Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Introduzione ai fenomeni aleatori

Dispense

Fenomeni deterministici

Vi sono fenomeni deterministici, il cui comportamento è esattamente prevedibile:

- il risultato di un calcolo matematico
- i fenomeni fisici in generale, come ad esempio l'elongazione di una molla sottoposta a una certa forza

Fenomeni aleatori

Vi sono fenomeni che non sono deterministici. Essi sono detti

- aleatori
- casuali
- stocastici

Esempi di fenomeni aleatori sono, fra gli altri

- la durata di una lampadina ad incandescenza
- il lancio di una moneta o di un dado
- la misura di precisione di una grandezza fisica, distanza, lunghezza, peso, angolo, temperatura o velocità

Fenomeni aleatori - 2

Lampadina: nessuno può dire quante ore durerà

Dado: nessuno può prevedere quale faccia uscirà dopo il lancio

Misura di precisione: misure ripetute forniscono risultati differenti

I fenomeni aleatori hanno tuttavia una regolarità di fondo che si manifesta *ripetendo l'esperimento*, che consente di studiarli con metodi scientifici.

Che cosa significa *ripetere l'esperimento*? Dipende dal contesto.

- *Lampadina*: verificare la durata di diverse lampadine.
- *Dado*: ripetere il lancio.
- *Misura di precisione*: effettuare misure ripetute.

Fenomeni aleatori – 3

Come si manifesta la regolarità di fondo.

Lampadina: diversi esemplari dello stesso tipo di lampadina (aventi le stesse caratteristiche tecniche e costruttive) hanno durate diverse, ma tuttavia concentrate in un intervallo ragionevolmente stretto. In altri termini: non si verifica che una lampadina duri 5 anni e un'altra 5 giorni, a meno di difetti di fabbricazione.

Dado: effettuando molti lanci, le singole facce si presentano circa $1/6$ delle volte. In altri termini non si verifica che, effettuando 1000 lanci, esca sempre la faccia 1 (più precisamente, un tale evento ha una bassissima probabilità di accadere).

Fenomeni aleatori - 4

Misura di precisione. Misurando ripetutamente la distanza fra due tratti disegnati su un foglio con una riga millimetrata e stimando il decimo, si otterranno risultati diversi, ma concentrati in un intervallo abbastanza ristretto.

Che cos'è una misura di precisione

Sensibilità: la più piccola grandezza necessaria a causare uno spostamento apprezzabile della scala dello strumento.

Nel caso della riga millimetrata: il mm.

Misura di precisione. Una misura in cui si spinge lo strumento usato al limite della propria sensibilità o anche oltre.

Nel caso della riga: stima le frazioni di mm.

Calcolo delle Probabilità e Statistica

I fenomeni aleatori sono descritti dalla Probabilità e dalla Statistica.

La prima permette di prevedere il comportamento di un fenomeno aleatorio noto, come ad esempio calcolare la probabilità che lanciando tre monete simmetriche (modello noto) si ottengano tre teste.

La seconda procede nel verso contrario e cerca di conoscere un fenomeno aleatorio a partire dal suo comportamento:

- studio la vita di 100 lampadine identiche per stabilirne la vita media;
- effettuo misure angolari ripetute per stabilire la precisione con cui lo strumento e l'operatore lavorano.

Centralità delle misure di precisione in Topografia e Geomatica

Le misure di precisione sono un fenomeno aleatorio con cui i rilevatori si confrontano continuamente: le misure di angoli e distanze fatte da un teodolite sono misure di precisione.

Per poter svolgere la propria attività in modo appropriato, il topografo deve saper trattare le misure in modo adeguato e, a volte, piuttosto sofisticato.

Questo spiega perché tutti i testi riguardanti argomenti di rilevamento abbiano una significativa sezione dedicata al calcolo delle probabilità e alla statistica.

Topografia e Trattamento delle Osservazioni

Un topografo chiede alla statistica di essere guidato

- per effettuare le migliori misure possibili con una certa strumentazione;
- per conoscere comunque la bontà e la affidabilità delle misure fatte;
- per capire che fare se deve raggiungere una certa precisione;
- per confrontare efficacemente e razionalmente misure prese in momenti diversi e stabilire se la loro differenza sia attribuibile ai soli errori di misura o abbia altra causa.

