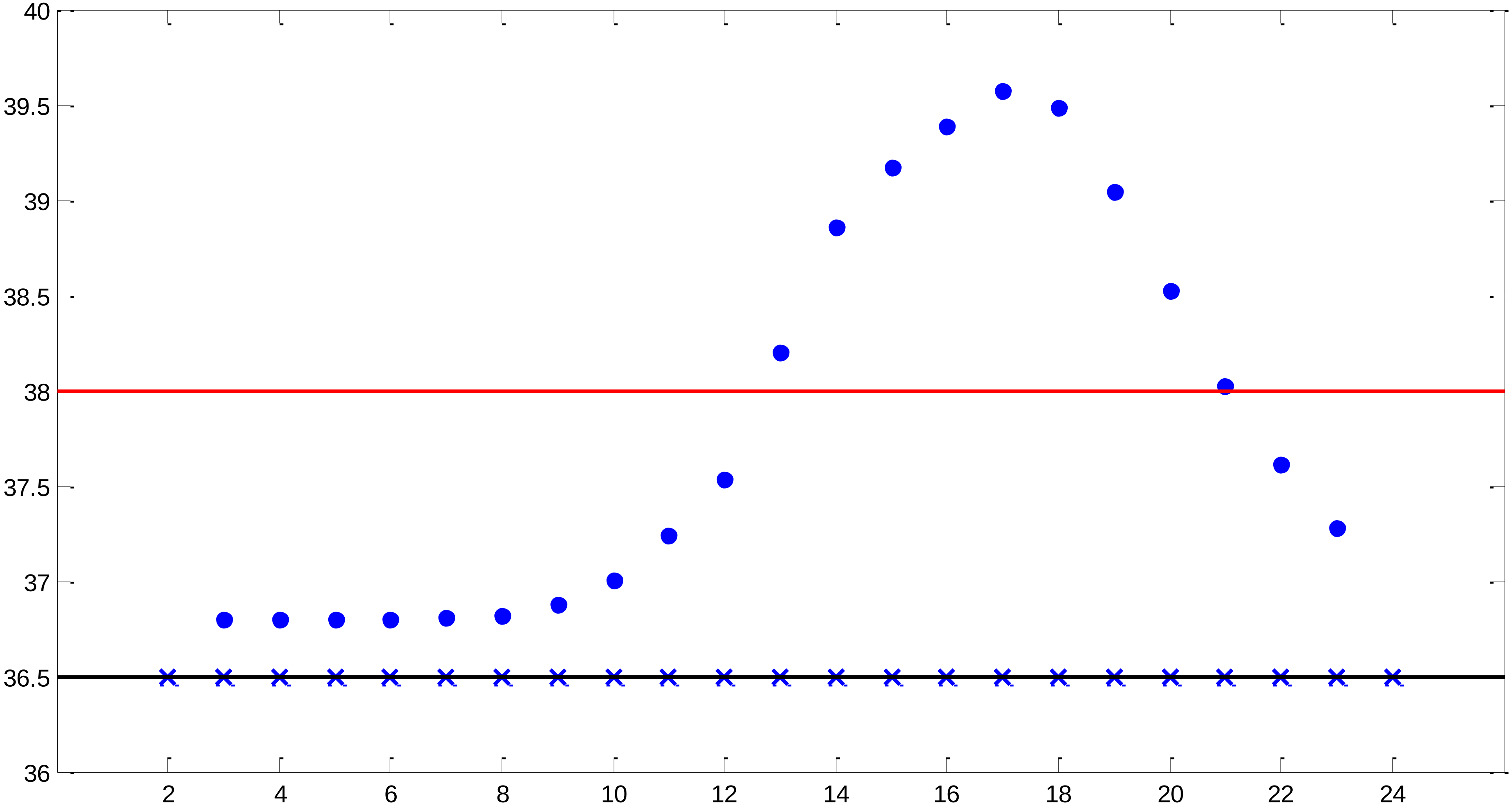


[esempio11.m]

Non è semplice rispondere a causa dell'irregolarità dei nodi.

