

Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Proiezione cartografica

Dispense

Esempi di coordinate - 1

Coordinate cartesiane ellissocentriche – ECEF (Earth Centered Earth Fixed)

	X	Y	Z
A	4445655.73	714353.00	4502688.99
B	4445635.24	714349.71	4502668.09
C	4446070.54	716391.00	4502014.21

- La z non ha alcun particolare significato
- Non distinguono fra planimetria e altimetria

Esempi di coordinate - 2

Coordinate geografiche ellissoidiche

	φ	λ	h
A	45°11'35.781"	9°07'42.874"	136.87
B	45°11'35.781"	9°07'42.874"	107.42
C	45°11'03.526"	9°09'12.023"	174.98

- Vi è distinzione fra planimetria e altimetria
- Sono definite per tutto l'ellissoide univocamente
- Non sono pienamente intuitive:
- Sono difficili da interpretare in termini di distanza fra punti

Esempi di coordinate - 3

Coordinate cartografiche

	E	N	h
A	1510100.11	5004522.34	136.87
B	1510100.11	5004522.34	107.42
C	1512047.24	5003530.36	174.98

Coordinate cartografiche Gauss-Boaga

- Vi è distinzione fra planimetria e altimetria
- Sono coordinate piane (assimilabili alle coordinate cartesiane), facilmente interpretabili in termini di distanza

Bilancio delle coordinate geografiche (o ellissoidiche)

PRO

- Sono definite per tutto l'ellissoide
- Distinguono planimetria e altimetria

CONTRO

- Non sono pienamente intuitive:
- Sono difficili da interpretare in termini di distanza fra punti
- $A=(45^{\circ}11'35.781'', 9^{\circ}07'42.874'')$
- $C=(45^{\circ}11'03.526'', 9^{\circ}09'12.023'')$
- **La topografia sull'ellissoide è molto complessa**

Conversioni fra coordinate cartesiane ed ellissoidiche nel piano - 1

La geometria non piana della superficie ellissoidica rende difficili calcoli che nel piano sono elementari.

Da polari a cartesiane

$$x_B = x_A + d_{AB} \sin \alpha_{AB}$$

$$y_B = y_A + d_{AB} \cos \alpha_{AB}$$

Da cartesiane a polari

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\alpha_{AB} = \arctan_4(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$$

Conversioni fra coordinate cartesiane ed ellissoidiche nel piano - 2

$$\alpha'_{AB} = \arctan \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

$$\arctan_4(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \begin{cases} \alpha'_{AB} & x_B - x_A > 0 & y_B - y_A \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x_B - x_A > 0 & y_B - y_A = 0 \\ \alpha'_{AB} + \pi & y_B - y_A < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x_B - x_A < 0 & y_B - y_A = 0 \\ \alpha'_{AB} + 2\pi & x_B - x_A < 0 & y_B - y_A > 0 \end{cases}$$

Conversioni fra coordinate cartesiane ed ellissoidiche nel piano – 3

Sull'ellissoide si ha una situazione analoga.

- Le coordinate ellissoidiche (φ, λ) corrispondono alle cartesiane (x, y)
- Esistono le polari anche sull'ellissoide

Le conversioni, in andata e ritorno, sono estremamente complesse.

Distinzione fra Cartografia Matematica e Cartografia

Cartografia matematica

- Aspetti di matematica: come proiettare una superficie curva sul piano
- Studio delle deformazioni
- Studio delle caratteristiche delle varie proiezioni

Cartografia: aspetti più concreti

- Nesso scala-precisione
- Come rappresentare graficamente gli oggetti nelle carte
- Cosa inserire nelle carte
- Il problema del taglio
- Cartografia numerica

Obiettivo della cartografia matematica - 1

- Proiettare i punti che si trovano su una superficie curva (sfera, ellissoide) su un piano
- Mantenere alcune proprietà essenziali
 - Dimensioni
 - Forme

Il problema non è trovare **una** proiezione, ma una **buona** proiezione.

Obiettivo della cartografia matematica - 2

Il problema non è trovare una proiezione, ma una buona proiezione. Una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'ellissoide e del piano è facilissima da trovare

$$f : (\varphi, \lambda) \rightarrow (x, y)$$

$$f(\varphi, \lambda) = (\lambda, \varphi)$$

Equivale a trattare gli angoli φ e λ come coordinate piane. Ma non mantiene forme e dimensioni

Prendiamo un rettangolo ellissoidico

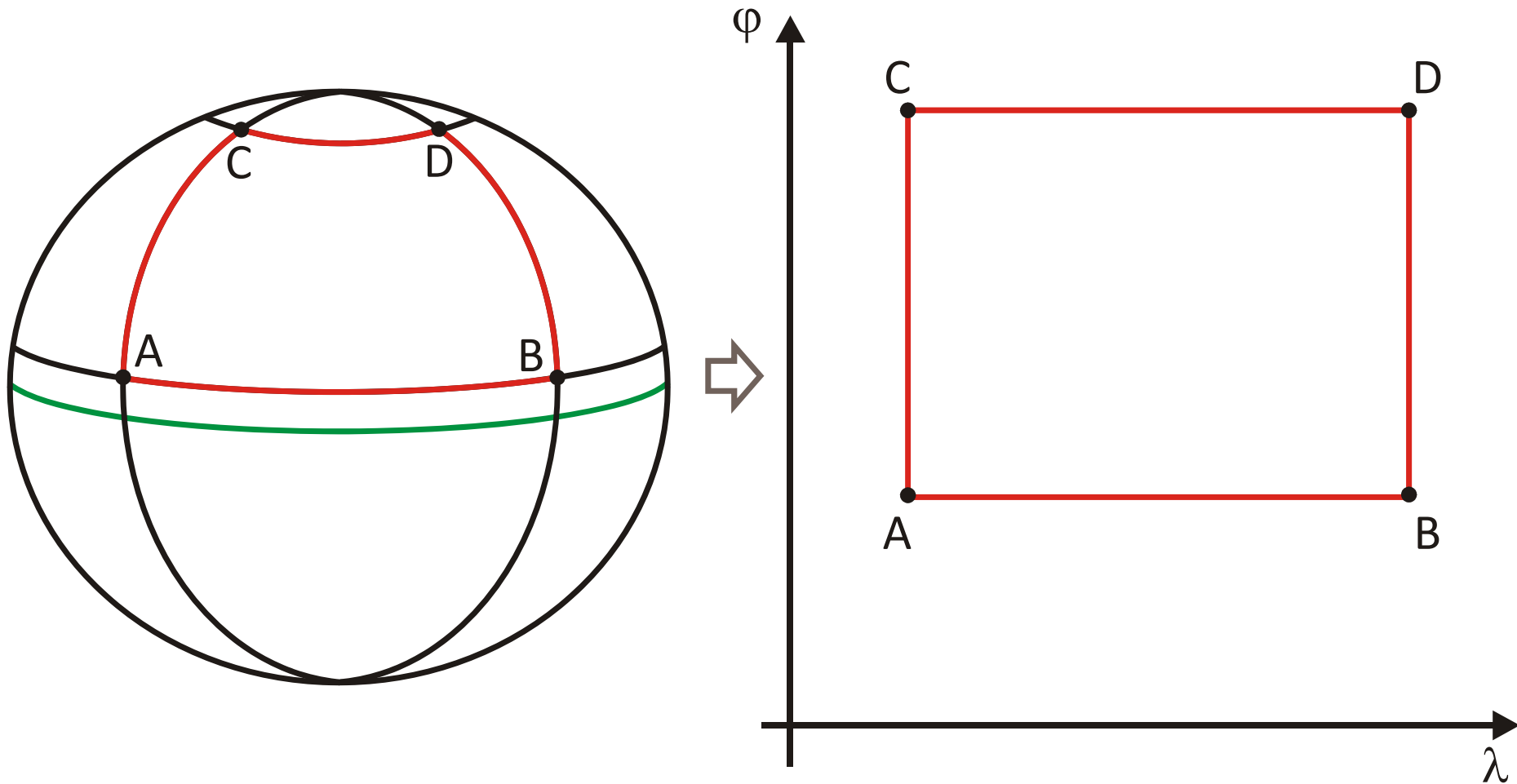
$$(89, 0) \quad (89, 90)$$

$$(10, 0) \quad (10, 90)$$

Ha la forma di un trapezio, quasi uno spicchio, con la base inferiore molto grande e quella superiore molto piccola.

La sua proiezione sul piano, secondo la funzione definita, avrebbe la forma di un rettangolo. **Angoli e distanze sono enormemente deformati.**

Obiettivo della cartografia matematica - 3



[proiezione_cartografica_banale.cdr; wmf]

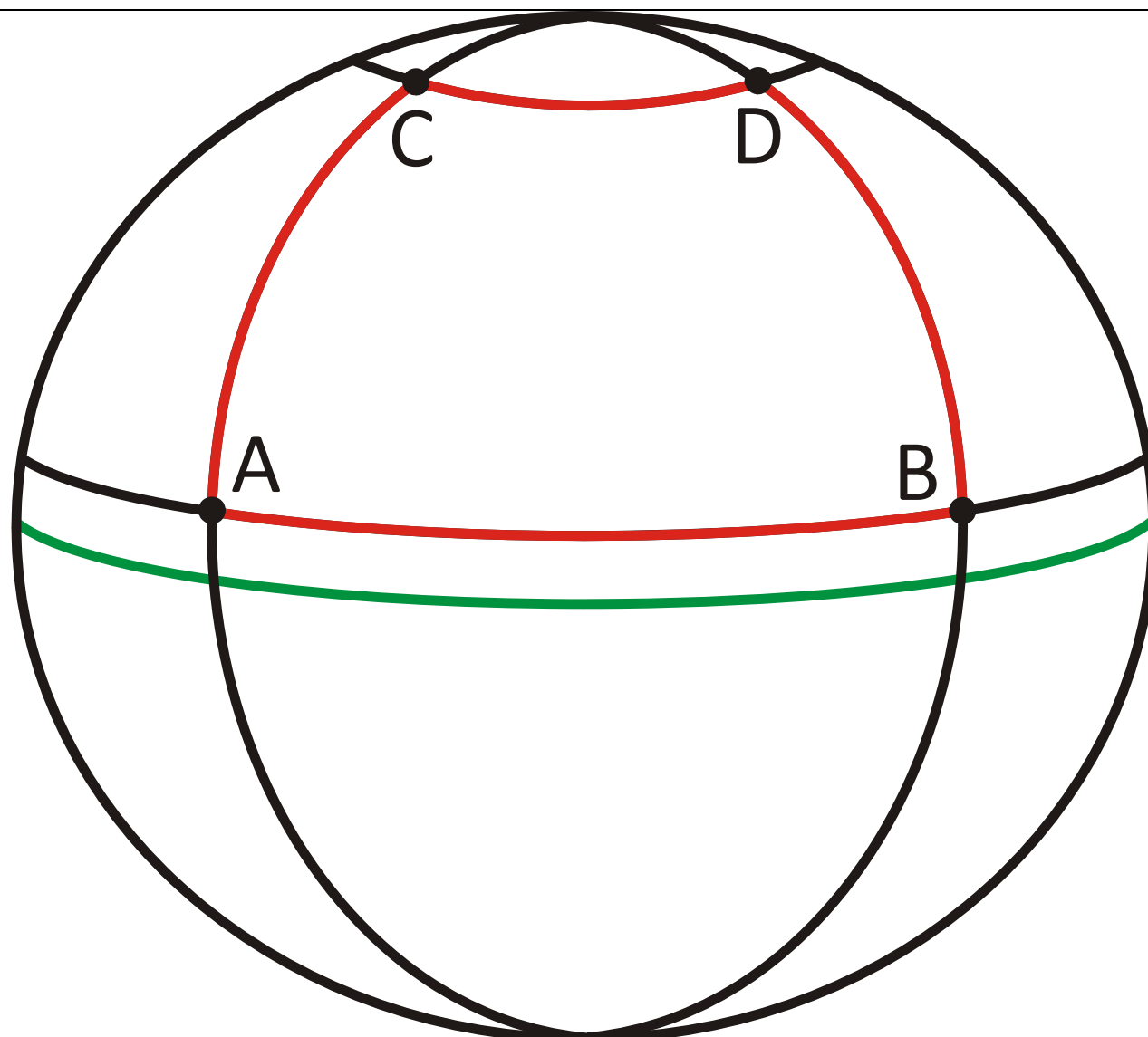
Rettangolo ellissoidico

Una porzione di ellissoide delimitata da due paralleli e due meridiani, cioè definita dalle condizioni

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$$

È detta rettangolo ellissoidico



[rettangolo_ellissoidico.cdr; wmf]

Osservazioni topografiche su una superficie curva

Sulle superfici curve, i concetti di linea, angolo, ecc. devono essere generalizzati

Linea retta → geodetica

Distanza fra due punti: lunghezza arco di geodetica passante per i punti

Angolo fra due direzioni. Consideriamo i punti A , B e C . Consideriamo anche le geodetiche passanti rispettivamente per A e B e per A e C .