Questi problemi appartengono alla parte della Statistica detta Trattamento delle Osservazioni.

Esempio sul confronto razionale di misure

Si decide di controllare periodicamente i movimenti di una frana misurando la distanza fra due punti, uno materializzato in una zona stabile e uno in frana.

Misure effettuate in giorni diversi inevitabilmente differiscono per gli errori accidentali di misura.

Come capire se la differenza fra misure prese a una settimana di distanza abbia una natura puramente accidentale o indichi invece un movimento reale del terreno?

Applicando sofisticate tecniche di analisi statistica.

Precisione e accuratezza

La qualità di una misura si esprime generalmente mediante due termini: *precisione* e *accuratezza*.

La precisione descrive la concentrazione di misure ripetute.

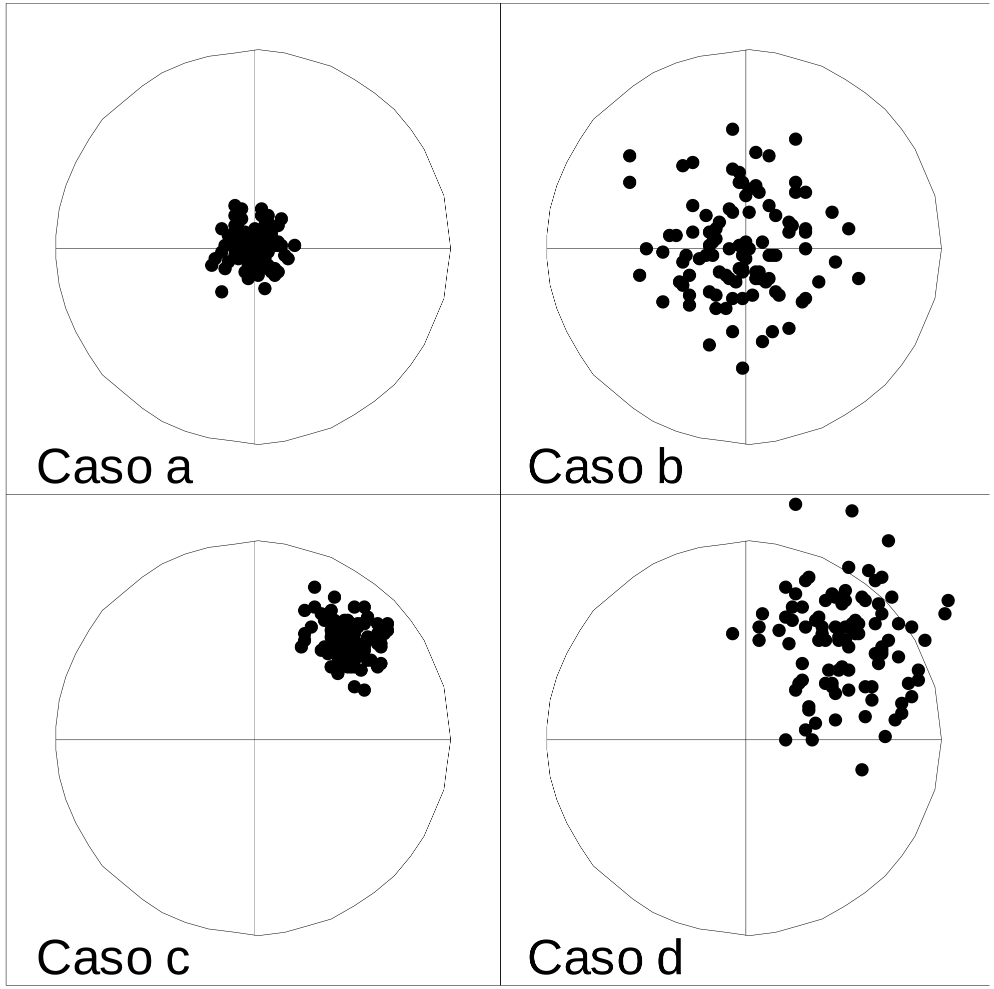
L'accuratezza esprime la distanza fra le misure ed il valore vero.

Una misura ottimale deve essere precisa ed accurata, ma capita a volte di effettuare misure precise ma non accurate, oppure accurate ma non precise, oppure anche, nel caso peggiore, non accurate e non precise.

