Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Distribuzioni di probabilità sulla retta

Dispense

Le misure di precisione come fenomeni aleatori

Le misure di precisione sono certamente fenomeni aleatori

Consideriamo ad esempio la misura di un angolo con un teodolite elettronico: l'insieme degli eventi elementari è finito ma davvero molto grande: i numeri con 4 cifre decimali compresi fra 0 e 400

Gli statistici hanno capito che è più semplice pensare che gli eventi elementari per una misura di precisione siano tutti i numeri reali

Non ha senso parlare di probabilità che una ripetizione di una misura dia un certo numero; ciò che interessa è la probabilità che una misura cada in un intervallo $[a,b]$

Se per un certo fenomeno aleatorio si conosce la probabilità di ogni intervallo $[a,b]$, quel fenomeno è descrivibile nei termini di una variabile casuale continua X

La variabili casuali continue

Quando si conosce la probabilità di ogni intervallo del tipo

$$]-\infty,c] \qquad \forall c$$

Si dice di essere in presenza di un vc continua X.

Resta definita la *funzione di distribuzione*

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F_X(c) := P\left\{X \in]-\infty,c]\right\}$$

che, per come è definita, ha le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to-\infty} F_X(c) = 0 \\
&\lim_{c\to\infty} F_X(c) = 1 \\
&F_X(a) \le F_X(b) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}, a \le b
\end{aligned} \tag{1}$$

