Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET

Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

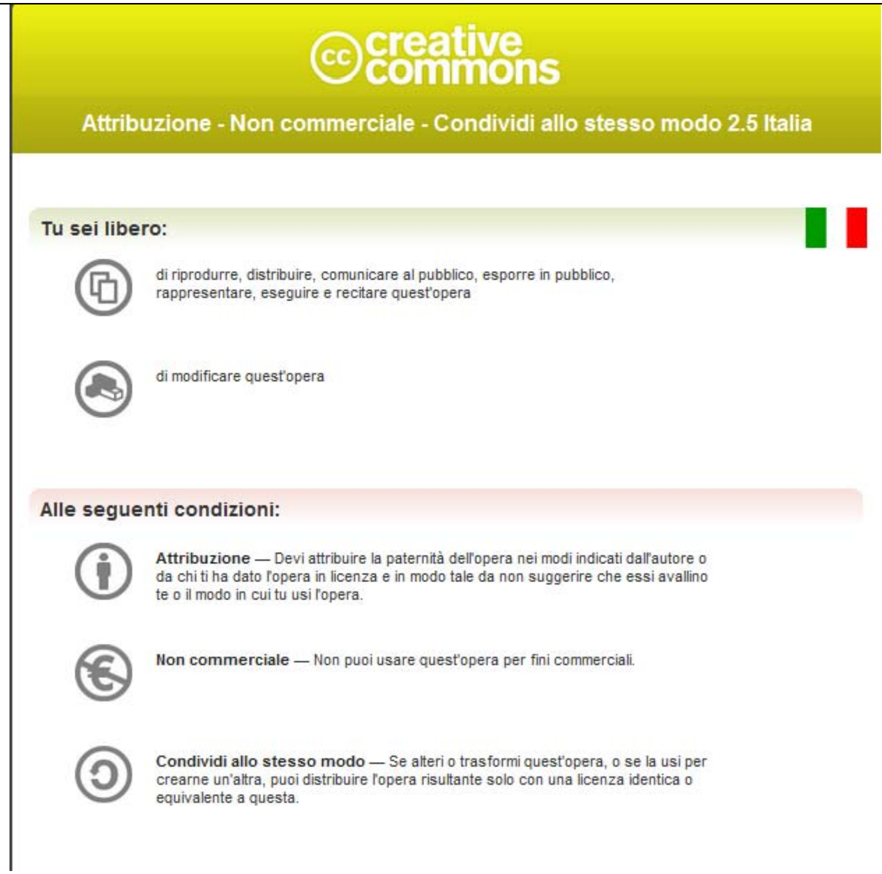
GPS - Il posizionamento assoluto

Dispense

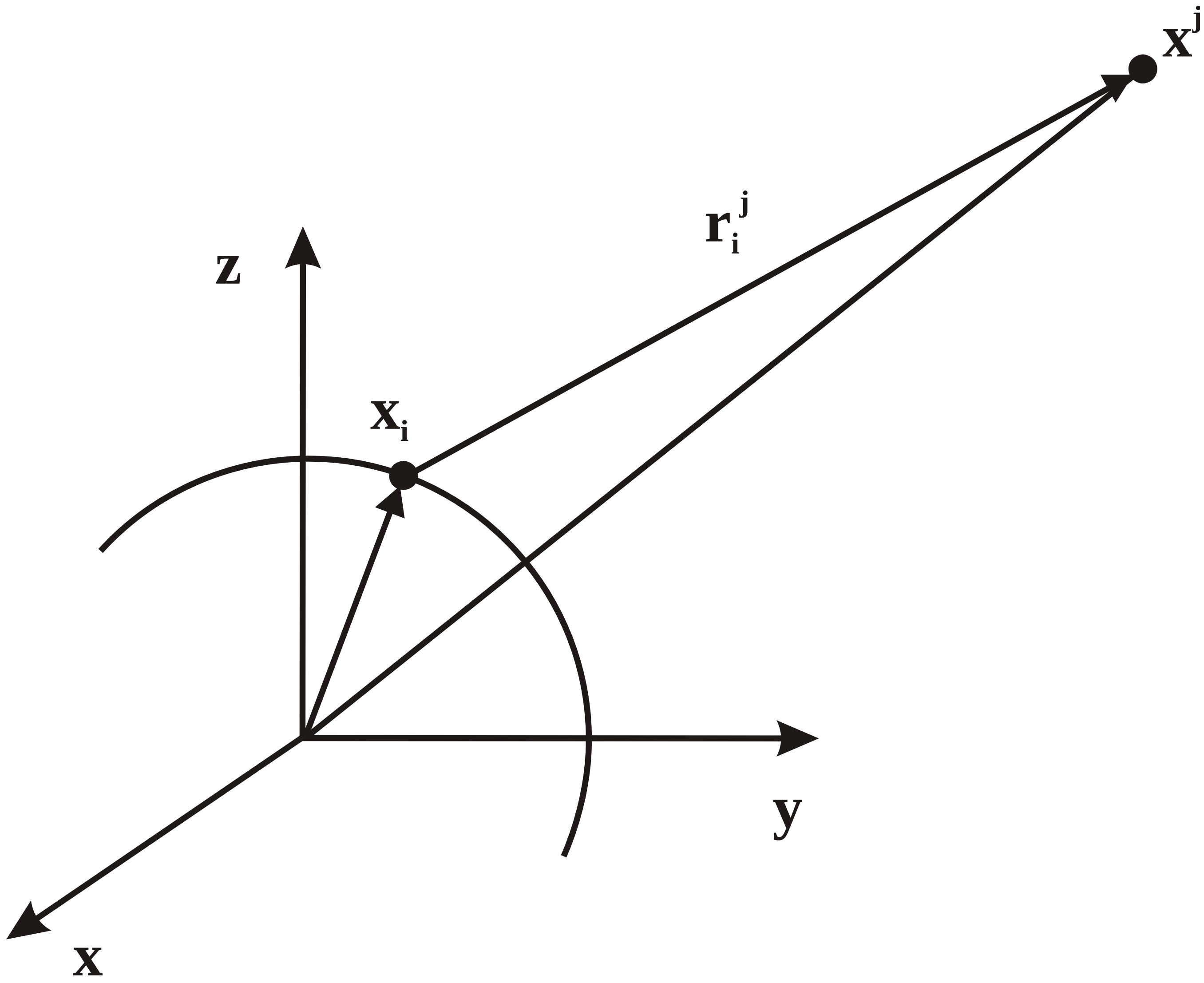
Licenza

Questa presentazione è © 2010 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Equazione fondamentale del posizionamento satellitare - 1



Equazione fondamentale del posizionamento satellitare – 2

L'equazione fondamentale coinvolge

- la posizione $\mathbf{x}_i$ dell'*i*-esimo punto incognito
- la posizione $\mathbf{x}^j$ occupata dal *j*-esimo satellite
- il vettore posizione del satellite rispetto al punto, $\mathbf{r}_i^j$

Il disegno evidenzia

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{r}_i^j = \mathbf{x}^j \tag{1}$$

da cui

$$\mathbf{r}_i^j = \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \tag{2}$$

E' una relazione vettoriale, avente tre componenti

Equazione fondamentale del posizionamento satellitare – 3