Valutazioni quantitative - 2

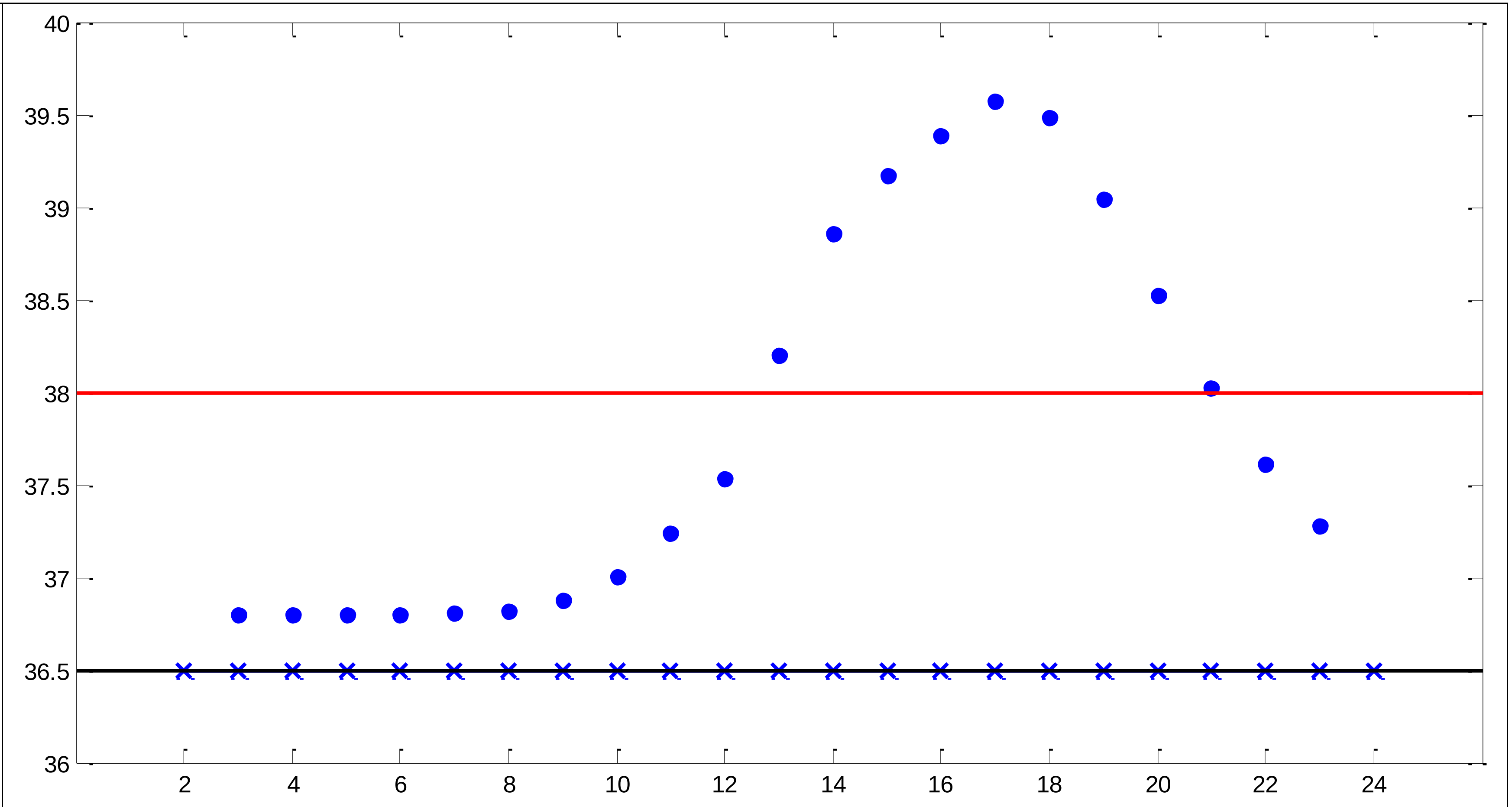
Per quante ore la temperatura è stata superiore a 38°?



[esempio12.m]

Valutazioni quantitative – 3

Istituendo l'equivalenza
1 punto=1h
Basta contare quanti punti sono sopra la linea rossa.