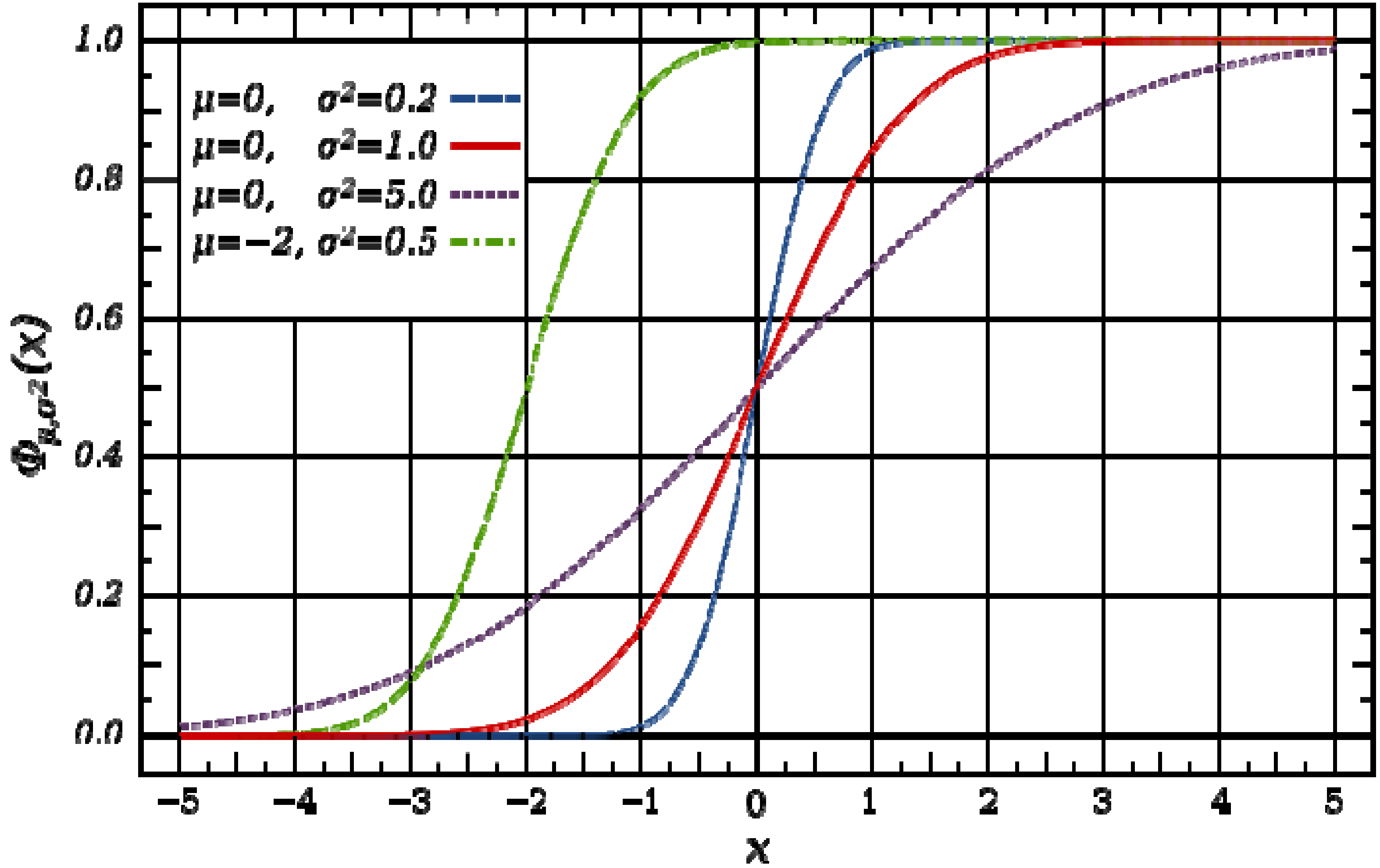
La variabili casuali continue - 2

Viceversa, ogni funzione avente le caratteristiche (1) definisce una vc continua. Esse sono certamente infinite.

La F_X consente di calcolare la probabilità di un qualunque intervallo $\left[a,b\right]$

$$P\left\{X \in [a,b]\right\} = F_X(b) - F_X(a) \qquad (2)$$

Esempi di funzioni di distribuzione per vc effettivamente continue

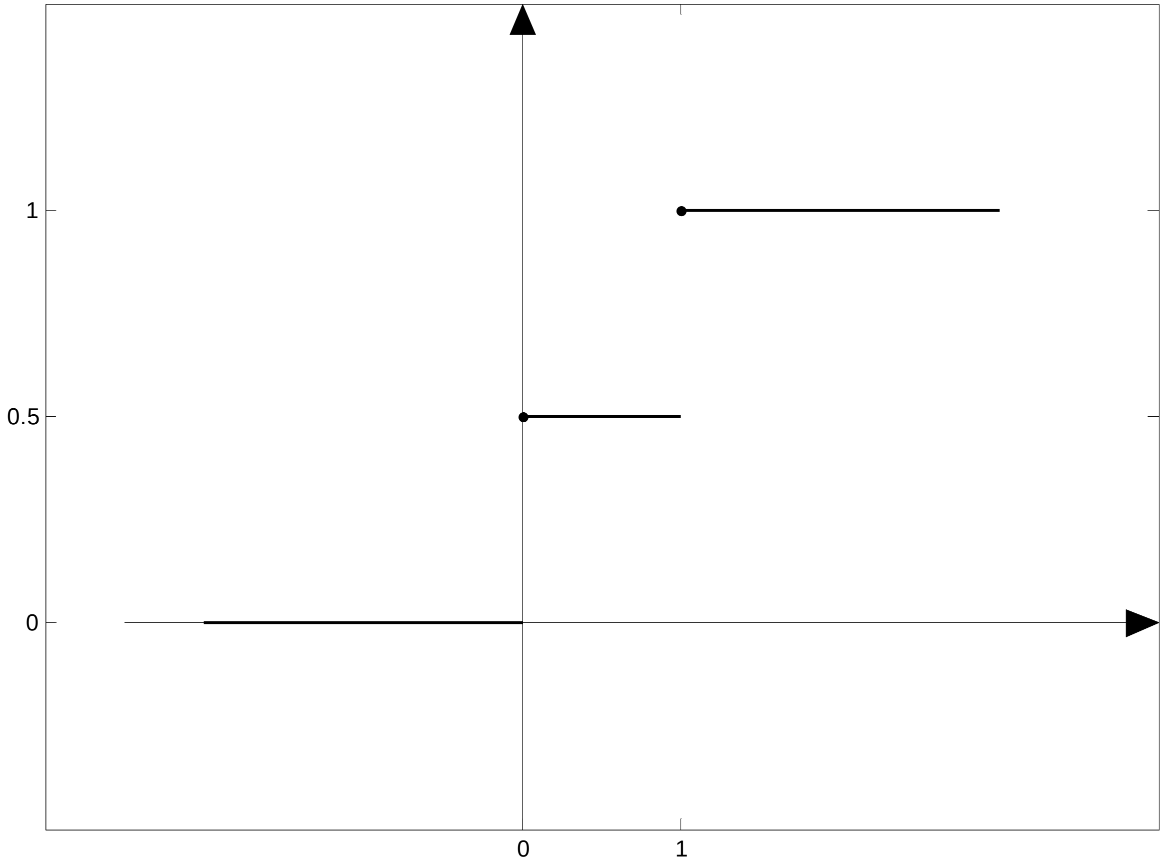


Esempi di funzioni di distribuzione per vc discrete ma immerse nella retta

Funzione di distribuzione per la vc moneta in cui è stata fatta l'associazione

Testa->0

Croce->1



La funzione densità di probabilità

Se la F_X di una vc X è differenziabile allora si definisce la *funzione densità di probabilità* f_X nel modo seguente