Dalla relazione vettoriale si può ricavare una scalare, passando ai moduli

$$r_i^j = \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \tag{3}$$

$\mathbf{x}^j$ è nota dalle effemeridi

$\mathbf{x}_i$ è l'incognita (3 componenti)

r_i^j viene misurata dal ricevitore

Se si osservano s satelliti, si può scrivere un sistema

$$r_i^j = \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{4}$$

e cercare di risolverlo rispetto a $\mathbf{x}_i$. Sono evidentemente necessarie almeno 3 equazioni, dunque è necessario osservare altrettanti satelliti, come minimo.

Equazione del compasso

Consideriamo ancora la (3)

$$r_i^j = \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\|$$

Se r_i^j è nota (in quanto misurata) e se $\mathbf{x}^j$ è nota (dalla effemeridi) la equazione considerata è l'equazione di una sfera avente centro in $\mathbf{x}^j$ e avente raggio r_i^j.

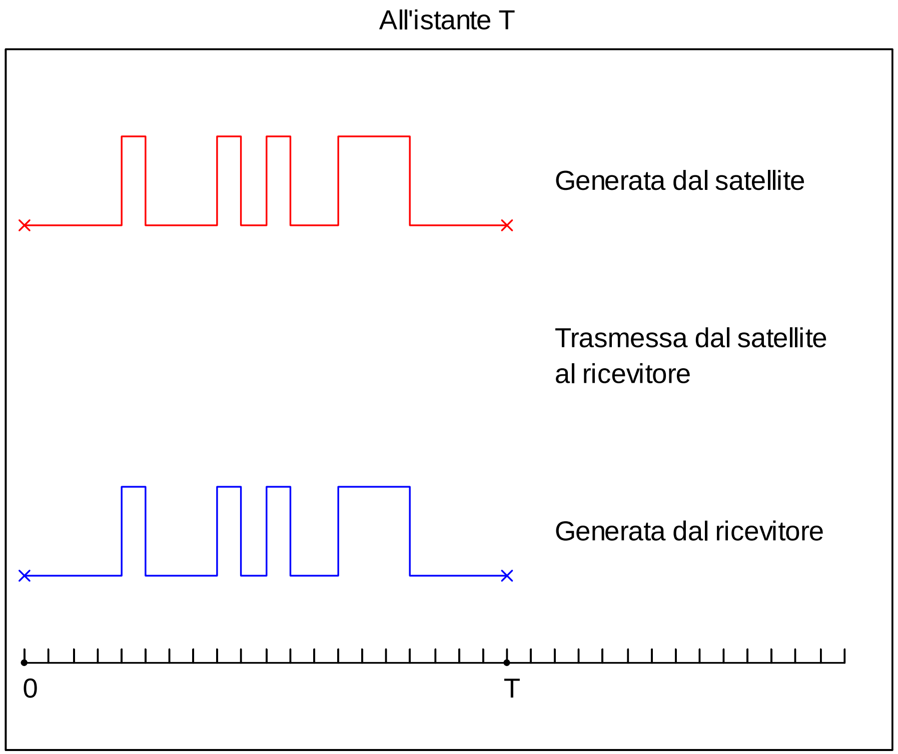
La soluzione del sistema (4)