Precisione e accuratezza - 2

E' abbastanza calzante una analogia fra le misure e gli spari ripetuti di un tiratore a un bersaglio, che potrebbero essere:

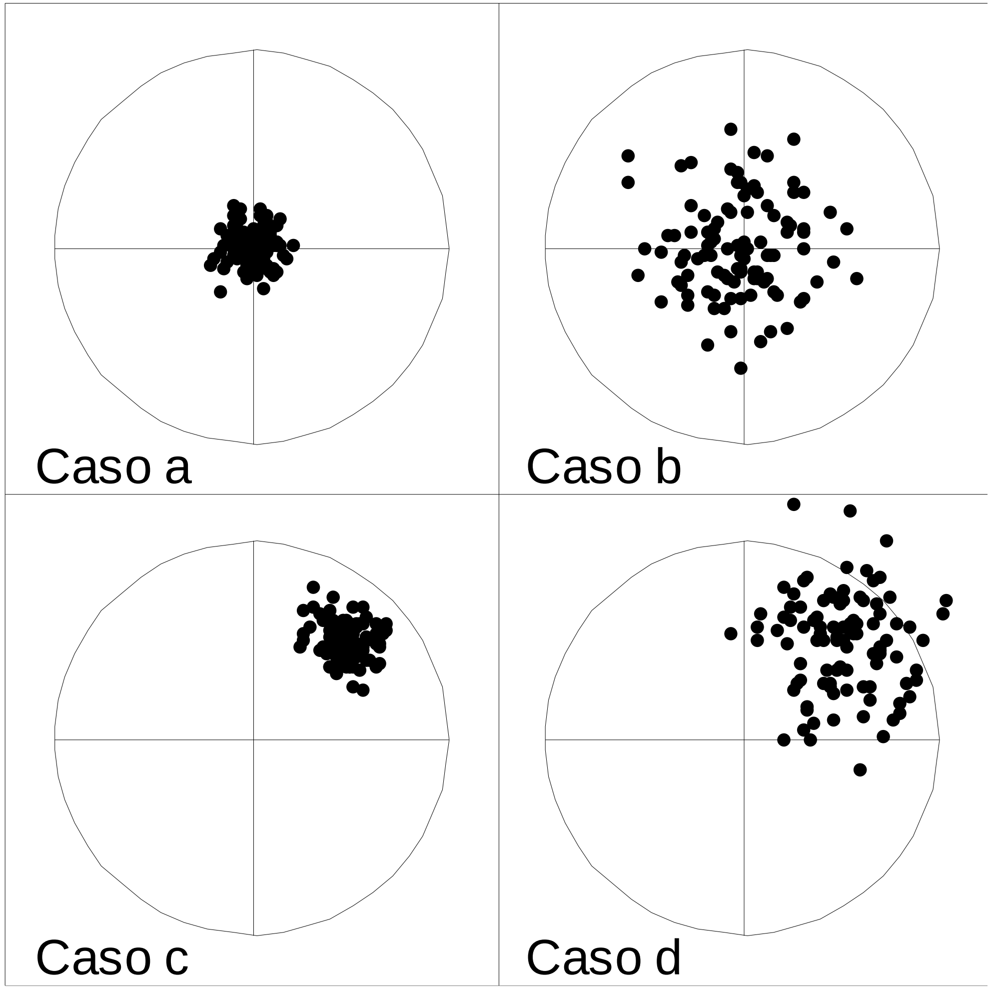
- vicini gli uni agli altri e concentrati attorno al centro del bersaglio: misura precisa e accurata (Caso a);
- vicini gli uni agli altri e concentrati attorno ad un punto lontano dal centro del bersaglio, magari per una srettifica del mirino: misura precisa ma non accurata (Caso c);



[Precisione_accuratezza.wmf]

Precisione e accuratezza - 3

- piuttosto dispersi attorno al centro del bersaglio: misura poco precisa ma accurata (Caso b);
- dispersi attorno a un punto lontano dal centro del bersaglio: misura poco precisa e poco accurata (Caso d).