$$f_X(c) := \frac{d}{dc} F_X(c)$$

Che può essere invertita per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F_X(c) = \int_{-\infty}^{c} \mathrm{d}u \; f_X(u) \qquad (3)$$

La densità di probabilità ha certe proprietà

$$f_X(c) \geq 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \; f_X = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{|u| \to +\infty} f_X = 0 \qquad (4)$$

La funzione densità di probabilità – 2

Viceversa ogni funzione avente le proprietà (4) definisce una vc continua.

Dalla (2) e (3) si ha

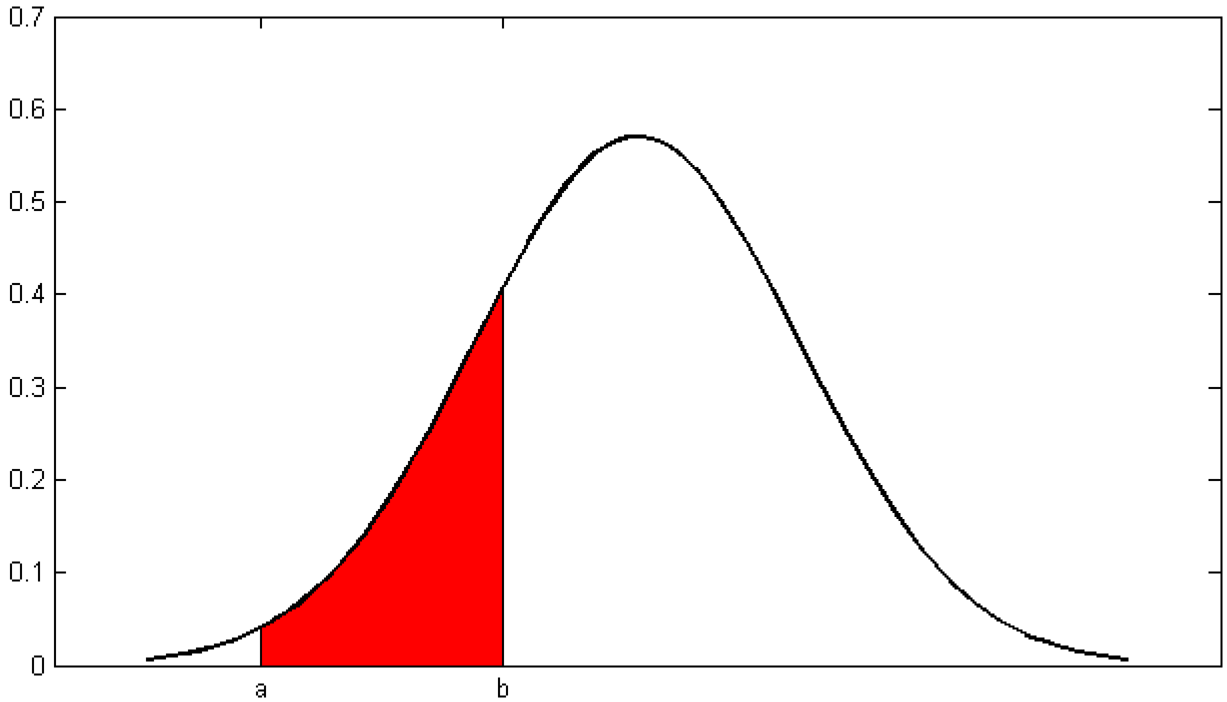
$$P\{X \in [a,b]\} = F_X(b) - F_X(a) =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \mathrm{d}u \; f_X(u) - \int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}u \; f_X(u) =$$

$$= \int_{a}^{b} \mathrm{d}u \; f_X(u)$$

Probabilità come area sottesa

La funzione densità di probabilità – 3



[grafico_area_sottesa.png]

$$P\left\{X\in[a,b]\right\}=\int_a^b \mathrm{d}u\; f_X(u)$$

Esempi delle densità di probabilità e delle corrispondenti funzioni di distribuzione