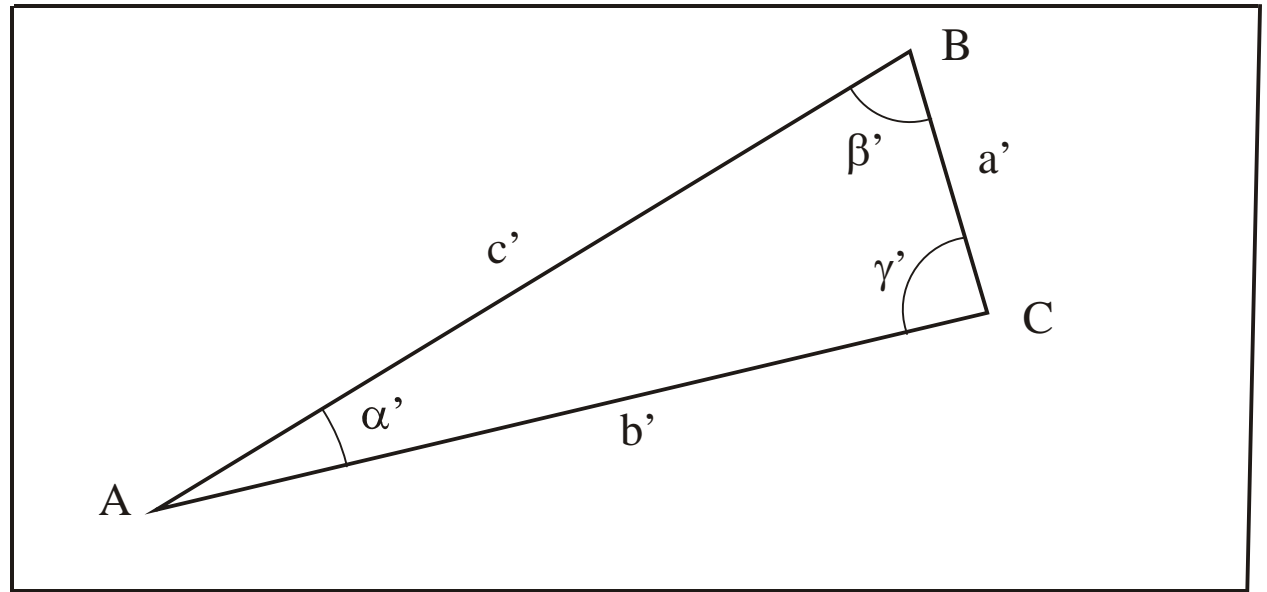
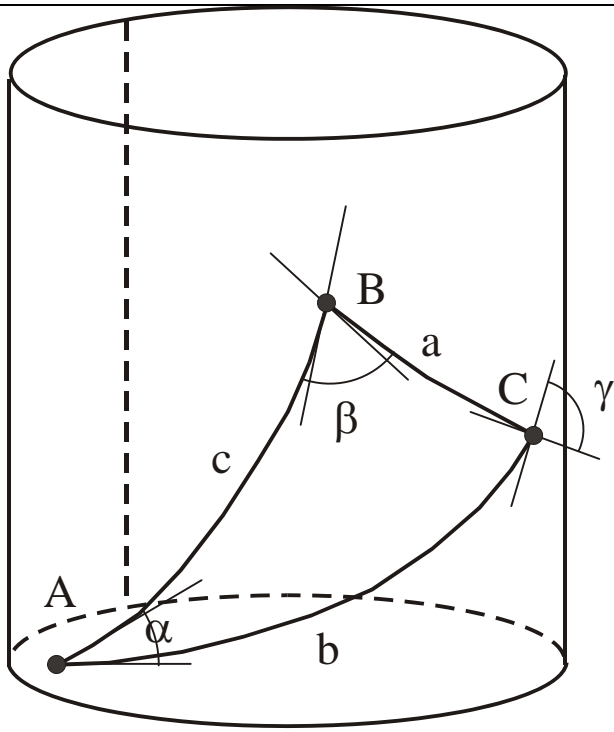
L'angolo formato dalle direzioni \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} è definito come l'angolo formato dai due archi di geodetica.

Angolo fra due curve intersecanti? Angolo formato dalle rette tangenti le curve nel punto A

Angolo di direzione → azimut. Dati i due punti A e B , si definisce azimut in A l'angolo orario fra l'arco di meridiano passante per A l'arco di geodetica \widehat{AB}

Idea di superficie sviluppabile – 1

- Consideriamo una superficie curva e tre punti su di essa.
- Consideriamo gli archi di geodetica che connettono i tre punti. Formano un triangolo curvilineo.
- Consideriamo anche gli angoli formati dagli archi nei tre vertici.



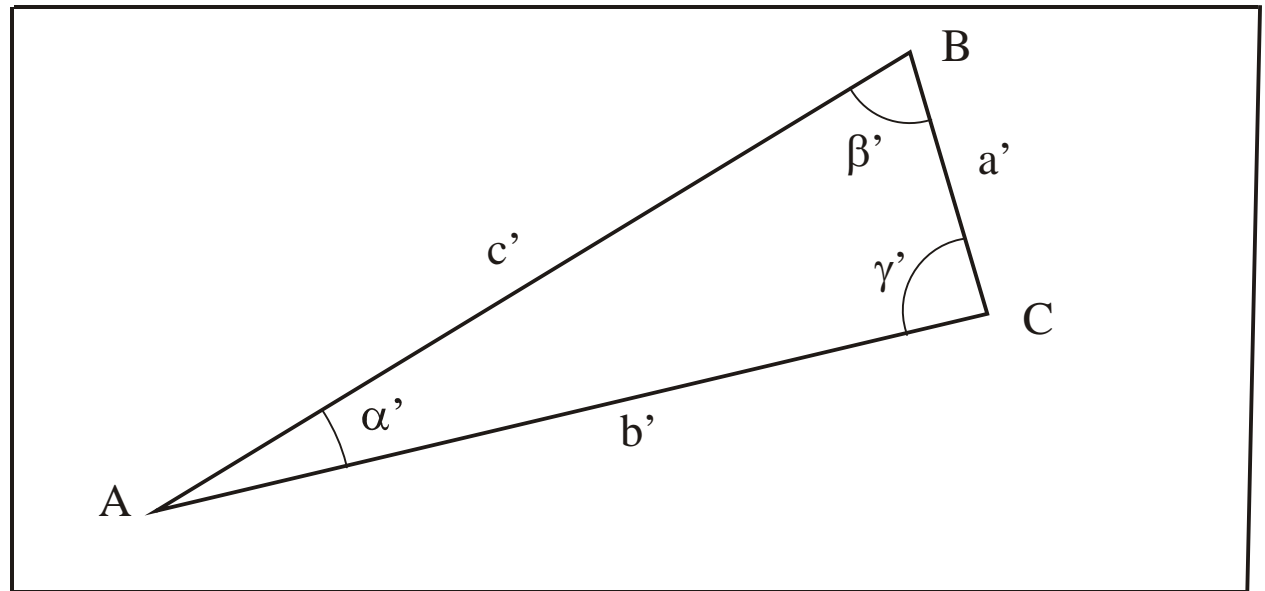
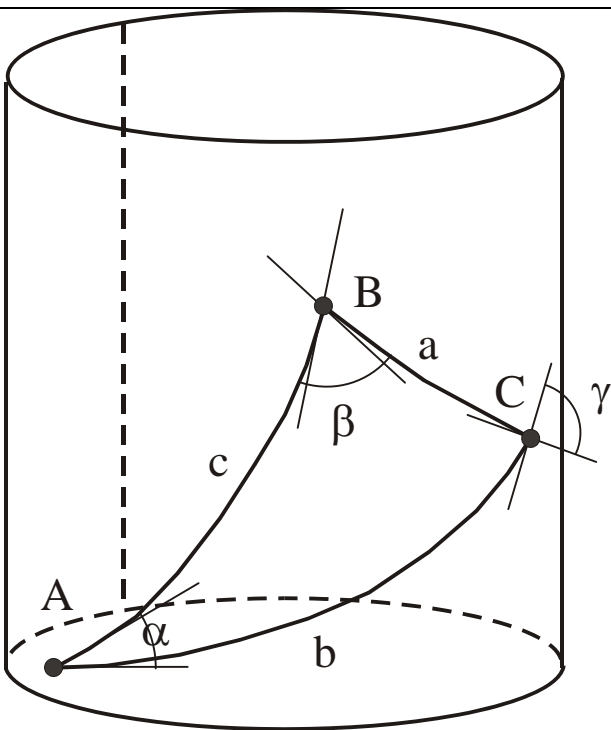
©Inghilleri

Idea di superficie sviluppabile – 2

La proiezione del cilindro sul piano consiste pittoricamente in

- Taglio della superficie laterale del cilindro lungo una linea verticale
- Posa della superficie così ottenuta su un piano
- La superficie aderisce perfettamente al piano

L'operazione viene in realtà fatta con calcoli, ovviamente.