$$r_i^j = \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

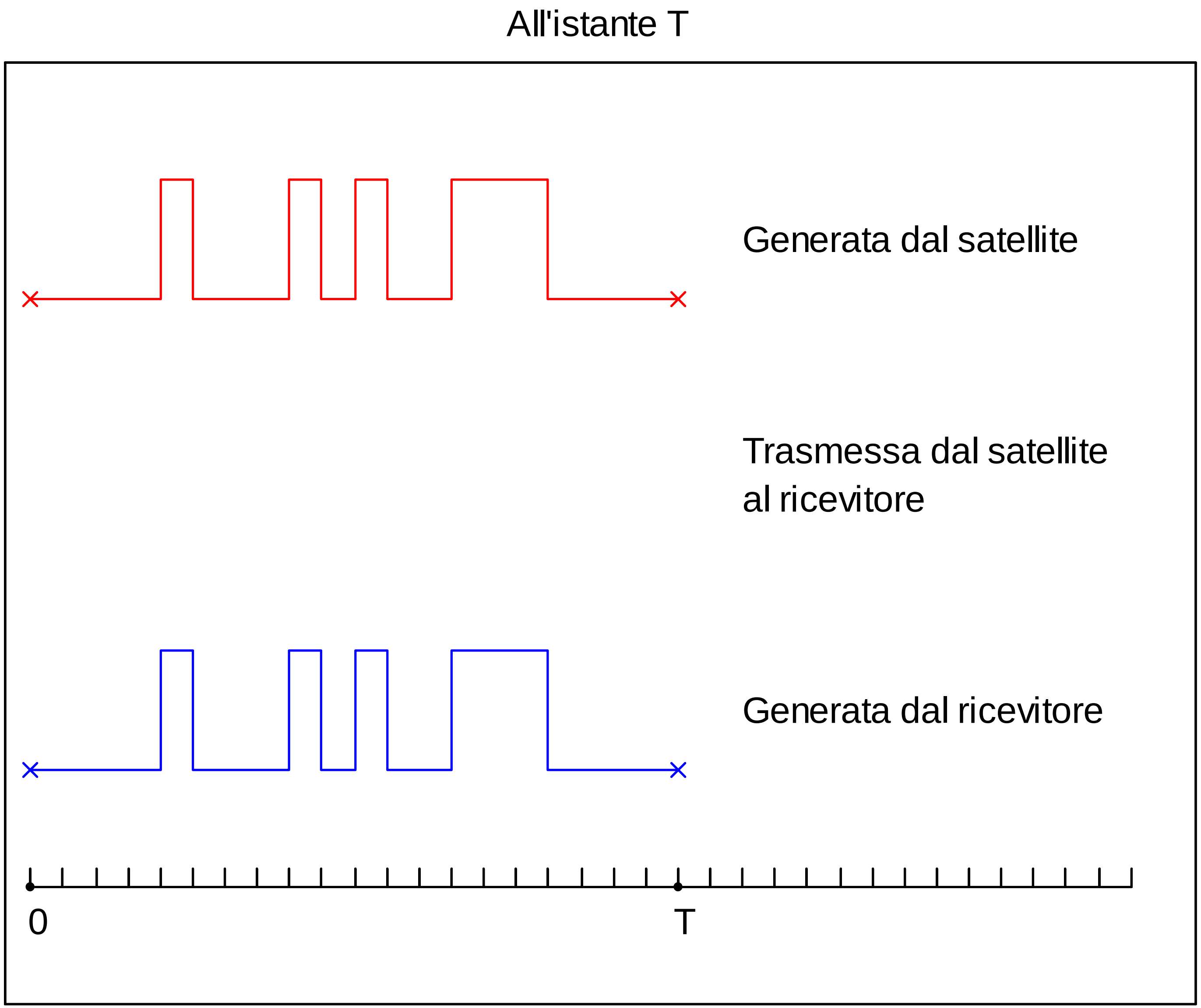
può essere interpretata come l'intersezione di s sfere di raggio noto, aventi centro nella posizione dei vari satelliti. Il punto incognito $\mathbf{x}_i$ appartiene a tutte le sfere dunque si trova nella loro intersezione.

Misura del tempo di volo con i codici – 1

- Determinazione della distanza satellite-ricevitore basata sui codici
- Per la fasi, cose sostanzialmente analoghe
- Si assume per ora la sincronia fra gli orologi del satellite e del ricevitore. Ipotesi che non può essere rigorosamente vera e che deve essere rimossa in seguito
- Emettitore e ricevitore sono in grado di generare due copie dello stesso codice, identiche e sincrone.