[esempio12.m]

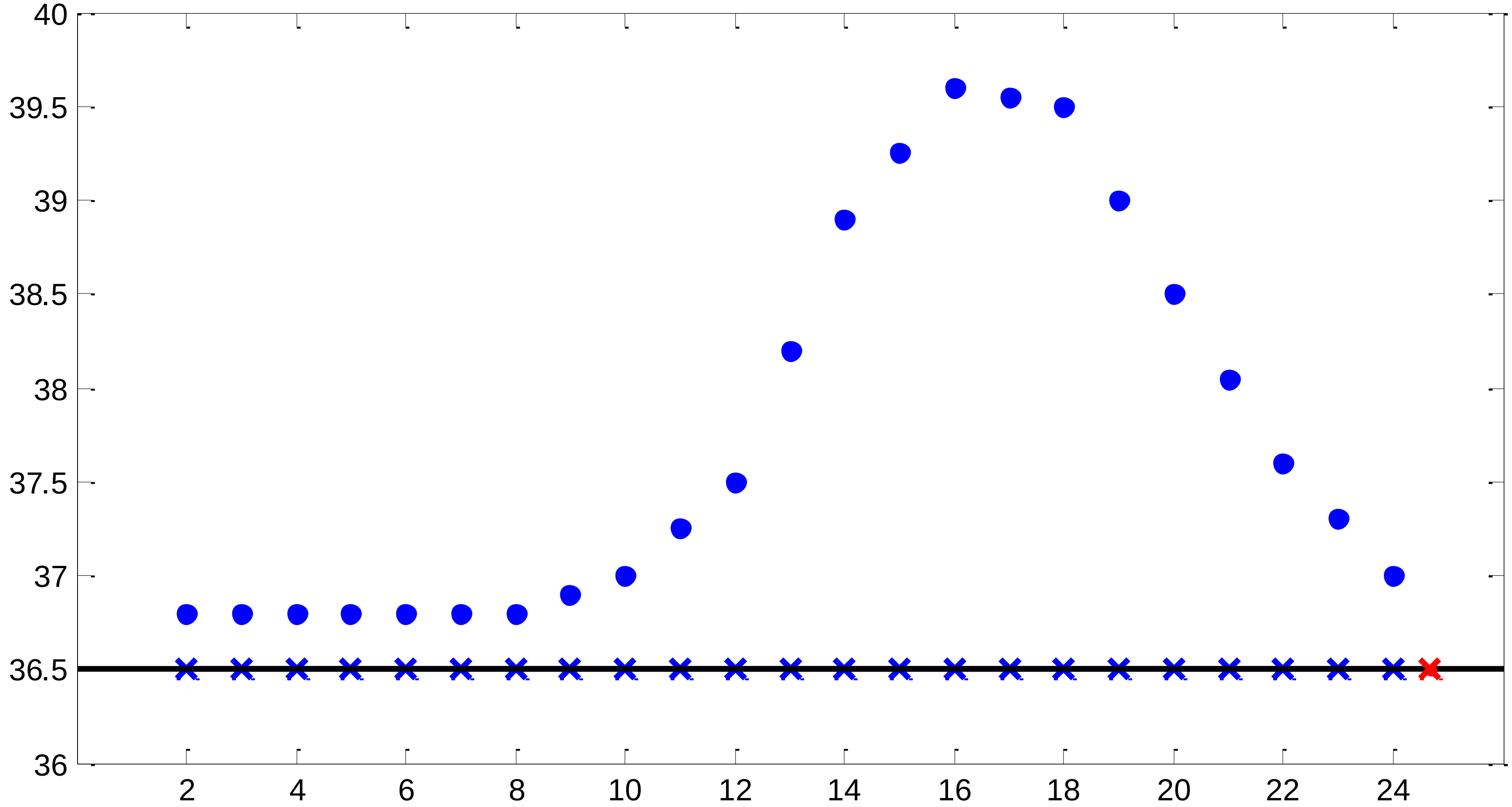
Precisazione

Non si sta dicendo che è impossibile comparare due profili o effettuare semplici quantificazioni con i nodi sparsi.

E' più semplice farlo con quelli regolari.

