Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Elementi di trigonometria

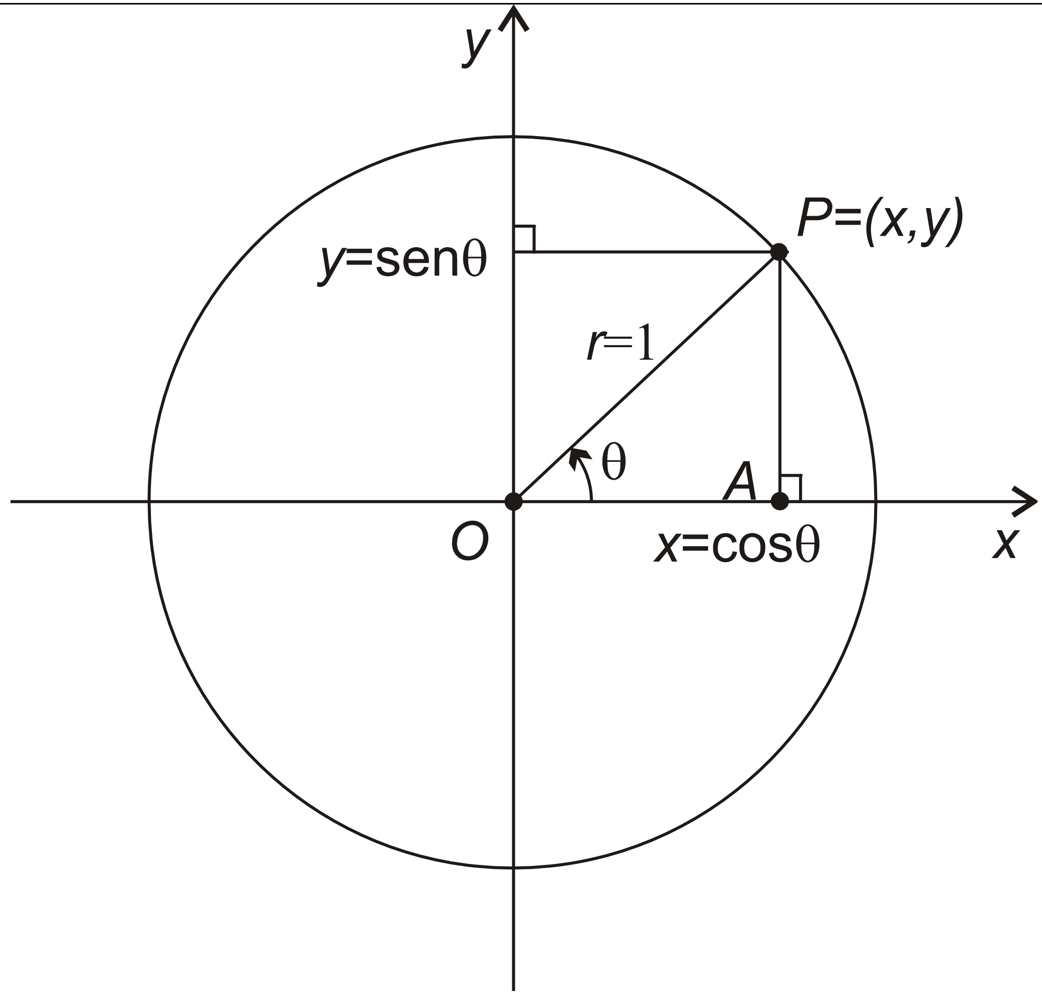
Dispense

Definizione delle funzioni trigonometriche seno e coseno

Consideriamo una coppia di assi cartesiani ortogonali (O,x,y), una circonferenza unitaria avente centro in O e un punto P che si trova sulla circonferenza.

Il segmento $\overrightarrow{OP}$ forma un angolo θ antiorario con il semiasse positivo delle x.

Il punto P ha coordinate (x,y).



[definizione_funzioni_seno_coseno.cdr]

[definizione_funzioni_seno_coseno.wmf]