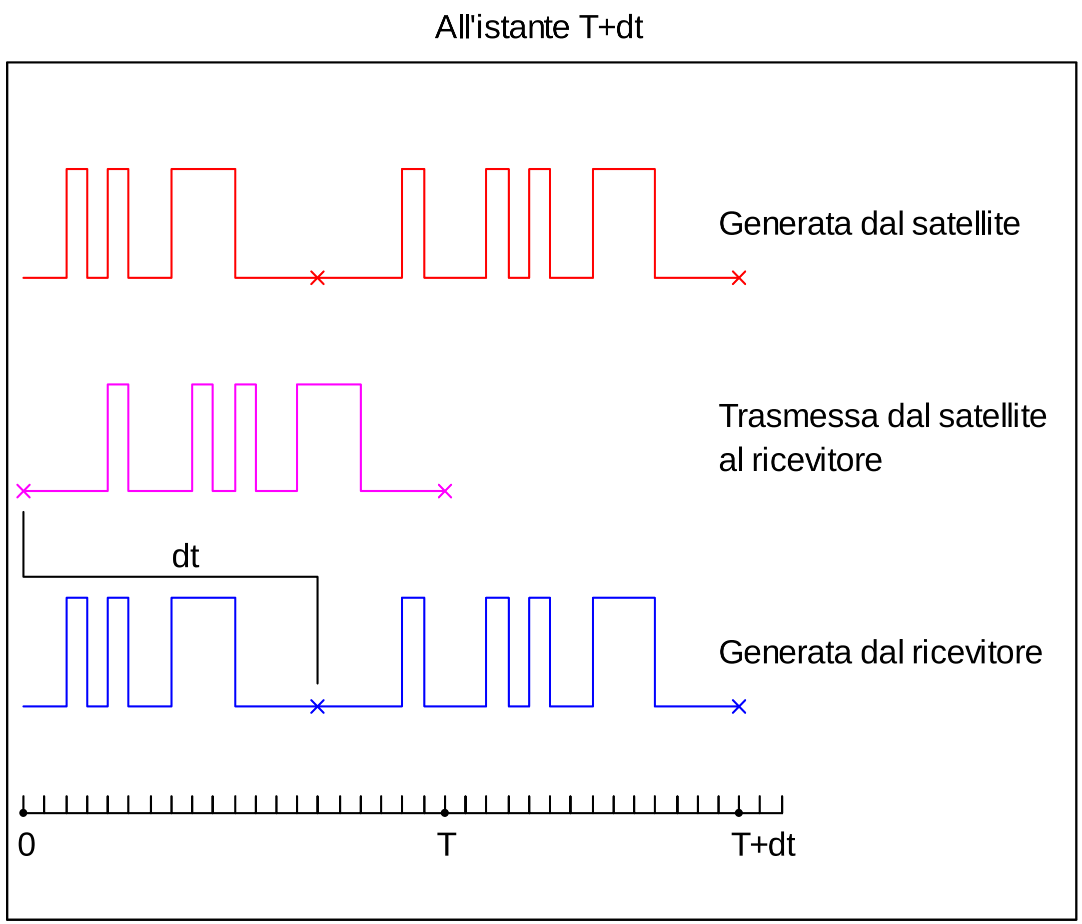
Misura del tempo di volo con i codici – 2



[CodiceCA_1.emf]

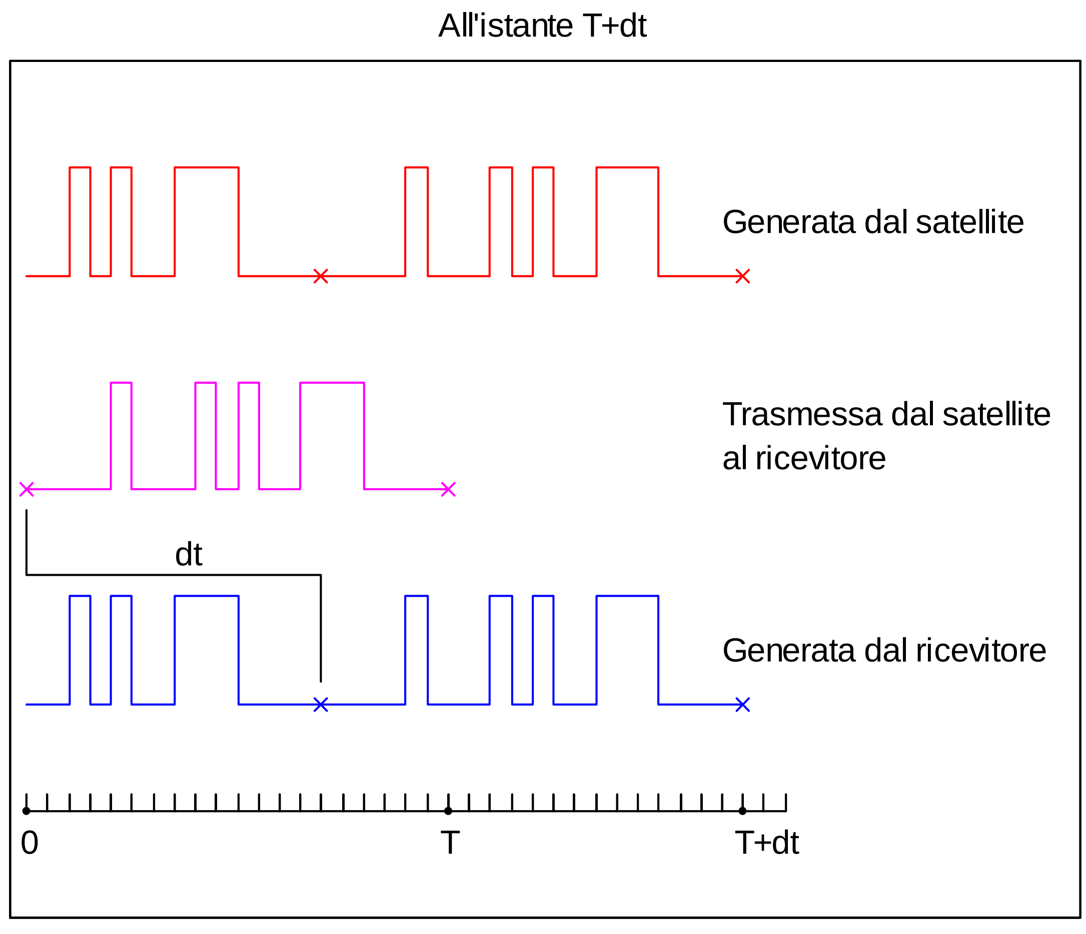
Misura del tempo di volo con i codici – 3

