Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

La probabilità

Dispense

La probabilità

La probabilità è una proprietà degli eventi che si misura con un numero compreso fra 0 ed 1 e che quantifica la facilità con cui si verificano. Un evento avente probabilità 0 è detto *evento impossibile* mentre un evento avente probabilità 1 è detto *evento certo*.

Verranno esposte due definizioni di probabilità dovute a Laplace e Von Mises.

Probabilità secondo Laplace

Consideriamo a titolo di esempio il lancio di un dado.

L'insieme delle possibili uscite, detto anche *spazio campionario* o *spazio degli eventi elementari* è

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Gli *eventi* sono i sottoinsiemi di Ω e costituiscono lo spazio degli eventi Σ.

Esempi di eventi sono

$$\Omega, \emptyset, 1,2,3,4,5,6$$

$$\{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \{1,4\}, \ldots$$

Probabilità secondo Laplace - 2

E' intuitivo pensare che la probabilità dell'evento

$\{1\}$ sia $1/6$

e che la probabilità dell’evento

$A = \{2,4,6\}$ sia $1/2$

Probabilità secondo Laplace - 3

Definizione di probabilità secondo Laplace: se un fenomeno ha N risultati, mutuamente escludentesi ed ugualmente possibili, la probabilità di un evento A è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli N_A ed il numero dei casi possibili N

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

Probabilità secondo Laplace - 4

Evento $A = \{2,4,6\}$

$$N_A = 3$$

$$N = 6$$

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{2}$$

Laplace

Pierre-Simon Laplace, marchese di Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827), è stato un matematico, fisico e astronomo francese. Fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico.	

http://it.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

Probabilità secondo Von Mises

La definizione prende spunto da un principio, verificato sperimentalmente, detto *legge empirica del caso*.

Consideriamo nuovamente un dado e l'evento A precedentemente definito, e immaginiamo di effettuare un numero N di lanci, conteggiando il numero N_A dei casi favorevoli (cioè l'uscita di uno dei numeri 2, 4, 6). E' ragionevole pensare che la *frequenza relativa*, cioè il rapporto

$$f_A = \frac{N_A}{N}$$

tenda, per N grandi, a stabilizzarsi attorno alla probabilità P_A dell'evento A.

Probabilità secondo Von Mises - 2

Si giunge così alla definizione di Von Mises: la probabilità P_A di un evento A è il limite a cui tende la frequenza relativa (numero degli esiti favorevoli diviso il numero totale delle estrazioni) quando il numero delle prove tende all'infinito

$$P_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

E' detta definizione frequentistica e ha il merito di evidenziare il legame fra esperienza e schema teorico.

Probabilità secondo Von Mises - 3

Immaginiamo N sufficientemente grande

$$P_A \cong \frac{N_A}{N}$$

E anche

$$N_A \cong P_A N \qquad (1)$$

il cui significato è che, effettuando N estrazioni, il numero di volte in cui si verifica un evento A è mediamente uguale al prodotto della probabilità di A per N.

Ciò è da intendersi In modo probabilistico e non deterministico. Ripetendo molte volte il blocco di N estrazioni si troverebbero valori di N_A diversi ma tanto più concentrati attorno al valore previsto dalla (1) quanto più è grande il valore di N.

Von Mises

Richard von Mises (Lemberg, 19 aprile 1883 – Boston, 14 luglio 1953) è stato un matematico, ingegnere e accademico austriaco naturalizzato statunitense.	

http://it.wikipedia.org/wiki/Richard_von_Mises

La concezione moderna di probabilità

E' basata su un approccio insiemistico ed assiomatico.

Variabili casuali discrete

Il numero degli eventi elementari è finito. Le variabili casuali discrete sono descritte da una tabella che associa ad ogni evento elementare la sua probabilità.

Il dado

$$\begin{cases} x_i & p_i \\ 1 & 1/6 \\ 2 & 1/6 \\ 3 & 1/6 \\ 4 & 1/6 \\ 5 & 1/6 \\ 6 & 1/6 \end{cases}$$

Variabili casuali discrete - 2

La moneta

$$\begin{cases} x_i & p_i \\ T & 1/2 \\ C & 1/2 \end{cases}$$

Da fare

Elementi sulla definizione moderna di probabilità dovuta a Kolmogorov.