[Precisione_accuratezza.wmf]

Precisione e accuratezza - 4

La terminologia usata per parlare della qualità della misura non è sempre coerente e per questo può trarre in inganno. Spesso infatti si usa il termine *precisione* come indicatore onnicomprensivo della qualità di una misura, mentre quando si vogliono enucleare i vari aspetti che concorrono a determinarla, si distingue fra *precisione* e *accuratezza*. Sta all'attenzione del lettore o dell'ascoltatore capire quale sia il reale significato dei termini usati valutando il contesto nel quale vengono impiegati.

Accuratezza assoluta e relativa

E' utile distinguere fra *accuratezza assoluta* e *accuratezza relativa* (o precisione, il discorso vale per entrambe).

Quando si dice che la distanza fra i punti *A* e *B* è stata misurata con un'incertezza di 2 mm, si indica l'accuratezza assoluta delle misure.

Ma la quantificazione in termini assoluti dell'accuratezza non è sempre la più opportuna. Sbagliare di un millimetro la misura della distanza Terra-Luna è un risultato straordinario, mentre sbagliare della stessa quantità la misura con il calibro del diametro di un piccolo cilindro metallico costituisce un errore marchiano.

Accuratezza assoluta e relativa - 2

L'accuratezza assoluta è un numero avente la stessa dimensione fisica della quantità misurata

$$\tilde{x} = \overline{x} + \varepsilon_a$$

la quantità misurata $\tilde{x}$ è uguale al valore vero $\overline{x}$ più l'errore assoluto ε_a.

L'accuratezza relativa è un numero puro uguale al rapporto fra l'errore commesso e l'entità della misura

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\tilde{x}}$$

Quando usare la relativa e l'assoluta? Dipende del contesto.

Esempio sulla accuratezza relativa

Nel caso del GPS le basi vengono determinate con un errore che dipende dalla loro lunghezza e che corrisponde, per lavori di qualità, a 1~mm per Km; la precisione relativa del GPS è dunque di 10^{-6} oppure, come si suole dire, 1 ppm (una parte per milione).

Esempio sulla accuratezza relativa – 2

Specifiche dello strumento Leica TPS 1200

La precisione si riferisce alle misurazioni rispetto ai prismi standard.

Programma di misurazione EDM	Deviazione standard, ISO 17123-4, prisma standard	Deviazione standard, ISO 17123-4, Target	Durata della misurazione, tipica [s]
Standard	2 mm + 2 ppm	5 mm + 2 ppm	1.5
Veloce	5 mm + 2 ppm	5 mm + 2 ppm	0.8
Tracciamento	5 mm + 2 ppm	5 mm + 2 ppm	< 0.15
Media	2 mm + 2 ppm	5 mm + 2 ppm	-

Interruzioni del raggio, grande riverbero e oggetti in movimento lungo la traiettoria del raggio possono causare scostamenti rispetto alla precisione indicata.
La risoluzione di visualizzazione è 0.1 mm.

Principio:	Misurazione della fase
Tipo:	Laser coassiale infrarosso, classe 1
Onda portante:	780 nm
Sistema di misura:	Sistema speciale di frequenza base 100 MHz ≙ 1.5 m

Esempio sulla accuratezza relativa – 3

L'errore è espresso come somma di una parte costante (assoluta) di 2 mm e di una parte che è funzione della distanza, quantifica in termini relativi, 2 ppm.

1 ppm: parte per milione, cioè 1 mm per Km

Misure dirette e indirette

Le misure vengono distinte in *dirette* e *indirette*, a seconda che sia possibile o meno misurare direttamente ciò che vogliamo conoscere.

Una misura è diretta quando è possibile misurare direttamente la grandezza X che si desidera conoscere. Se si dispone di un distanziometro elettronico e si desidera conoscere la distanza fra due punti intervisibili, è possibile misurare direttamente tale distanza. Le proprietà statistiche di X possono essere messe in luce con tecniche basate sulla ripetizione delle misure, che verranno descritte in seguito.

Una misura è indiretta quando…non è diretta.