Supponiamo che al tempo T, che coincide col periodo del codice considerato, una copia del segnale generato dal satellite venga spedita verso il ricevitore. Il segnale inviato impiega un tempo δt a percorrere lo spazio che separa satellite e ricevitore; al suo arrivo esso sarà sfasato rispetto al codice che satellite e ricevitore hanno continuato a generare: la sfasatura è funzione del tempo di volo, dunque misurare la prima permette di conoscere il secondo.



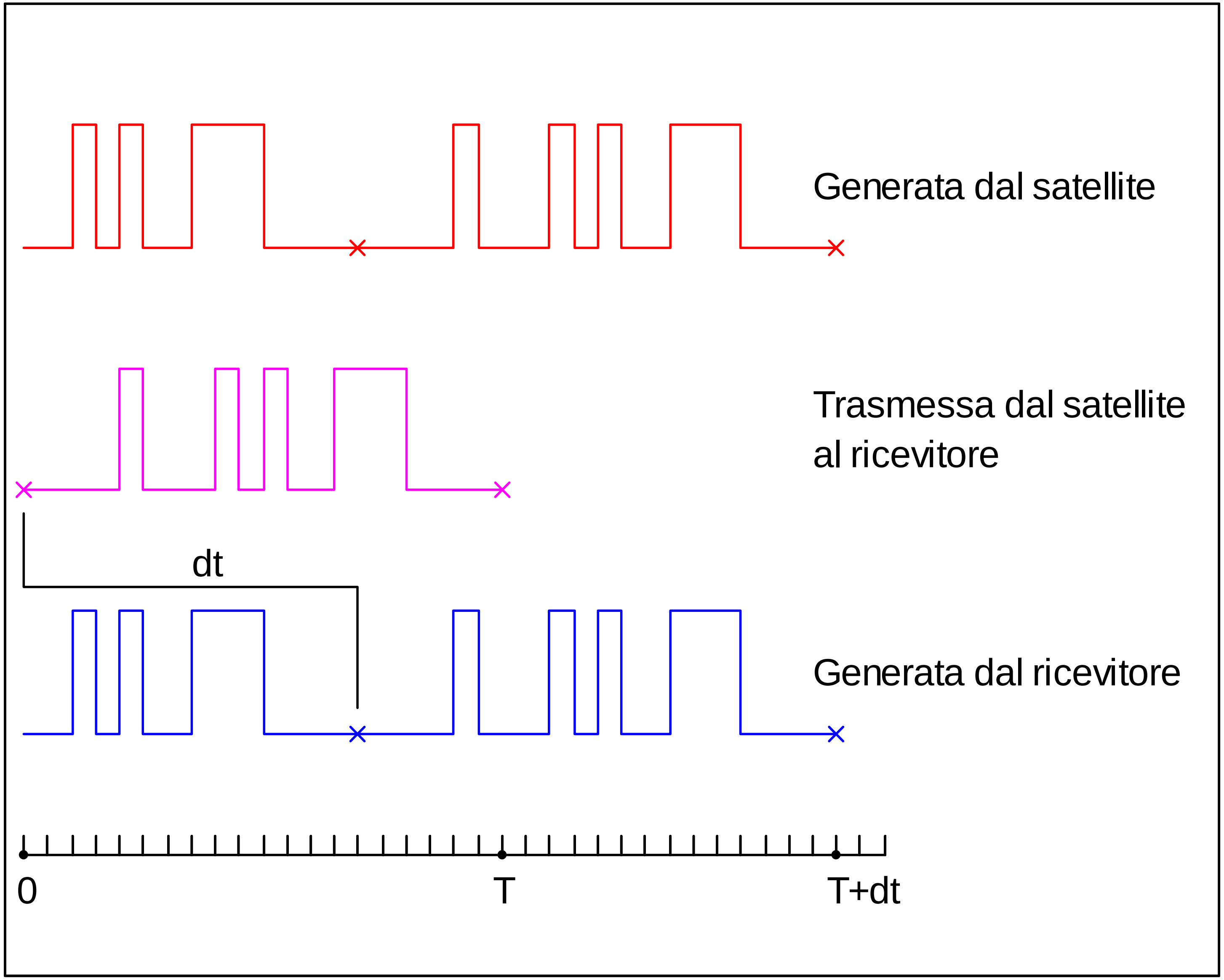
Misura del tempo di volo con i codici – 4

La misura dello sfasamento può essere effettuata spostando in avanti sull'asse dei tempi la copia del segnale captata fino a quando questa coinciderà con la copia generata localmente. La traslazione necessaria ad allineare il codice generato con quello ricevuto coincide con il tempo di volo δt.