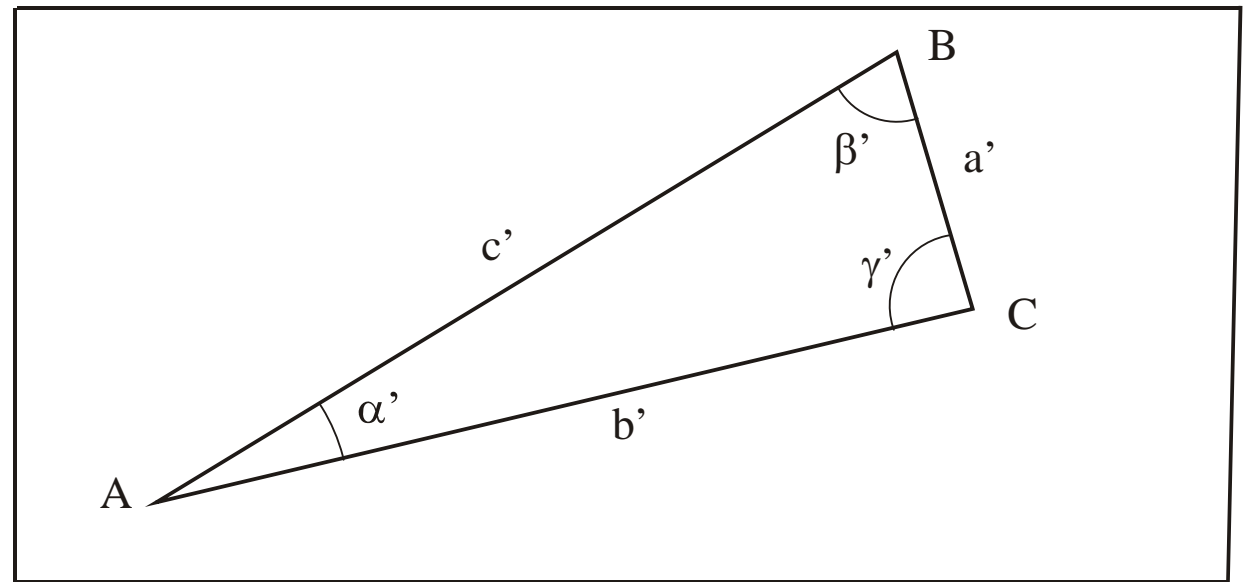
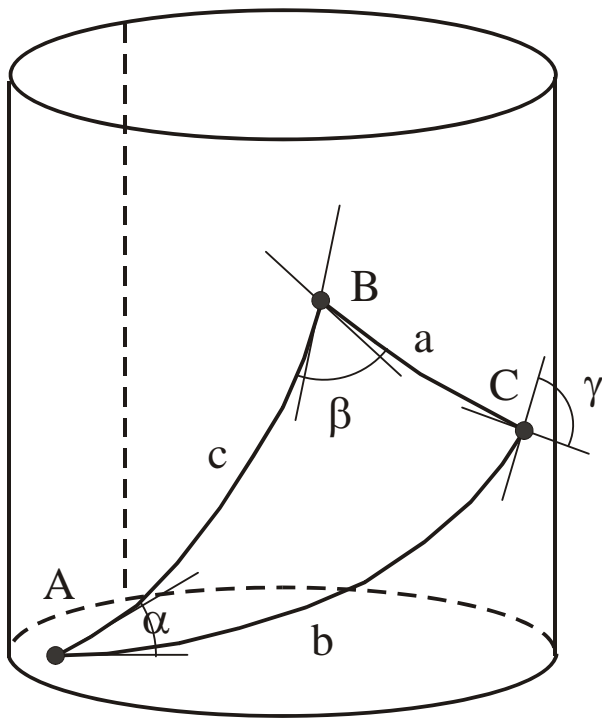


©Inghilleri

Idea di superficie sviluppabile – 3

Consideriamo ora la proiezione sul piano della superficie originaria. Se

- Gli archi di geodetica diventano rette
 - Le lunghezze degli archi di geodetica coincidono con le lunghezze dei segmenti
 - Gli angoli formati dagli archi coincidono con quelli formati dai segmenti
- si dice che **la superficie è sviluppabile**.



©Inghilleri

Esempi di superfici sviluppabili e non

Le superfici laterali di cono e cilindro sono sviluppabili.

Lo sviluppo del cilindro equivale intuitivamente a:

- tagliare la superficie laterale lungo una linea verticale
- appoggiarla su un piano
- la superficie così ottenuta aderisce perfettamente a un piano.

Lo sviluppo del cilindro può essere ovviamente essere formalizzato:

$$(\theta, d) \rightarrow (x, y) = (\theta R, d)$$

Cose analoghe per il cono.

La sfera e tanto meno l'ellissoide non sono sviluppabili. Nessuno ha mai saputo definire una proiezione dalla sfera nel piano capace di soddisfare tutte le condizioni della sviluppabilità.

Esistono solo dei buoni compromessi.

Ulteriori considerazioni sullo sviluppo del cilindro

Fra i parametri delle formule matematiche relative alla proiezione della superficie laterale del cilindro sul piano, ve ne sono alcuni che controllano la posizione dell'origine e la direzione degli assi del SR piano.

Soluzioni per la proiezione sul piano di sfere ed ellissoidi

Soluzioni a un passo

I punti dell'ellissoide vengono proiettati direttamente sul piano

Soluzioni a due passi

I punti dell'ellissoide vengono proiettati su una superficie ausiliaria sviluppabile (cilindro o cono) e da questi al piano

La seconda proiezione è indolore

Molte soluzioni

Il piano e le superfici ausiliarie possono essere variamente collocati e orientati. Per questo esistono decine di proiezioni cartografiche diverse.

Proprietà delle proiezioni cartografiche

Le proprietà di sviluppabilità (conservazione di angoli e distanze) vengono variamente soddisfatte, ma mai tutte insieme.

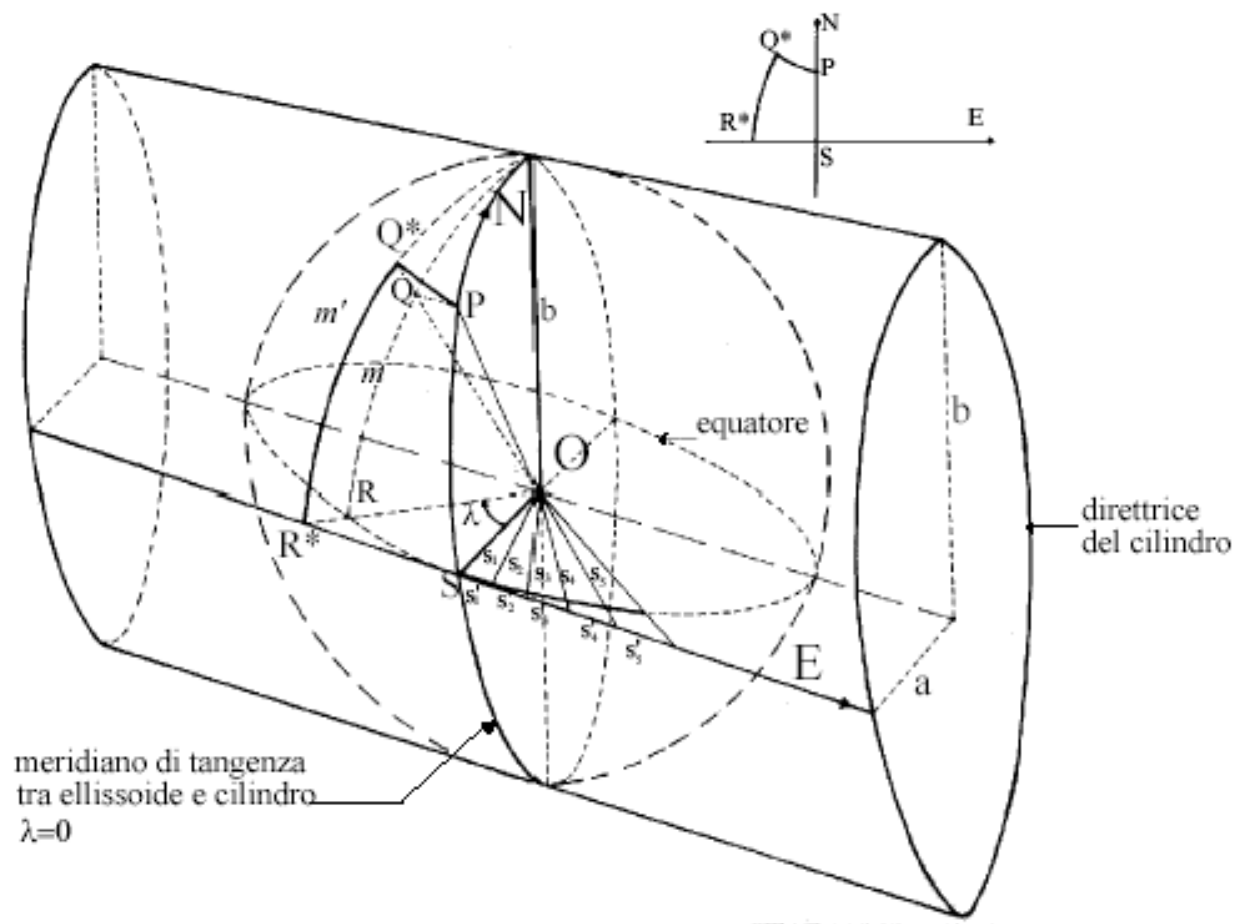
- Le trasformazioni **conformi** conservano gli angoli; il modulo di deformazione varia col posto ma non con la direzione.
- Le trasformazioni **equivalenti** conservano le aree
- Le trasformazioni **afilattiche** deformano tutto, ma in maniera ragionevole.

Le proiezioni cartografiche sono generalmente adatte a porzioni limitate dell'ellissoide. Uno stesso territorio può essere proiettato in modo più o meno soddisfacente da proiezioni diverse

La scelta della proiezione da adottare dipende dal territorio che si vuole cartografare: latitudine, estensione e conformazione (sostanzialmente quadrato, allungato in una direzione, allungato in un'altra direzione).

La proiezione di Gauss – 1

E' detta anche UTM, Universal Transverse Mercator. E' basata su un cilindro tra-
verso, il cui asse è orizzontale.

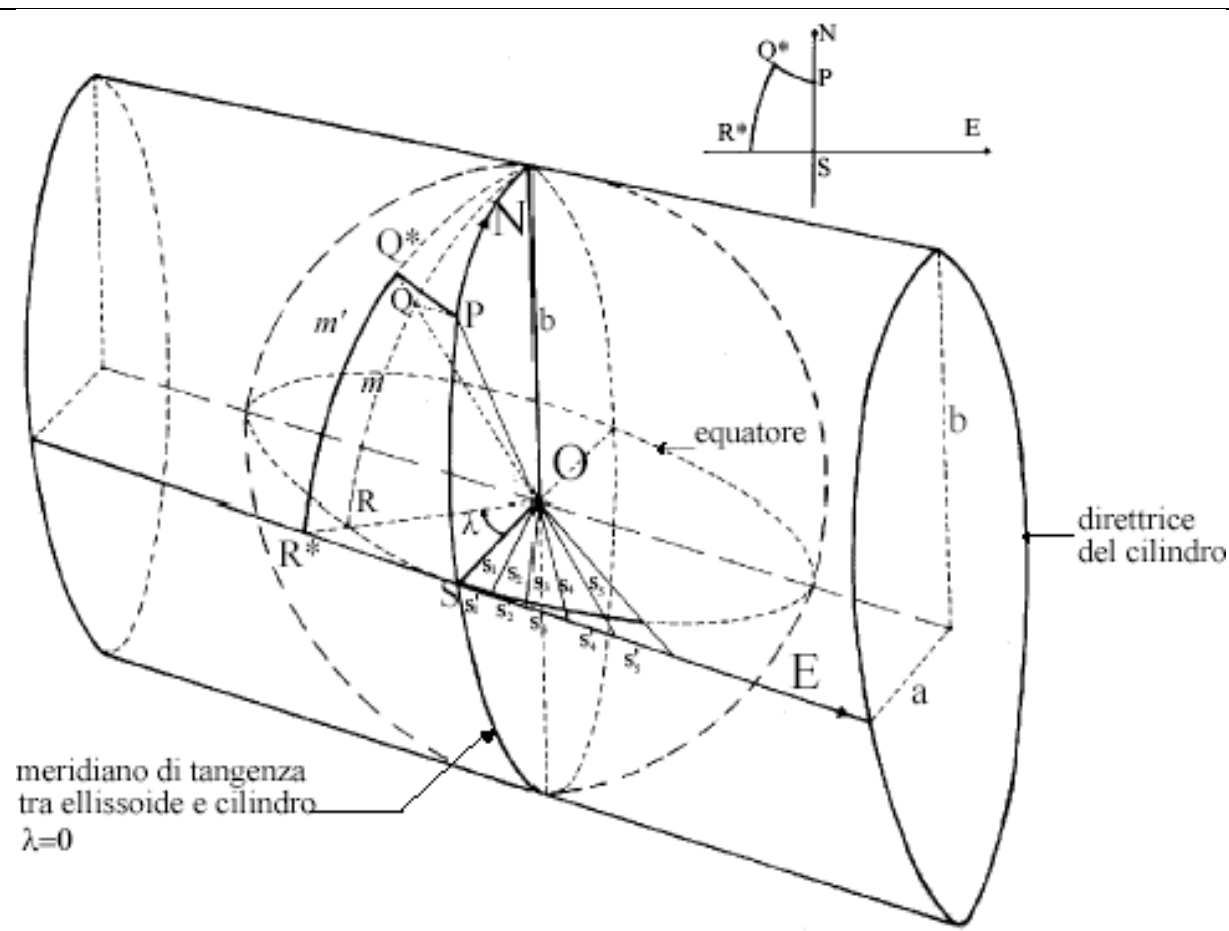


La proiezione di Gauss – 2

Tagliando l'ellissoide con un piano meridiano si ottiene l'ellisse generatrice.