Estrapolazione

Qual’era la temperatura alle 24.40? Si tratta di un orario esterno ai nodi. Indovinare il comportamento della funzione all’esterno dell’insieme dei nodi è un problema di estrapolazione.



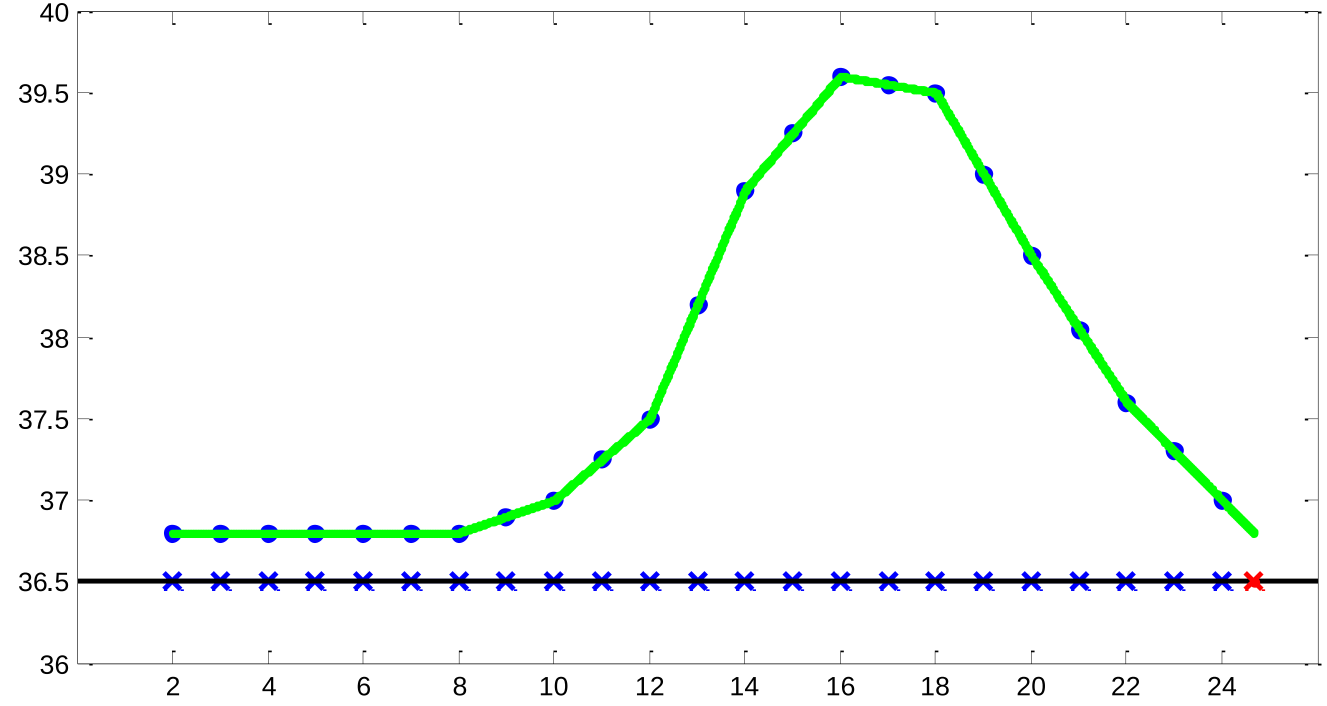
[esempio14.m]

Estrapolazione – 2

Facciamo interpolazione lineare ed estrapoliamo. Prolunghiamo cioè l'ultimo segmento all'esterno dell'insieme dei nodi.

Otteniamo

T(24:40)=36.8



L'estrapolazione è evidentemente più pericolosa dell'interpolazione ed è consentita solo per punti prossimi all'insieme dei nodi.

Usare i dati per prevedere la temperatura alle ore 12 del giorno successivo porterebbe a

T(24+12)=33.4

Risultato evidentemente assurdo.