Misura del tempo di volo con i codici – 5

All'istante T+dt



Misura del tempo di volo con i codici – 6

Quello descritto è proprio il meccanismo usato dal GPS per determinare le distanze satellite-ricevitore facendo uso dei codici.

Va notato però che le fasi prese in considerazione durante l'esposizione sono distinte solo da un punto di vista logico, mentre invece sono sovrapposte sul piano temporale in quanto esse avvengono sempre e contemporaneamente durante il periodo di accensione di un ricevitore GPS.

Più precisamente, subito dopo l'accensione di un ricevitore avviene qualcosa di analogo a quanto descritto, ma l'intervallo δt determinato non è certo qualcosa di statico in quanto satellite e ricevitore sono in moto relativo e la loro distanza cambia continuamente. Ciò che fa il ricevitore è esaminare di continuo il codice captato e rideterminare di conseguenza il tempo di volo δt in modo che il codice captato e quello generato siano allineati: si dice che il ricevitore tiene agganciato il satellite e questa operazione si chiama *tracking*.

Concetto di epoca

Quante volte viene effettuata la misura del tempo di volo? Una sola? In generale no.

La maggior parte delle tecniche di posizionamento GPS sono basate su una grande ridondanza, dunque la misura della distanza satellite-ricevitore è nota al ricevitore in continuo e viene memorizzata ad intervalli predefiniti detti *epoche*.

Epoca: intervallo fra due misure della distanza

In genere da 1 sec a 30 sec

Determinazione dello pseudo-range

Una volta stimato il tempo di volo

$$\Delta t_i^j$$

si può determinare lo pseudo-range

$$p_i^j := \Delta t_i^j \, c \quad \text{(definizione)}$$

- La stima Δt_i^j assume che gli orologi siano sincroni, cioè si assume che il tempo di volo misurato coincida con quello vero. Ma ciò non è rigorosamente vero. Un errore di 1 msec nella misura del tempo di volo equivale a un errore nella determinazione delle distanza di 300 km
- Inoltre si assume che la velocità del segnale quando attraversa l'atmosfera sia esattamente *c*, cosa non vera perché l'atmosfera non è vuota.

Si può fare posizionamento con lo pseudo-range?

Ciò equivale ad usare, come stima di r_i^j, la quantità p_i^j. Ciò si può scrivere

$$r_i^{j(1)} = p_i^j$$

intendendo che (1) in apice significa: *stima di ordine 1*.

Si può risolvere il sistema

$$p_i^j \doteq \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

Errori di 300 km

Satelliti necessari: 3

Modellizzazione degli errori d'orologio – 2

Consideriamo:

- i tempi misurati in cui il segnale viene emesso e captato, t^j e t_i
- i tempi veri in cui il segnale viene emesso e captato, τ^j e τ_i

Precisamente:

- t^j: istante in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio del satellite
- τ^j: istante vero in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio GPS
-
- t_i: istante in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio del ricevitore
- τ_i: istante vero in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio GPS

Modellizzazione degli errori d'orologio – 2

Introduciamo i termini d'errore

$$t^j + \delta t^j = \tau^j$$

$$t_i + \delta t_i = \tau_i$$

Il tempo di volo misurato (istante di ricezione – istante di emissione)

$$\Delta t_i^j = t_i - t^j$$

Il tempo di volo vero

$$\Delta \tau_i^j = \tau_i - \tau^j$$

Rapporto fra i due

$$\begin{aligned}\Delta \tau_i^j &= t_i + \delta t_i - \left(t^j + \delta t^j\right) = \\ &= t_i - t^j + \delta t_i - \delta t^j = \\ &= \Delta t_i^j + \delta t_i - \delta t^j\end{aligned}$$

Stima del range di generazione 2

$$
\begin{aligned}
r_i^{j(2)} &= \Delta\tau_i^j \, c = \left(\Delta t_i^j + \delta t_i - \delta t^j\right)c = \\
&= \Delta t_i^j \, c + \left(\delta t_i - \delta t^j\right)c = \qquad (5) \\
&= p_i^j + \left(\delta t_i - \delta t^j\right)c
\end{aligned}
$$

Ma attenzione: che ci fornisce i termini di errore δt^j e δt_i?

Il primo è piccolo e stimato nel messaggio navigazionale

Il secondo è certamente incognito

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione e stima di ordine 3 del range

La velocità di propagazione media è minore di c; l'equivalente in distanza dell'errore che si commette usando il valore c è di qualche metro. Di conseguenza

$$r_i^{j(2)} > r_i^j$$

Si può allora scrivere

$$r_i^{j(3)} = p_i^j + \left(\delta t_i - \delta t^j\right)c - I_i^j - T_i^j$$

dove i termini positivi I_i^j e T_i^j sono gli equivalenti in distanza del ritardo ionosferico e troposferico.