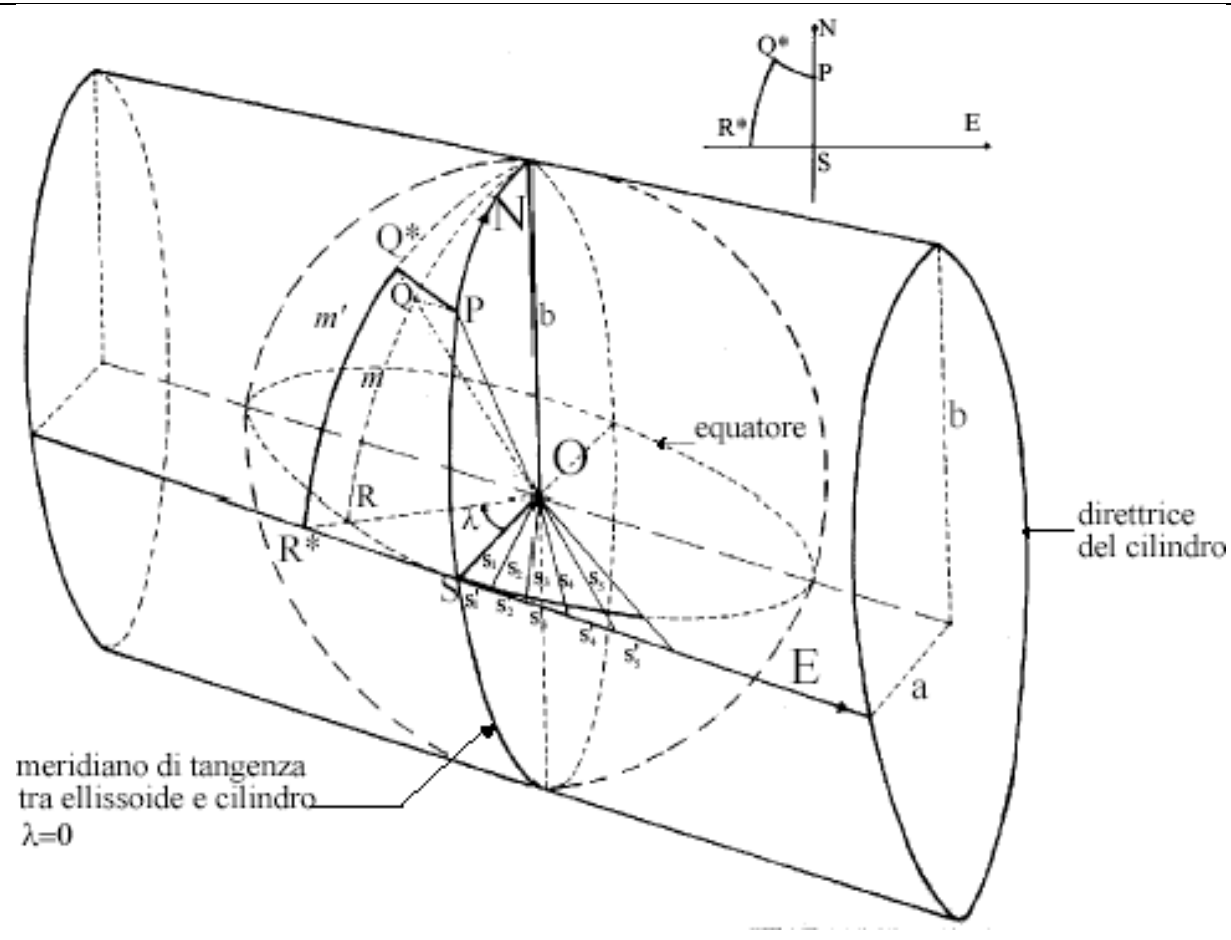
Si considera il cilindro avente come basi l'ellisse generatrice e con asse orizzontale passante per il centro dell'ellissoide e ortogonale al piano meridiano.

Il cilindro è tangente all'ellissoide nel meridiano individuato dal piano meridiano, detto *meridiano di tangenza*.



La proiezione di Gauss – 3

La proiezione. Per un certo punto Q , si considera la retta passante per Q e per in centro dell'ellissoide. La proiezione Q^* di P è il punto in cui la retta interseca l'ellissoide.



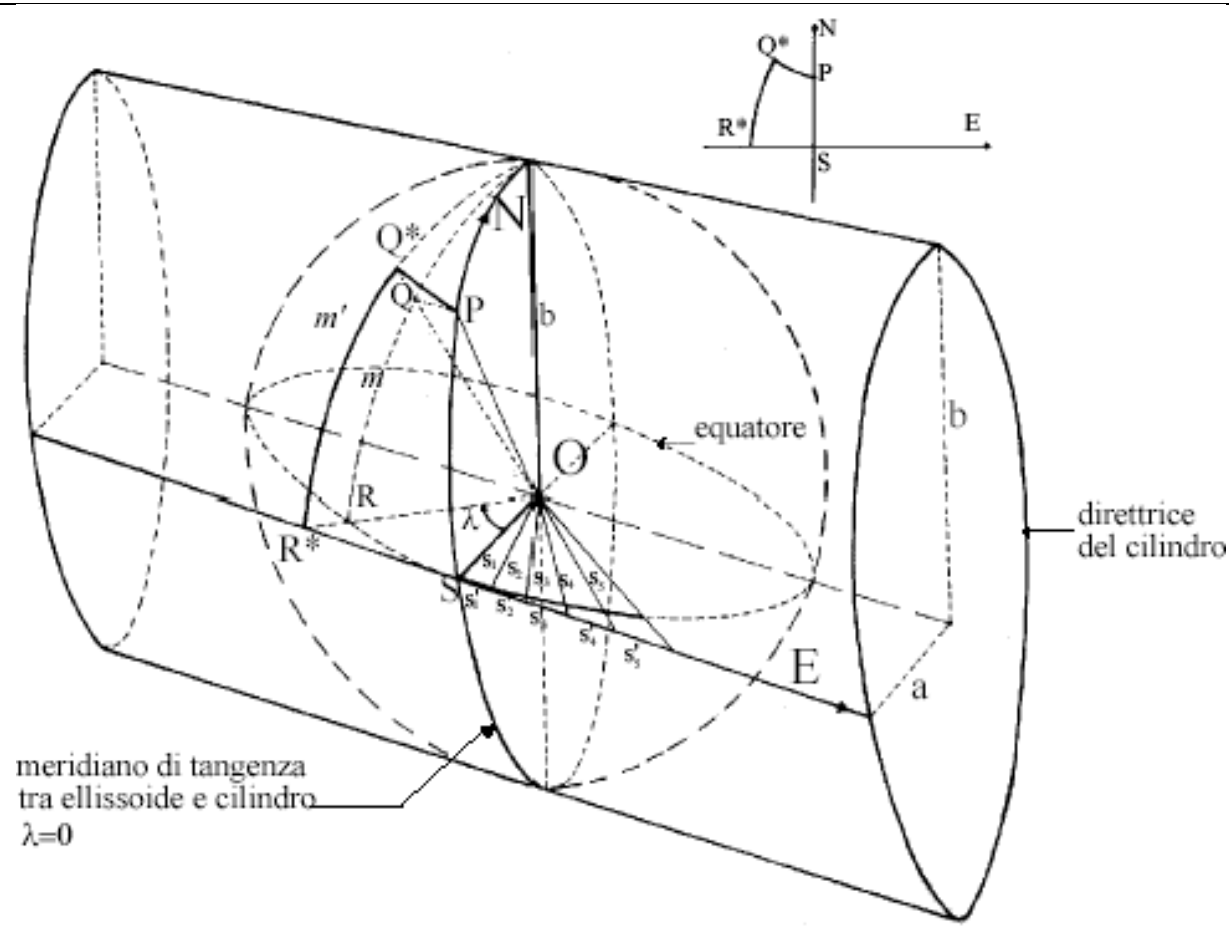
La proiezione di Gauss – 4

Il punto viene ulteriormente proiettato su un piano nella modalità pittoricamente corrispondente al taglio della superficie cilindrica e alla sua stesura su un piano.

Sul piano finale viene istituita una coppia di assi cartesiani detti Est e Nord (E, N).

La proiezione è conforme: conserva gli angoli.

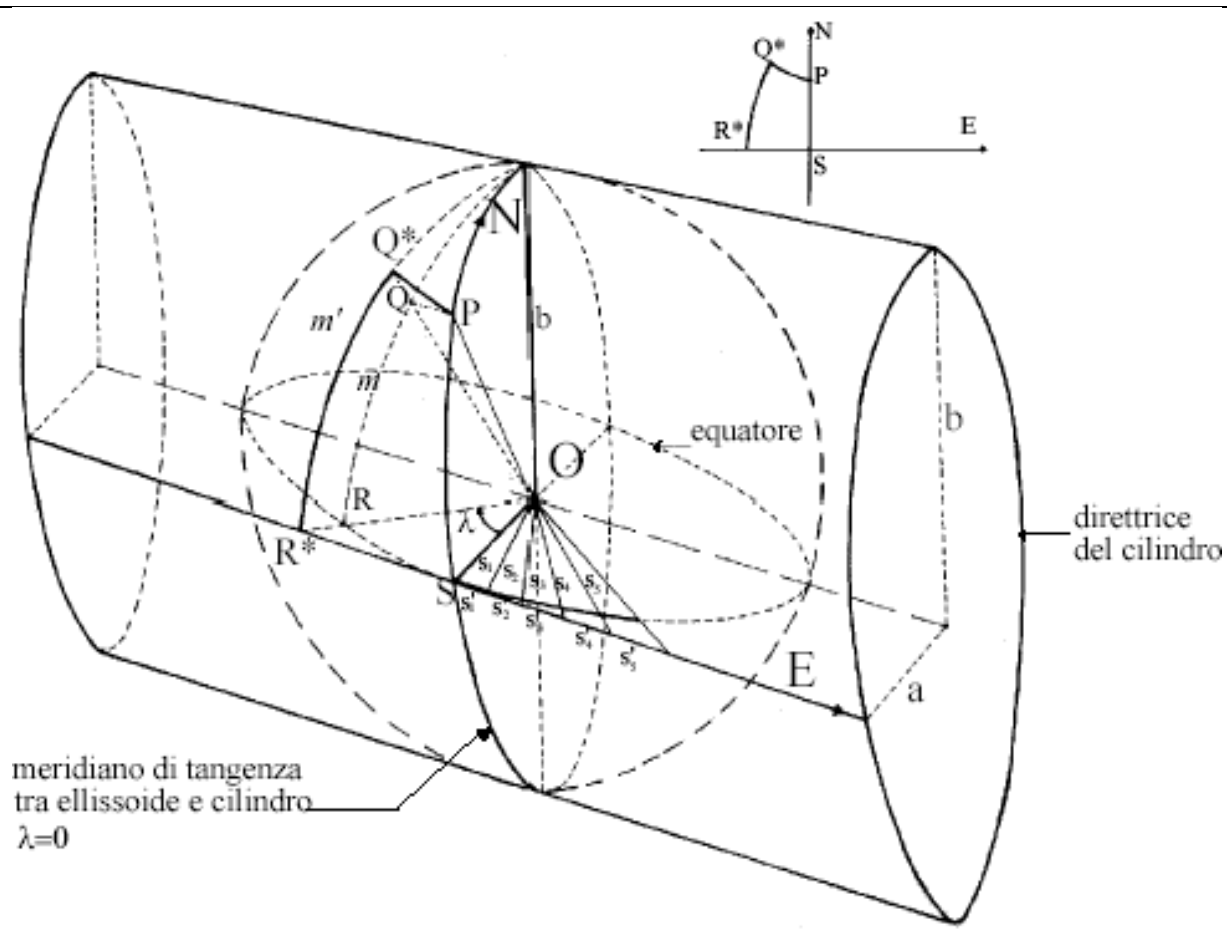
Le distanze vengono deformate



La proiezione di Gauss – 5

La proiezione del cilindro sul piano avviene in modo che:

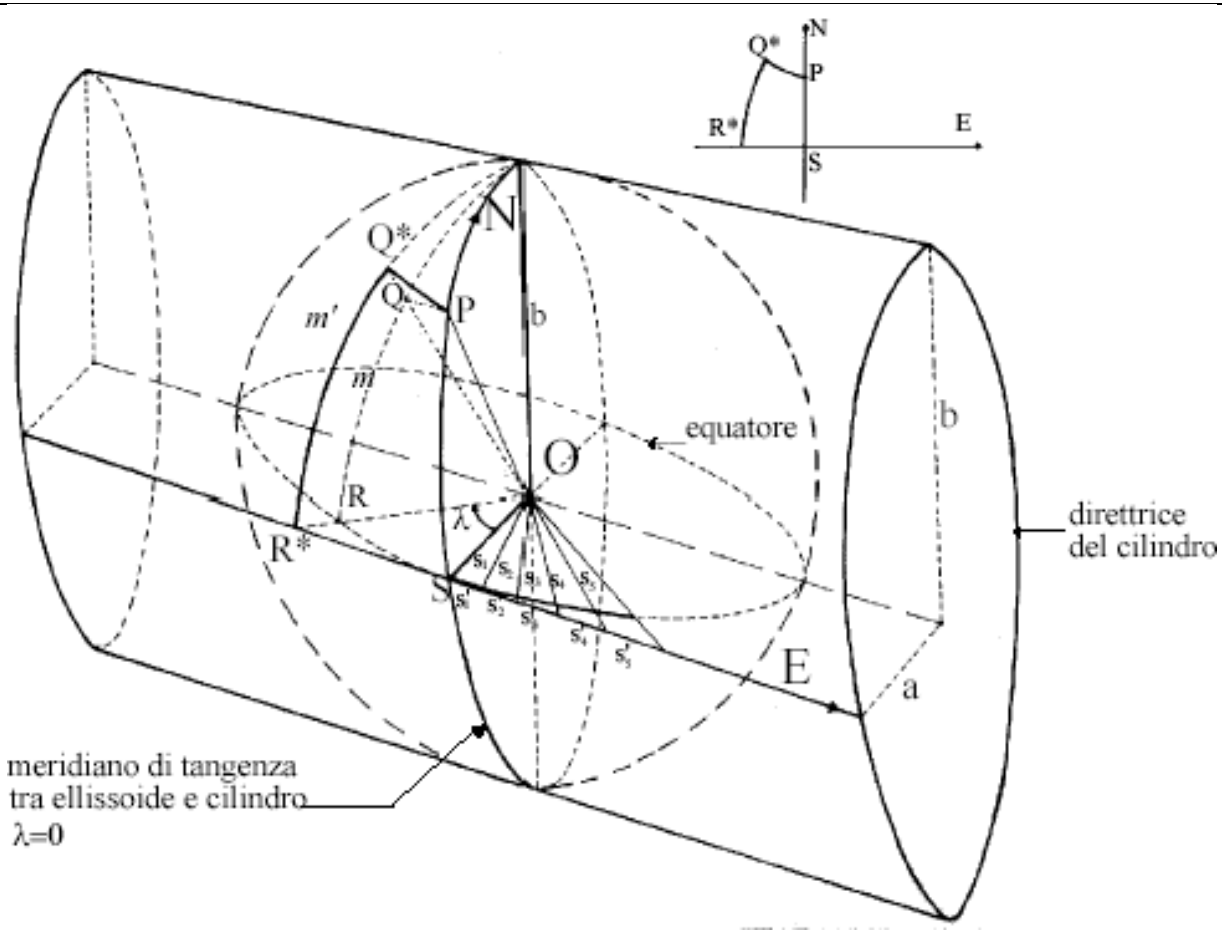
- il punto all'intersezione fra equatore e meridiano di tangenza diventa l'origine di (E, N)
- i punti che si trovano sull'equatore vengono proiettati sull'asse E
- i punti che si trovano sul meridiano di tangenza vengono proiettati sull'asse N



La proiezione di Gauss – 6

La proiezione è conforme: conserva gli angoli.

Le distanze vengono deformate



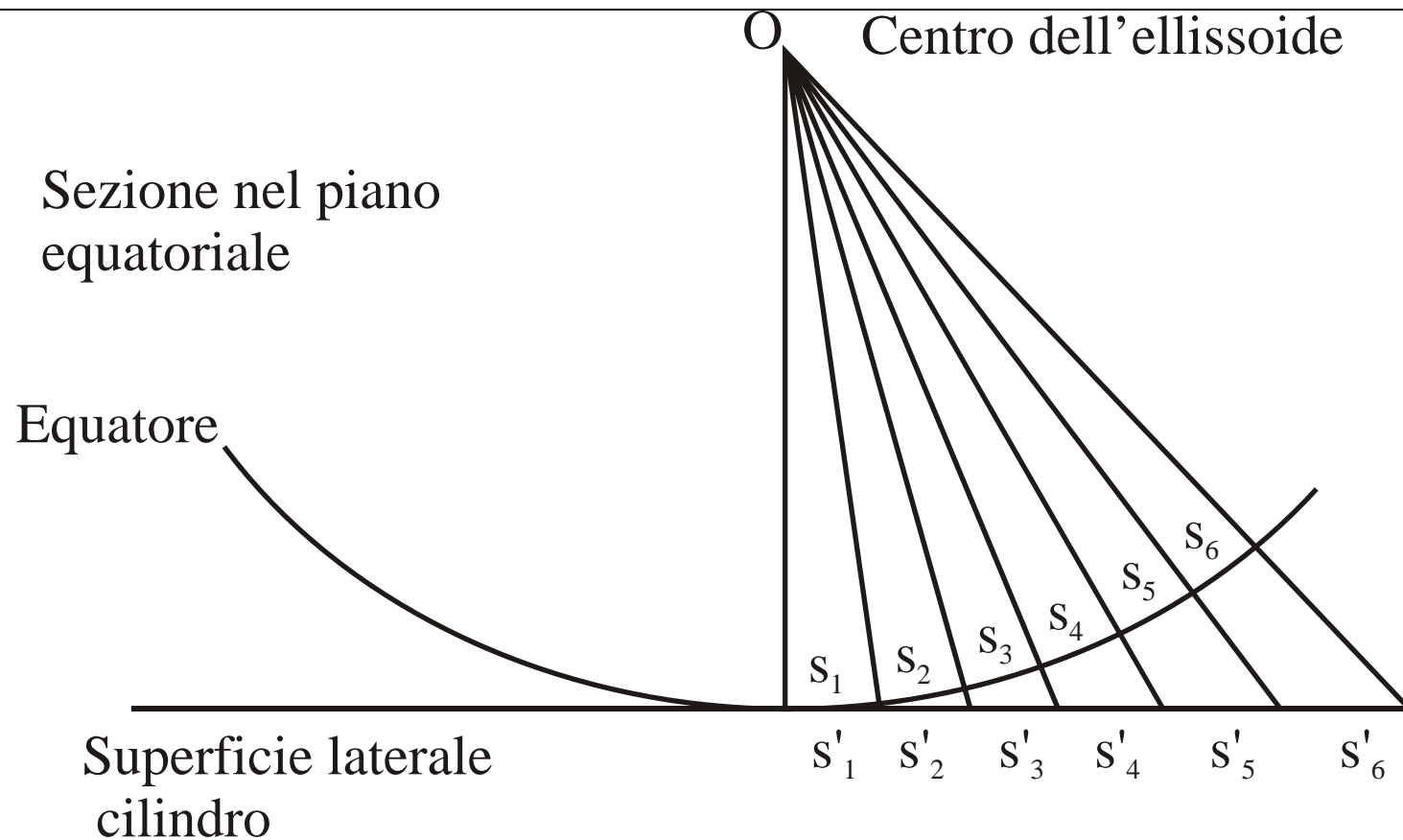
La sequenza della proiezione di Gauss – 1

(φ, λ)	Coordinate ellissoidiche
(x, y)	Coordinate sul cilindro, non meglio specificate
$(E^{(1)}, N^{(1)})$	Coordinate sul piano cartografico

La deformazione delle distanze – 1

Consideriamo la sezione equatoriale

Consideriamo diversi punti sull'equatore, equispaziati.
Consideriamo le loro proiezioni sul cilindro.
Il rapporto $\mu = s'_i/s_i$ è prossimo a 1 intorno al meridiano di tangenza