Dimensionamento della griglia

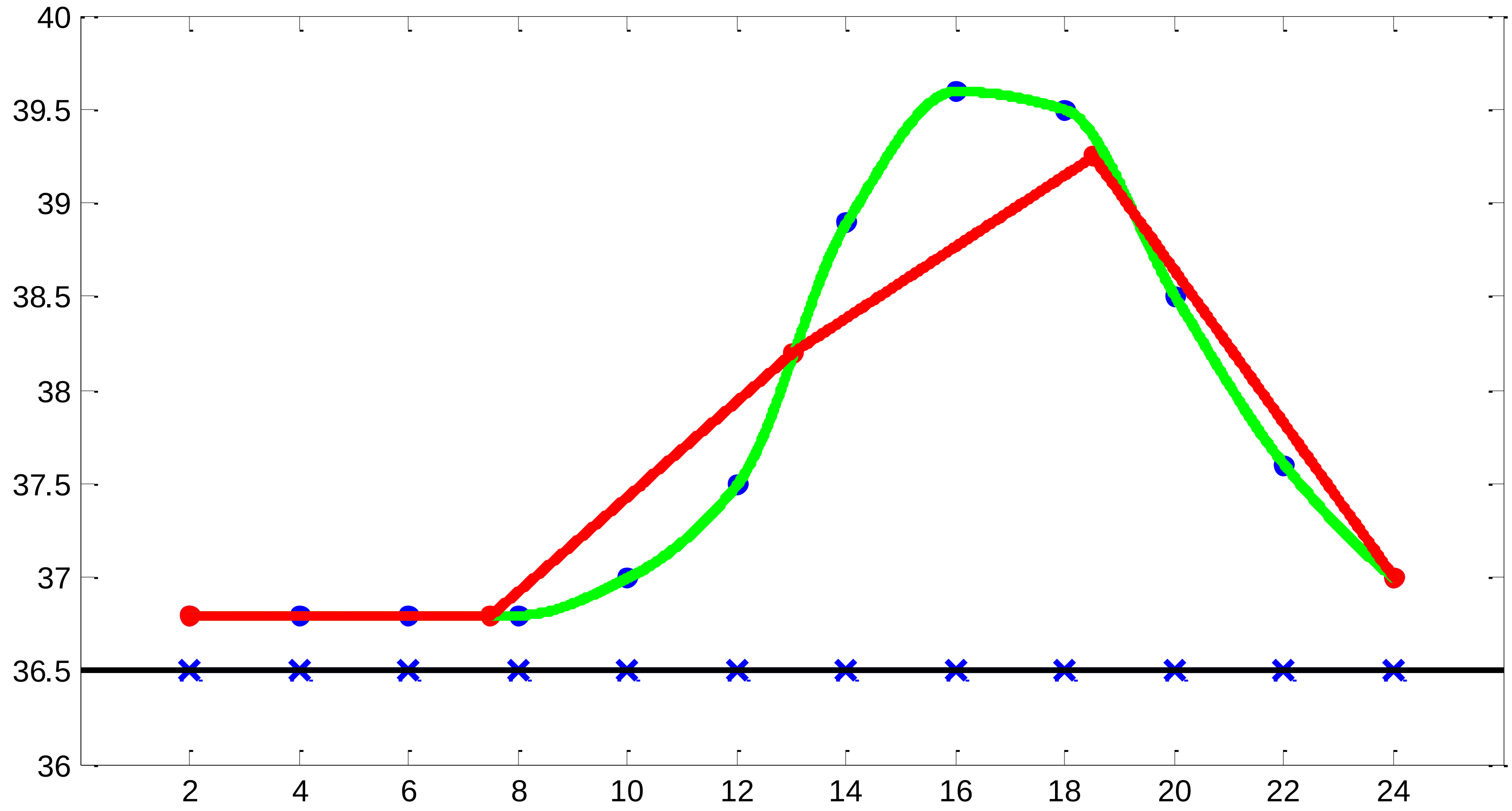
Qual è il passo corretto per i nodi? Dipende dalla variabilità del problema e dal grado di dettaglio che vi vuole ottenere.

Nel caso della temperatura corporea, ad esempio, una misura al minuto è troppo, ma una ogni 6 ore è troppo poco.

Dimensionamento della griglia - 2

Verde: curva vera

Rosso: curva ottenuta interpolando misure ogni 6 ore: perdita significativa di dettagli



[esempio16.m]

BOZZA NON LEGGERE

Vedere se la DTM_2 contiene cose in più, interessanti