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione e stima di ordine 3 del range - 2

Ionosfera: parte alta dell'atmosfera

Troposfera: parte bassa

I meccanismi fisici che determinano il ritardo sono diversi e le strategie per eliminare i conseguenti errori diverse e ciò spiega come mai si introducano i due termini

In linea di principio I_i^j e T_i^j sono diversi per ogni satellite e per ogni ricevitore, in quanto dipendono dalle condizioni chimico-fisiche della parte di atmosfera attraversata.

Sintesi sulle stime del range

$$\hat{r}_i^{j(1)} = p_i^j$$

$$r_i^{j(2)} = p_i^j + \left(\delta t_i - \delta t^j\right)c$$

$$r_i^{j(3)} = p_i^j + \left(\delta t_i - \delta t^j\right)c - I_i^j - T_i^j$$

Equazione dello pseudo-range con i codici

L'equazione dello pseudo-range si ottiene risolvendo l'equazione fondamentale usando come stima del range quella di terza generazione

$$r_i^{j(3)} \doteq \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\ldots,s$$

$$p_i^j + \left(\delta t_i - \delta t^j \right) c - I_i^j - T_i^j \doteq \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\ldots,s$$

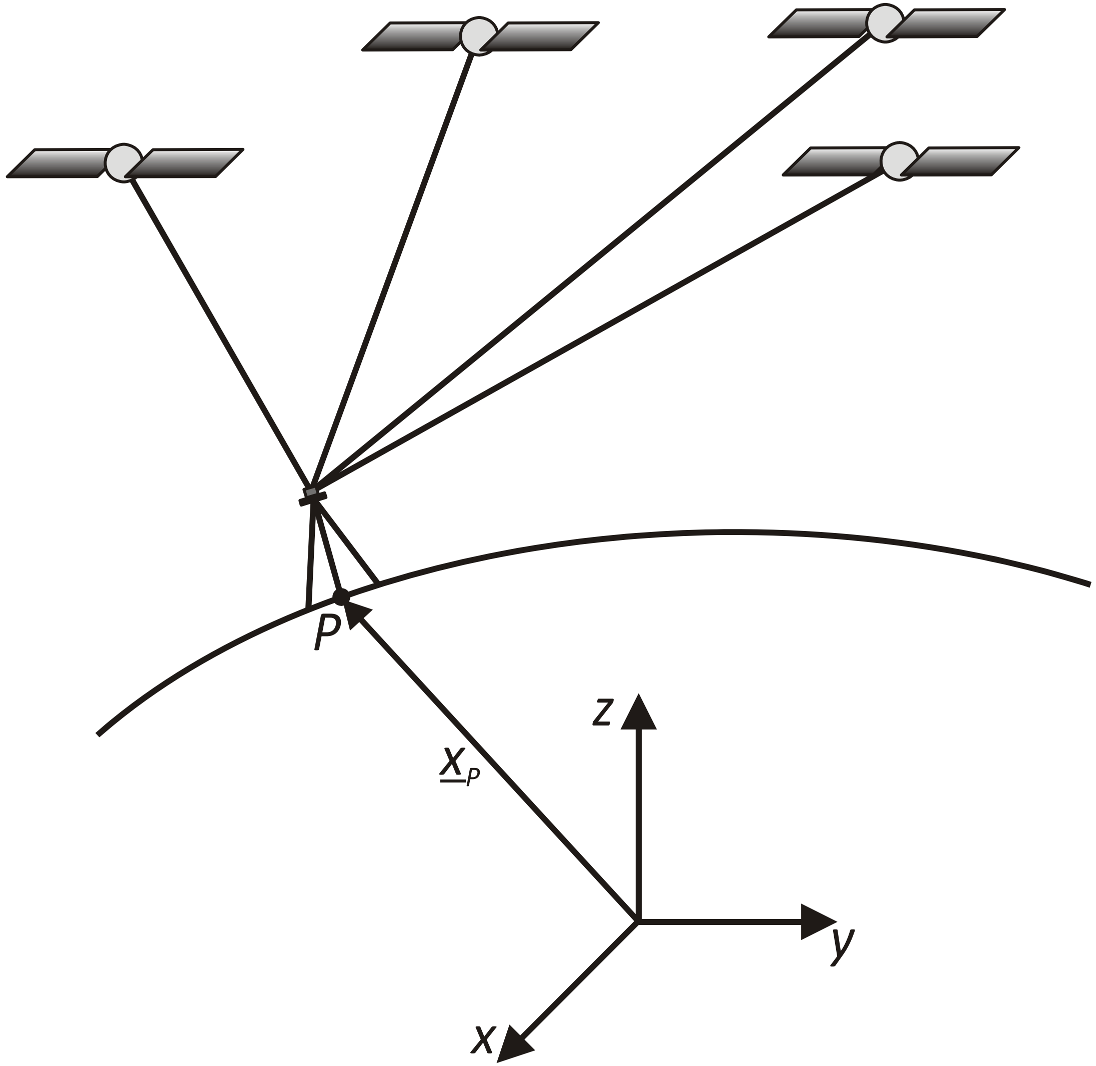
Da cui

$$p_i^j \doteq \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| + \left(\delta t^j - \delta t_i \right) c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\ldots,s \qquad (6)$$