Esempi di misure indirette - 1

- Si vuole conoscere la lunghezza di una linea spezzata, come il confine di una proprietà; una soluzione potrebbe essere misurare direttamente i segmenti che la compongono e poi sommare la lunghezze parziali.
- Si vuole misurare la superficie di un'area rettangolare (chi ha detto che è rettangolare? Noi lo assumiamo). Si potrebbero misurare entrambi i lati e poi moltiplicare le lunghezze.
- Si vogliono determinare le dimensioni di una finestra che non è facilmente raggiungibile. Si decide di fare misure topografiche di intersezione in avanti e di determinare le coordinate degli spigoli della finestra. Le dimensioni si ricavano successivamente con il teorema di Pitagora. La sequenza è: angoli e distanze; coordinate; dimensioni della finestra.

Esempi di misure indirette - 2

Nei tre esempi considerati, la relazione fra la grandezza che si vuole determinare $\mathbf{Y}$, avente dimensione *m*, e le grandezze che si possono osservare, contenute nel vettore *n*-dim $\mathbf{X}$, è del tipo

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$$

Vi sono tecniche che consentono di determinare le proprietà statistiche di $\mathbf{Y}$ come funzione delle analoghe proprietà di $\mathbf{X}$. Si tratta della propagazione della varianza-covarianza.

Esempi di misure indirette: il perimetro dell'appezzamento

Le misure dirette dei lati D_i formano il vettore n-dim **X**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Il vettore **Y** e monodimensionale e costituito solo dal perimetro L del poligono

La funzione g è definita

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Altri esempi di misure indirette

Il problema della determinazione dei parametri di una trasformazione di coordinate nel piano.

Esistono due SR nel piano (O,x,y) e (N,u,v) che sono ruotati, traslati e scalati.

Si vogliono determinare i 4 parametri della TCP4.

Per uno stesso punto P valgono

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{u}_P \qquad (1)$$

La matrice $\mathbf{R}$, nella convenzione antioraria, è

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

La versione scalare della (1) è

$$x_P = T_x + \lambda\left(u_P \cos\alpha - v_P \sin\alpha\right)$$

$$y_P = T_y + \lambda\left(u_P \sin\alpha + v_P \cos\alpha\right)$$

Altri esempi di misure indirette - 2

Supponiamo di avere p punti doppi, punti di cui si conoscono sia le coordinate (O,x,y) sia le (N,u,v). Consideriamo i valori veri di tutte le grandezze in gioco.

Si può scrivere un sistema di $2p$ equazioni

$$
\begin{aligned}
&x_1 = T_x + \lambda\left(u_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha\right) \\
&y_1 = T_y + \lambda\left(u_1 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha\right) \\
&x_2 = T_x + \lambda\left(u_2 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha\right) \\
&y_2 = T_y + \lambda\left(u_2 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha\right) \\
&\vdots \\
&x_p = T_x + \lambda\left(u_p \cos\alpha - v_p \sin\alpha\right) \\
&y_p = T_y + \lambda\left(u_p \sin\alpha + v_p \cos\alpha\right)
\end{aligned}
$$

E cercare di risolverlo rispetto ai parametri della TCP4.

Altri esempi di misure indirette – 3

Riscriviamo

$$0 = T_x + \lambda\left(u_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha\right) - x_1$$

$$0 = T_y + \lambda\left(u_1 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha\right) - y_1$$

$$0 = T_x + \lambda\left(u_2 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha\right) - x_2$$

$$0 = T_y + \lambda\left(u_2 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha\right) - y_2$$

$$\vdots$$

$$0 = T_x + \lambda\left(u_p \cos\alpha - v_p \sin\alpha\right) - x_p$$

$$0 = T_y + \lambda\left(u_p \sin\alpha + v_p \cos\alpha\right) - y_p$$

Altri esempi di misure indirette – 4

Introduciamo i vettori

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_p \\ v_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ \alpha \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Altri esempi di misure indirette - 5

Il sistema equivale a

$$f(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 0$$

dove **Y** è noto e il vettore **X** contiene invece le incognite.

La relazione scritte richiama, anche visivamente, a problemi quali le funzioni implicite e il teorema di Dini: si tratta evidentemente del caso più complesso

Sintesi di misure dirette e indirette

Dirette: le incognite **X** sono misurate direttamente

Indirette di tipo 1: le incognite **Y** e le quantità misurate **X** sono nel rapporto

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$$

Indirette di tipo 2: le incognite **Y** e le quantità misurate **X** sono nel rapporto

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$$

Tipi di errori

Accidentali

Sistematici

Grossolani

Da fare