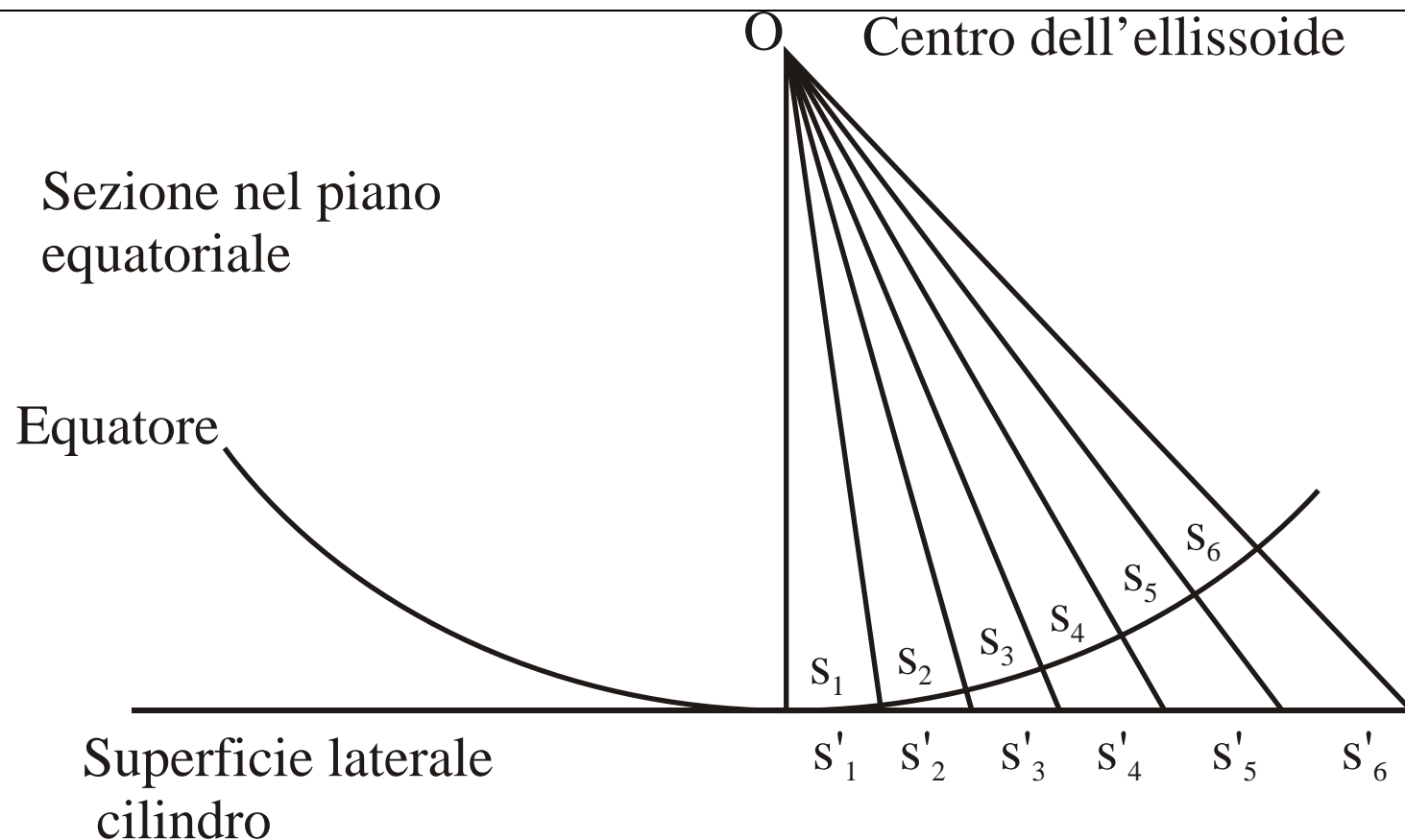


La deformazione delle distanze – 2

Il rapporto μ cresce allontanandosi dal meridiano

Deformazione delle distanze

Il rapporto μ può raggiungere valori abnormi



La deformazione delle distanze – 3

In generale

$$d_c = \mu d_e$$

d_c - distanza misurata sulla carta

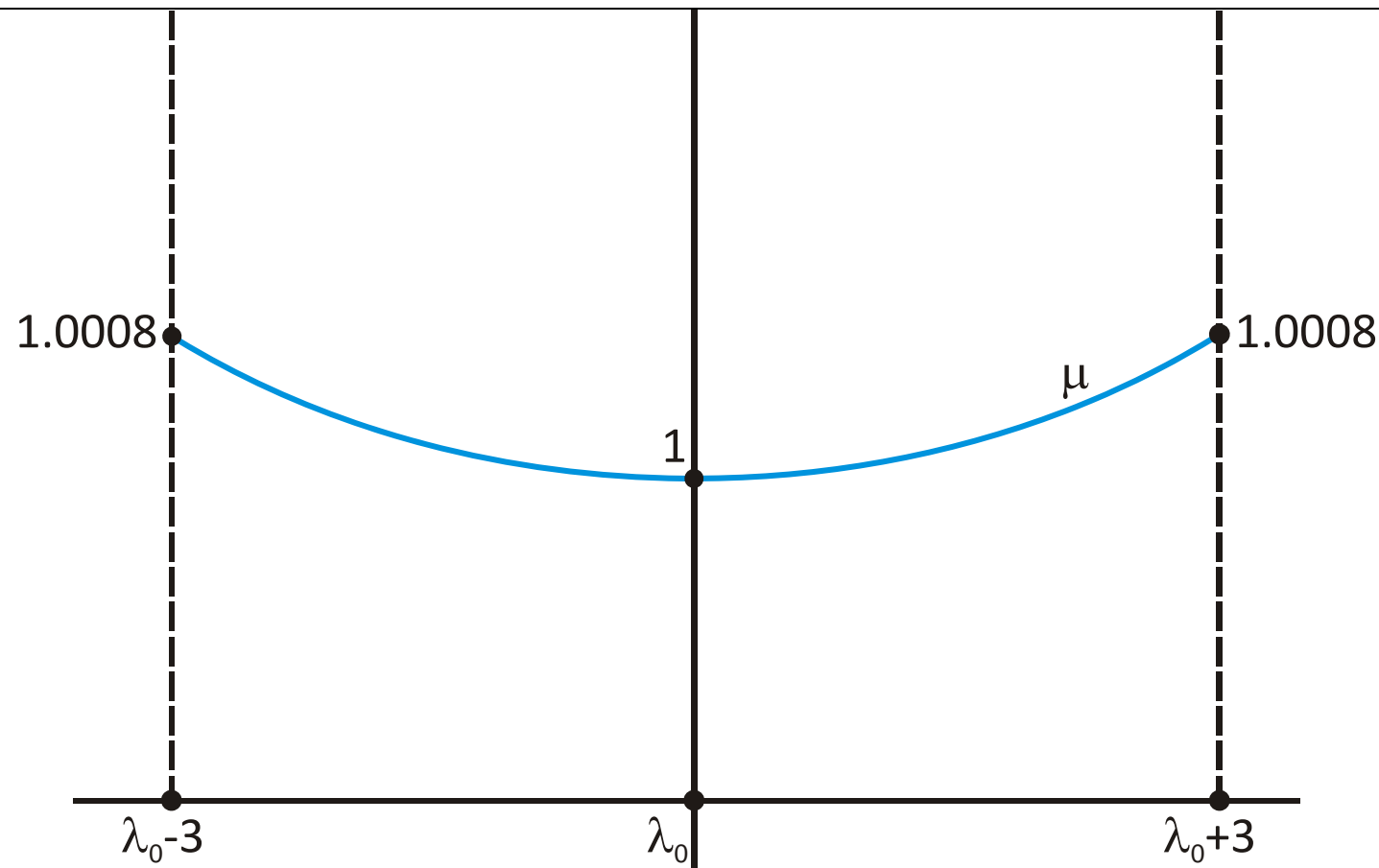
d_e - distanza misurata sull'ellissoide; si può assumere che coincida con quella misurata sul terreno

μ - modulo di deformazione lineare; varia col posto

La deformazione delle distanze – 4

Per un intorno di ± 3 gradi attorno al meridiano di tangenza, il coefficiente μ si comporta come indicato dalla figura

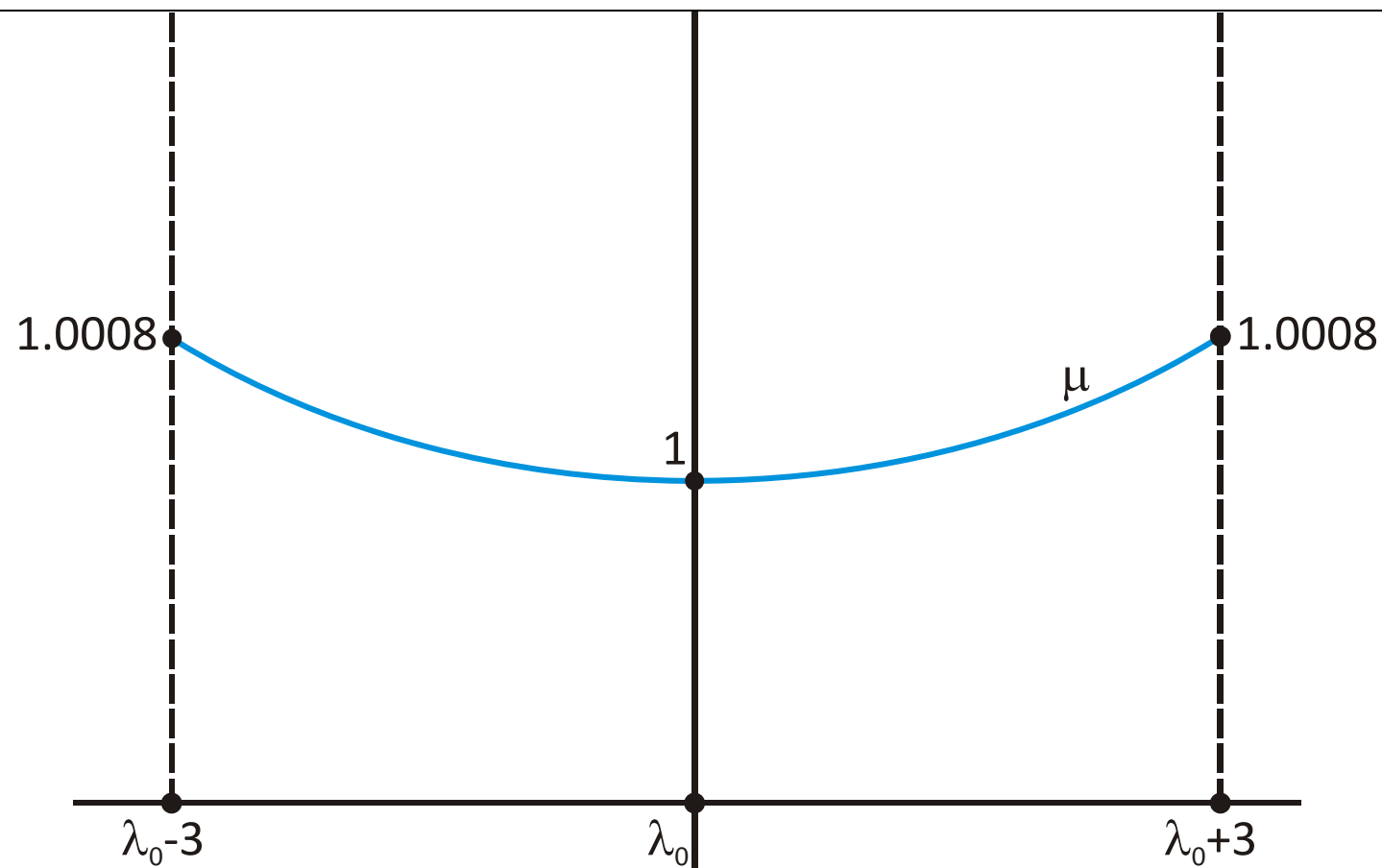
μ vale 1 presso il meridiano di tangenza.
Cresce allontanandosi dal meridiano fino al valore di 1.0008.
Le distanze proiettate sono maggiori di quelle originarie dunque si ha dilatazione.



[andamento_coefficiente_mu_1.cdr; wmf]

La deformazione delle distanze – 5

Con fusi di 6° , in caso di cilindro tangente il modulo μ corre da 1 a 1.0008; la deformazione massima è dello 0,8 per mille, corrispondente a 80 cm al km.



[andamento_coeficiente_mu_1.cdr; wmf]

La sequenza della proiezione di Gauss – 2

Idea per limitare la deformazione delle distanze: moltiplicare le coordinate $(E^{(1)}, N^{(1)})$ per un coefficiente μ_0 minore di 1 in modo da contrarre un poco tutte le coordinate.