[Conforme a Anderson, Mikhail, *Surveying. Theory and Practice*, 7th edition, pag. 708]

[Conforme a Leick, *GPS Satellite Surveying*, 2nd edition, pag. 249]

Soluzione navigazionale – 1



[posizionamento_assoluto.cdr;wmf]

Soluzione navigazionale – 2

Ripartiamo dalla equazione dello pseudo-range

$$p_i^j = \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| + \left(\delta t^j - \delta t_i \right) c + I_i^j + T_i^j$$

Effettuiamo semplificazione trascurando i ritardi iono e tropo sferici: sappiamo che pagheremo un prezzo in termini di precisione delle coordinate determinate

Risolviamo il sistema

$$p_i^j \doteq \left\| \mathbf{x}^j - \mathbf{x}_i \right\| + \left(\delta t^j - \delta t_i \right) c \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

Incognite

$\mathbf{x}_i$ - ovvio

δt_i - inevitabile, l'errore d'orologio del ricevitore viene stimato: l'orologio del ricevitore viene allineato al tempo GPS, timing.

Soluzione navigazionale – 3

Elementi noti

$\mathbf{x}^j$ - dalle effemeridi

δt^j - piccolo e comunque stimato nel messaggio navigazionale

Elementi misurati direttamente

p_i^j - il lavoro del ricevitore

Dunque le incognite sono 4.

Sono necessari almeno 4 satelliti

Soluzione navigazionale – 4

La soluzione navigazione è la soluzione più semplice ed ha grande interesse

- Bastano i dati di un'epoca per fare posizionamento: tempo reale
- Basta un ricevitore
- Posizionamento assoluto

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale

n_s – numero satelliti

n_e – numero di epoche

Numero di equazioni (considerando costante il numero di satelliti)

$n_s \, n_e$

Numero di incognite

$3 + n_e$ - l'errore d'orologio viene stimato ad ogni epoca

Bilancio equazioni incognite nella soluzione navigazionale - 2

Condizione per la soluzione

$$n_s n_e \geq 3 + n_e$$

$$n_e \geq \frac{3}{n_s - 1}$$

Se $n_s \geq 4$ allora $n_e \geq 1$: tempo reale

Tempo reale: si determina la posizione del ricevitore con i dati di un'epoca

Budget errori - 1

UERE: User Equivalent Range Error

Riferimento a SPS (Standard Positioning Service), basato su C/A

Budget errori - 2

Fonti errore	Con SA	Senza SA
Clock satellite	3.0	3.0
Altri disturbi sul satellite	1.5	1.5
SA	32.3	0
Effemeridi predette	4.2	4.2
Altro	0.9	0.9
Ritardo ionosferico	5.0	5.0
Ritardo troposferico	1.5	1.5
Noise del ricevitore e correlazione	1.5	1.5
Multipath	2.5	2.5
Altro	0.5	0.5
Totale	33.3	8.0

Precisione del point-positioning

	ΔE		ΔN		ΔU	
	Max	Std	Max	Std	Max	Std
15 marzo 2000	39,48	19,58	114,56	34,55	90,11	46,24
15 aprile 2000	43,28	18,79	134,24	40,38	191,97	65,17
8 maggio 2000	3,39	1,80	5,30	2,33	11,08	4,21
15 maggio 2000	5,44	1,82	5,28	2,30	8,19	3,88

Le prime due date sono anteriori allo spegnimento del SA, 1 maggio 2000. Le altre due date sono successive.

I navigatori della automobili esistono perchè Clinton ha spento la SA.

Si possono usare sia le fasi sia i codici

Tutta la discussione precedente è stata fatta immaginando di usare, per la misura della distanza satellite-ricevitore, i **codici**. Per entrambi i codici, C/A e P si può dire che la misura

- è più *semplice*
- consente le misure in tempo reale
- meno precisa

Fra i due codici, C/A e P, il secondo è più preciso ma il suo uso è riservato per gli utenti qualificati, dotati di ricevitori speciali.

Si possono usare sia le fasi sia i codici - 2

La misura della distanza può essere fatta anche con le **fasi** presenta altre caratteristiche

- è più *complessa.* In particolare vi è il problema della determinazione della ambiguità iniziali: la distanza d'onda più una parte frazionaria. La correlazione misura la parte frazionaria e il numero intero di lunghezze d'onda deve essere determinato osservando per un tempo adeguato molti satelliti e facendo elaborazioni complesse, lente e delicate. Si tratta di una fase delicata che può portare a risultati sbagliati nella stima delle ambiguità iniziali, soprattutto se si vedono pochi satelliti, per poco tempo o se la ricezione è disturbata.
- non consente le misure in tempo reale
- estremamente più precisa

Modalità di misura del GPS: la soluzione navigazionale

Un solo ricevitore

Misura in pochi secondi, anche in tempo reale

Posizione assoluta

Accuratezza: 5-10 m

E' la modalità dei navigatori per le auto e per l'escursionismo

[posizionamento_assoluto.cdr;wmf]