(φ, λ)	Coordinate ellissoidiche
(x, y)	Coordinate sul cilindro, non meglio specificate
$(E^{(1)}, N^{(1)})$	Coordinate sul piano cartografico
$(E^{(2)}, N^{(2)}) = \mu_0 (E^{(1)}, N^{(1)})$	Dopo la contrazione

La deformazione delle distanze – 6

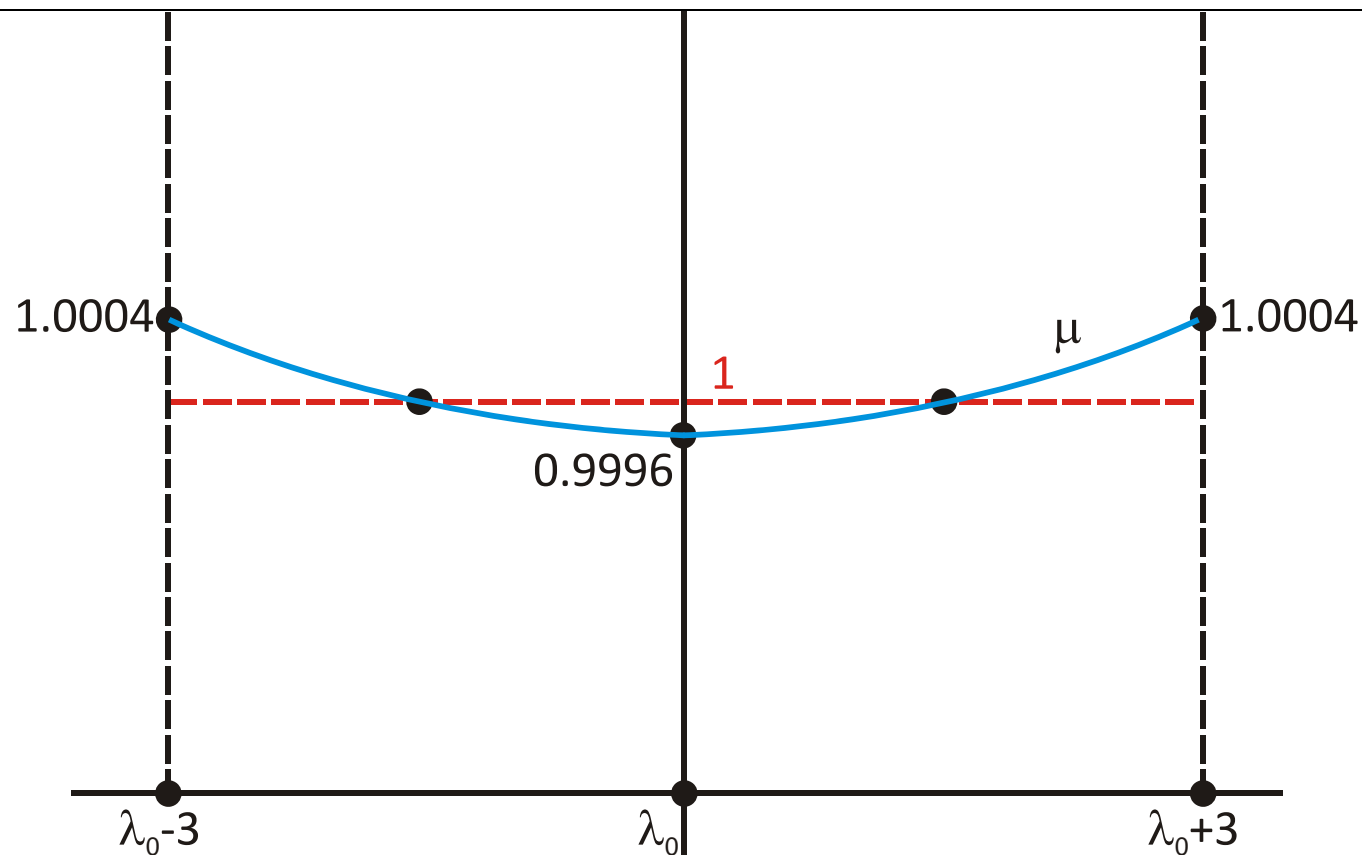
Dopo la contrazione delle coordinate, la situazione è quella della figura

Presso il meridiano di tangenza si ha $\mu = 0.9996$,
cioè contrazione.

Si hanno due regioni di
neutralità.

Ai bordi si ha $\mu = 1.0004$,
cioè ancora dilatazione.

La deformazione massima
è 0.4 per mille, corrispon-
dente a 40 cm al km: la de-
formazione è stata dimezzata.

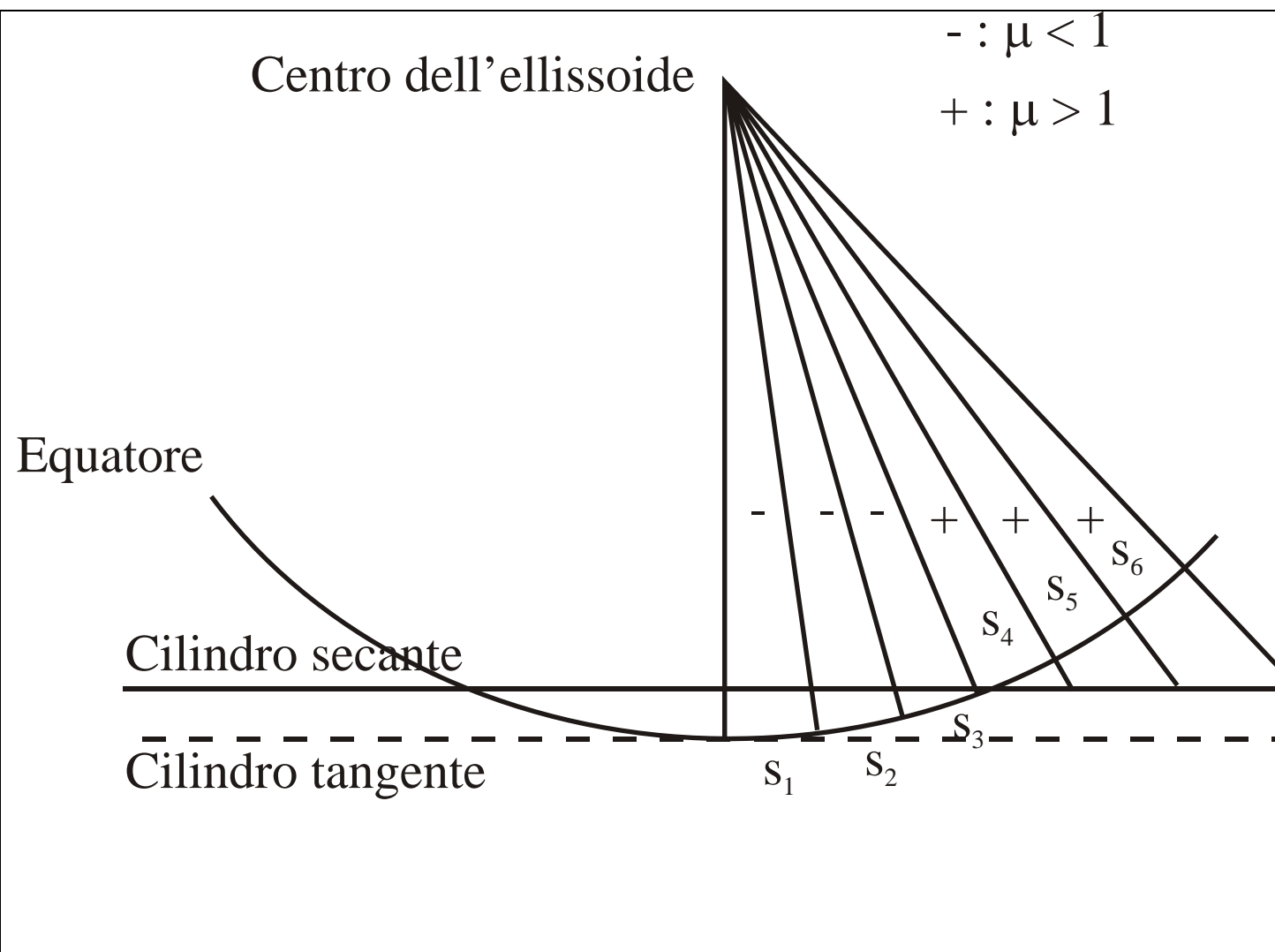


[andamento_coefficiente_mu_2.cdr; wmf]

La deformazione delle distanze – 7

Dal punto di vista geometrico, la contrazione delle coordinate è equivalente all'uso di un cilindro avente per base un'ellisse di parametri $\mu_0 a$ e $\mu_0 b$, invece che a e b .

Si parla di cilindro secante e di meridiano centrale.



Il falso Est

I punti che si trovano sul meridiano di tangenza hanno $Est=0$

Muovendosi verso Est (nell'emisfero Nord) la coordinata Est è positiva; muovendosi verso Ovest la coordinata Est è negativa

Si vuole che le coordinate siano tutte positive; si aggiunge alle coordinate Est una quantità costante opportuna detta falso Est, talvolta indicata con E_0

In questo modo si ha, per i punti del meridiano di tangenza, $E = E_0$. Per tutti i punti vale $E > 0$.

La sequenza della proiezione di Gauss – 3

Dopo l'applicazione del falso Est.

(φ, λ)	Coordinate ellissoidiche
(x, y)	Coordinate sul cilindro, non meglio specificate
$(E^{(1)}, N^{(1)})$	Coordinate sul piano cartografico
$(E^{(2)}, N^{(2)}) = \mu_0 (E^{(1)}, N^{(1)})$	Dopo la contrazione
$(E^{(3)}, N^{(3)}) = (E_0 + E^{(2)}, N^{(2)})$	

I fusi

La scelta di un meridiano centrale e la successiva costruzione di un cilindro di proiezione consente di mappare solo una regione abbastanza ristretta attorno al meridiano, se si vogliono contenere le deformazioni.

Una regione dell'ellissoide caratterizzata da

$$|\lambda - \lambda_0| \leq c$$

è detto fuso di ampiezza $2c$.

Se si deve mappare un territorio ampio, è necessario suddividerlo in diversi fusi contigui, individuare in ciascuno un meridiano centrale, costruire altrettanti cilindri e fare tante proiezioni quanti sono i fusi.

I parametri della proiezioni di Gauss

I parametri sono

- ampiezza del fuso
- coefficiente μ_0
- falso Est E_0

Dal punto di vista matematico, è possibile assortire tali parametri in modo sostanzialmente arbitrario.

I sistemi cartografici

Indichiamo con tale termine il complesso costituito dalle leggi matematiche della proiezione e da una particolare scelta dei parametri.

Ne prendiamo in considerazione due

- Il sistema UTM
- Il sistema italiano Gauss-Boaga

Il sistema UTM - 1

UTM: Universal Transverse Mercator, proiezione universale traversa di Mercatore (insigne cartografo del '500)

E' un sistema basato sulla proiezione di Gauss per cartografare tutta la Terra

- $\mu_0 = 0,9996$
- Estensione fusi: 6°
- $E_0 = 500000$

L'ellissoide è suddiviso in 60 fusi, numerati. Si parte dal punto agli antipodi di Greenwich e ci si muove nell'emisfero Ovest.

Greenwich è l'estremo Est del fuso 30 e l'estremo Ovest del Fuso 31.

Il sistema UTM - 2

L'Italia si estende in longitudine da 6° a $18^\circ 30'$ circa, dunque è coperta dai fusi 32, 33 e 34

- Fuso 32 - $6^\circ < \lambda < 12^\circ$; $\lambda_0 = 9^\circ$
- Fuso 33 - $12^\circ < \lambda < 18^\circ$; $\lambda_0 = 15^\circ$
- Fuso 34 - $18^\circ < \lambda < 24^\circ$; $\lambda_0 = 21^\circ$

Le coordinate assegnate ai punti sono univoche all'interno del fuso, ma non lo sono se si prendono in considerazione più fusi.

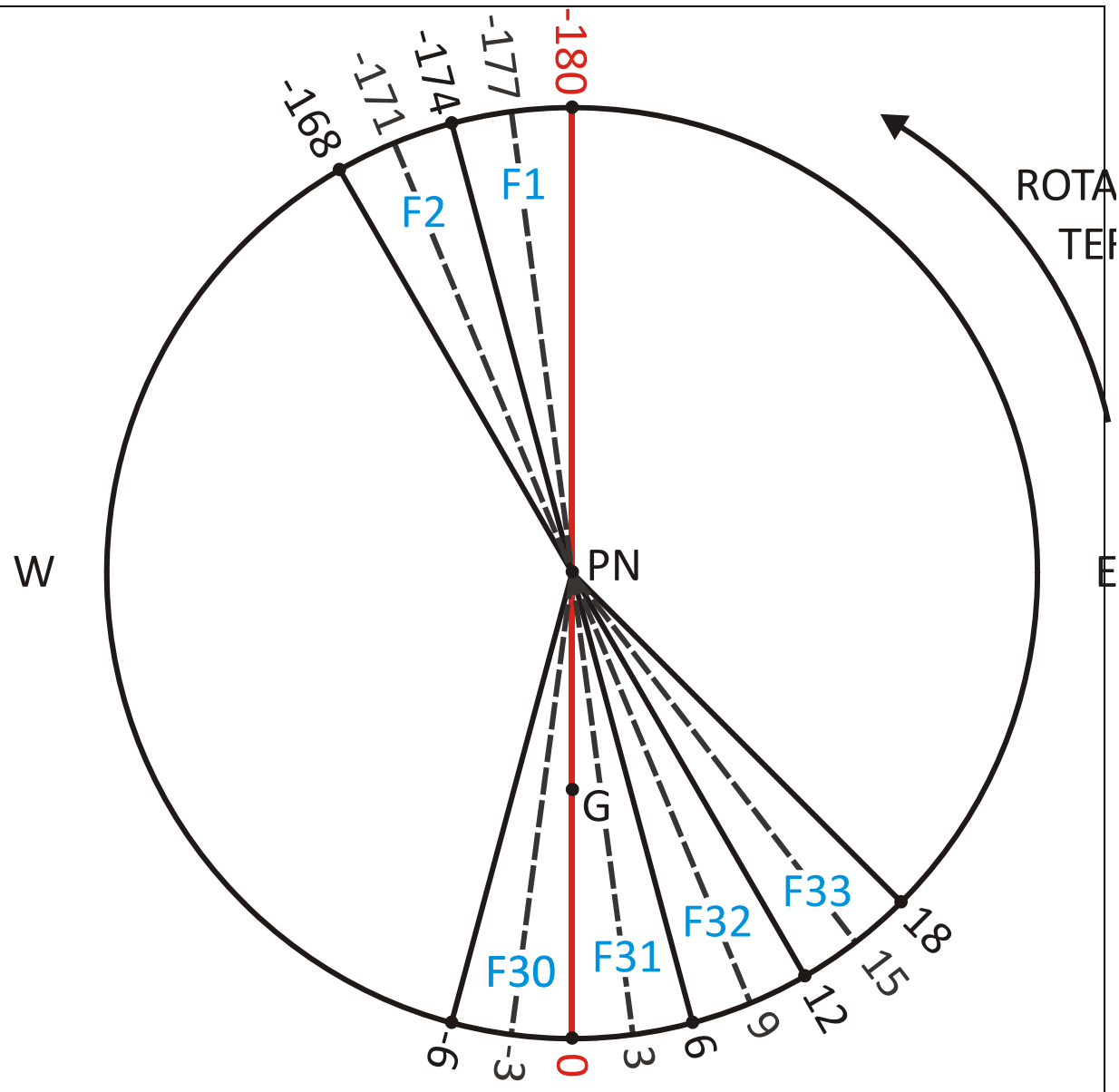
Il punto (550000, 5000300) esiste in ognuno dei 60 fusi.

Quando si assegnano coordinate nel sistema UTM bisogna fornire, insieme alle coordinate del punto, il fuso al quale appartiene.

Esempio, $P=(550000, 5000300)$, F32

Il sistema UTM – 3

[denominazione_fusi_utm2.cdr; wmf]



Il sistema cartografico italiano, detto Gauss-Boaga - 1

Boaga è stato un insigne geodeta italiano che negli anni '40 ha dato al sistema cartografico italiano l'assetto che ha ancora oggi.

Il datum è Roma40.

Per la deformazione cartografica si ha $\mu_0 = 0,9996$

Esistono due fusi, Ovest ed Est

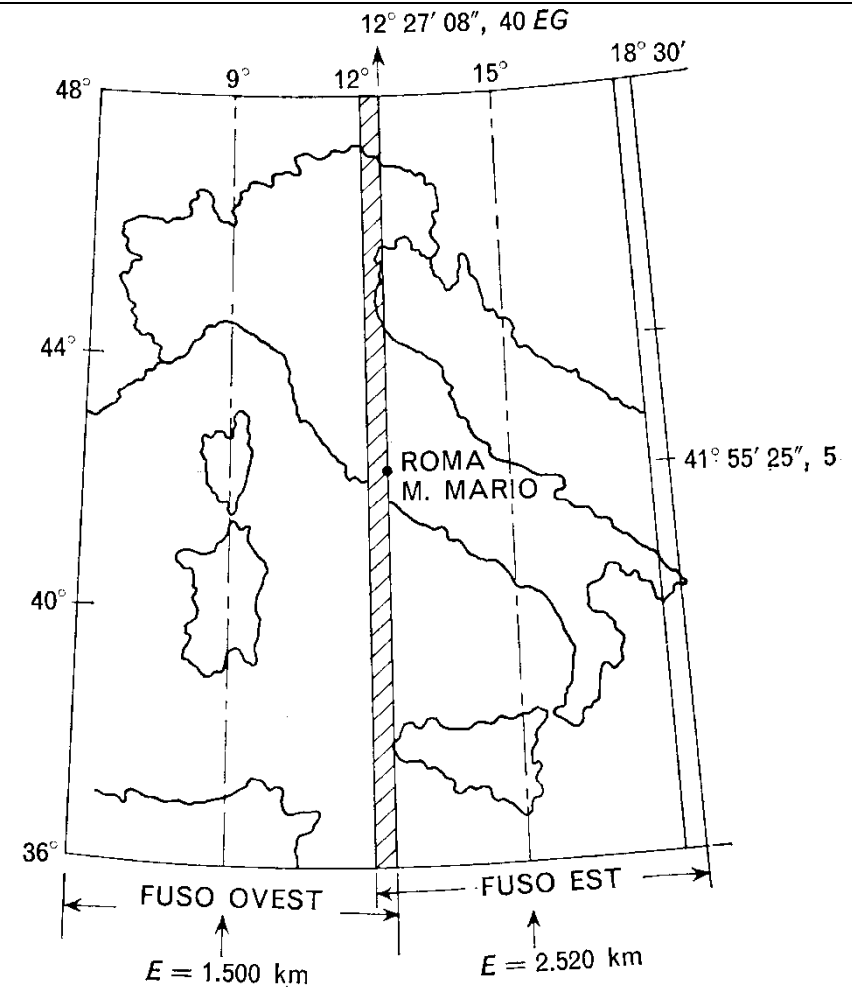
- Fuso Ovest - $6^\circ < \lambda < 12^\circ 27' 08.4''$; $\lambda_0 = 9^\circ$; $E_0 = 1500000$, estremo Est è Monte Mario;
- Fuso Est - $11^\circ 57' 08.4'' < \lambda < 18^\circ 30'$; $\lambda_0 = 15^\circ$; $E_0 = 2520000$ estremo Ovest è 30' a Ovest di MM

Il sistema cartografico italiano, detto Gauss-Boaga - 2

Ci sono deroghe alla regola dei 6° di ampiezza per

- Consentire la sovrapposizione fra fusi e agevolare la mappatura di zone a cavallo dei fusi
- Comprendere nel fuso Est una piccola propaggine costituita dalla punta della Puglia, in modo da evitare l'aggiunta di un terzo fuso

I falsi Est sono differenziati: si ha univocità completa.



Ampiezza di un fuso di 6° in coordinate cartografiche

Mettiamoci all'equatore. Adottiamo l'approssimazione sferica per cui

$$R_T = 6370 \text{ km}$$

La semi-ampiezza d di un fuso è ottenibile dalla proporzione

$$\frac{d}{2\pi R_T} = \frac{3}{360} \rightarrow d = \frac{2\pi R_T}{120} \approx 330 \text{ km}$$

Nel fuso Ovest si ha

$$1200000 \leq E \leq 1800000$$

Nel fuso Est si ha

$$2220000 \leq E \leq 2820000$$

Non è possibile che punti diversi abbiano le stesse coordinate Gauss-Boaga

Ampiezza di un fuso di 6° in coordinate cartografiche – 2

Ripetiamo il calcolo alla minima latitudine italiana, 36°

Il raggio del parallelo è

$$R = R_T \cos(36^\circ) = 5153 \text{ km}$$

L'ampiezza massima dei fusi per il territorio italiano è dunque 270 km.

Riepilogo ellissoidi e datum

Ellissoidi

- Hayford
- WGS-84
- Bessel

Datum

- Roma40 – Hayford
- ED50 – Hayford
- WGS84 – WGS84

Sistemi cartografici interessanti per l'Italia

Gauss-Boaga. Proiezione di Gauss strutturata in fusi, in modo analogo a UTM, ma tuttavia diverso. Datum Roma40

UTM-WGS84. Proiezione UTM basata sul datum WGS84

UTM-ED50. Proiezione UTM basata sul datum ED50

UTM-Roma40. Esiste?

Nelle carte italiane c'è sempre il riferimento a GB. Spesso quello a UTM-ED50, a volte semplicisticamente indicato con UTM.

In un futuro abbastanza prossimo le carte saranno riferite a UTM-WGS84.

Caratteristiche di un eventuale UTM-Roma40

Consideriamo un punto P avente coordinate GB

$$\mathbf{x}_P^{GB} = (1786287.01, 4647159.22)$$

Che coordinate avrebbe in UTM_RM40?

Siamo nel fuso Ovest

$$E^{GB} = E^{(2)} + E_o^{GB} \rightarrow E^{(2)} = E^{GB} - E_o^{GB}$$

$$\begin{aligned} E^{UTM} &= E^{(2)} + E_o^{UTM} = E^{GB} - E_o^{GB} + E_o^{UTM} = \\ &= E^{GB} - 1000000 \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{x}_P^{UTM-RM40} = (786287.01, 4647159.22)$$

Giovanni Boaga

Giovanni Boaga (Trieste, 28 febbraio 1902 – Tripoli, 17 novembre 1961) è stato un matematico e un geodeta italiano.

Fu professore di geodesia e topografia all'Università di Pisa e di Roma; fu geodeta capo all'Istituto Geografico Militare di Firenze, dove si occupò di cartografia e del catasto terreni.

Boaga ideò la proiezione di Gauss-Boaga, modificando la proiezione di Gauss nella rappresentazione cartografica dell'Italia per l'Istituto Geografico Militare.



[Boaga_2.tif]

Gerardo Mercatore

Gerardus Mercator , latinizzazione di Gerard de Cremer (Rupelmonde, 5 marzo 1512 – Duisburg, 2 dicembre 1594) è stato un matematico, astronomo e cartografo fiammingo.

Noto anche come Gerhard Mercator e Gerardo Mercatore in italiano, divenne celebre per i suoi studi nella cartografia e per aver inventato un sistema di proiezione che porta il suo nome (proiezione di Mercatore).



[Gerardus_Mercator.jpg]

SCARTI

La proiezione di Gauss – 6 – La deformazione delle distanze

Nel caso di cilindro secante, si ha contrazione sul meridiano di tangenza. Allontanandosi essa diminuisce e si annulla in due regioni simmetriche rispetto al meridiano centrale.

Oltrepassate le regioni neutre, si ha dilatazione.

Per contenere le deformazioni, si applica la proiezione a uno *spicchio* di ellissoide detto **fuso**. In genere i fusi della proiezione di Gauss hanno una estensione di 6° , da -3° a $+3^\circ$ rispetto al meridiano di tangenza.

Con fusi di 6° , in caso di cilindro tangente il modulo μ corre da 1 a 1,0008; la deformazione massima è dello 0,8 per mille, corrispondente a 80 cm al km.

Scegliendo opportunamente un cilindro secante, si fa in modo che il modulo μ corra da 0,9996 a 1,0004. La deformazione assoluta viene dimezzata, 40 cm al km.