Definizione delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 2

Per definizione si ha

$$\cos\theta := x$$

$$\sin\theta := y$$

Tale definizione spiega la periodicità delle funzioni trigonometriche

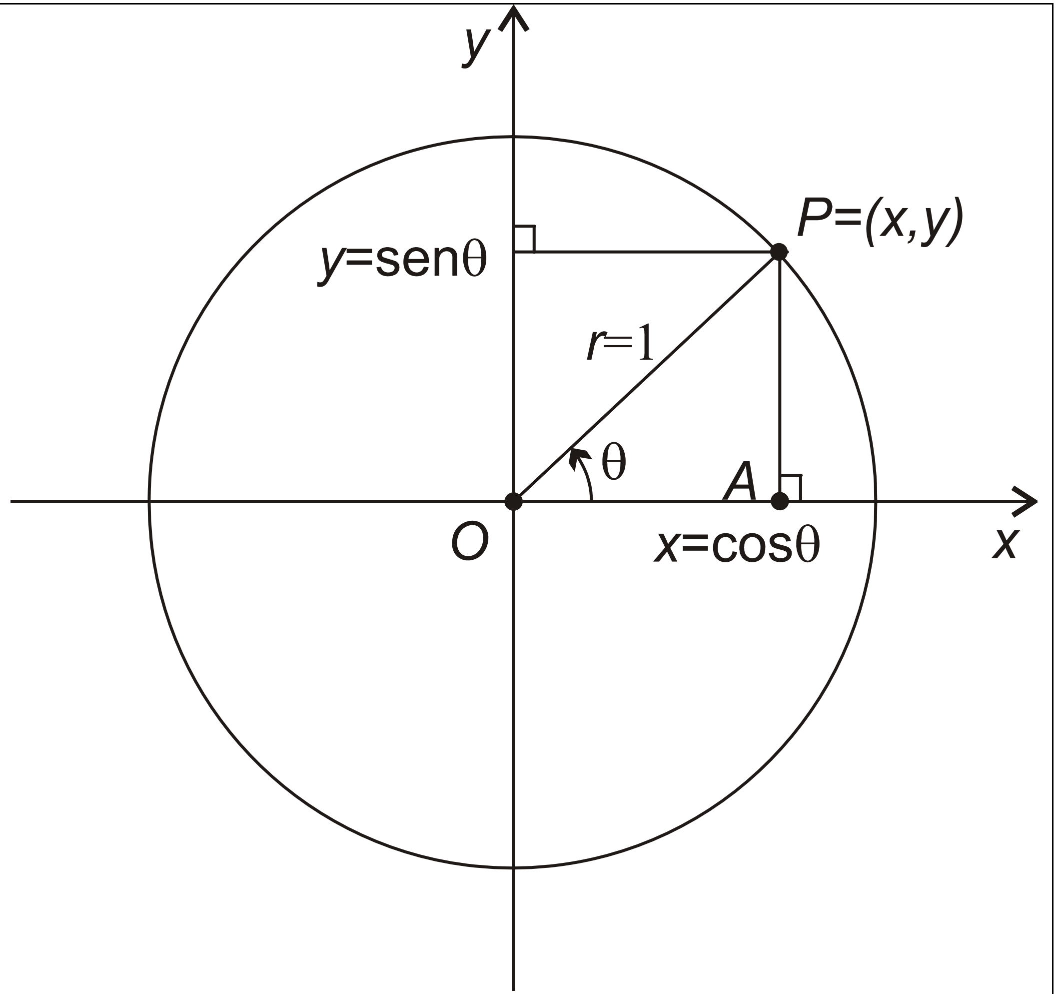
$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos(\theta) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin(\theta)$$

E anche il fatto che valgano i limiti

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \qquad \forall \theta$$

$$-1 \le \sin\theta \le 1 \qquad \forall \theta$$



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 1

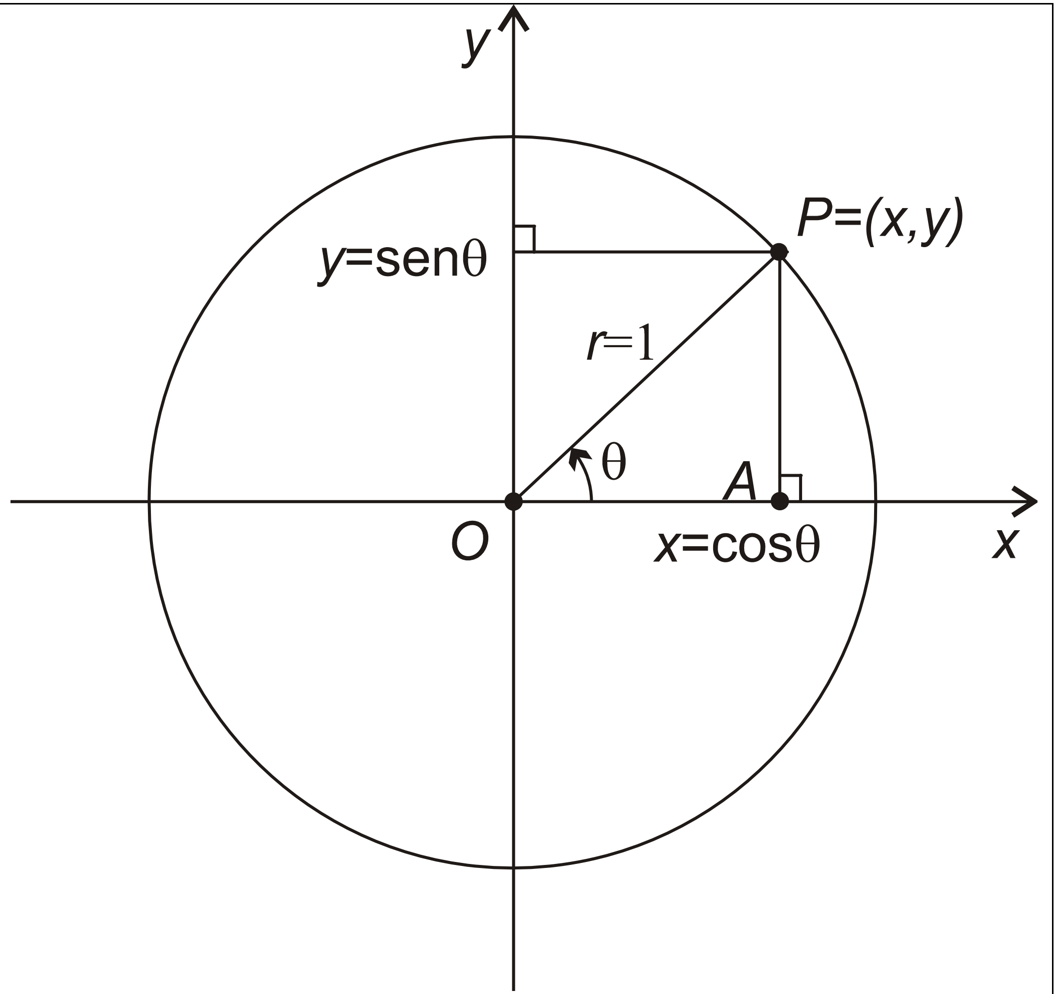
L'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo $\Delta(O,P,A)$ consente di dimostrare la nota relazione

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Altre proprietà che si possono desumere dal disegno

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 2

Altre proprietà

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$$

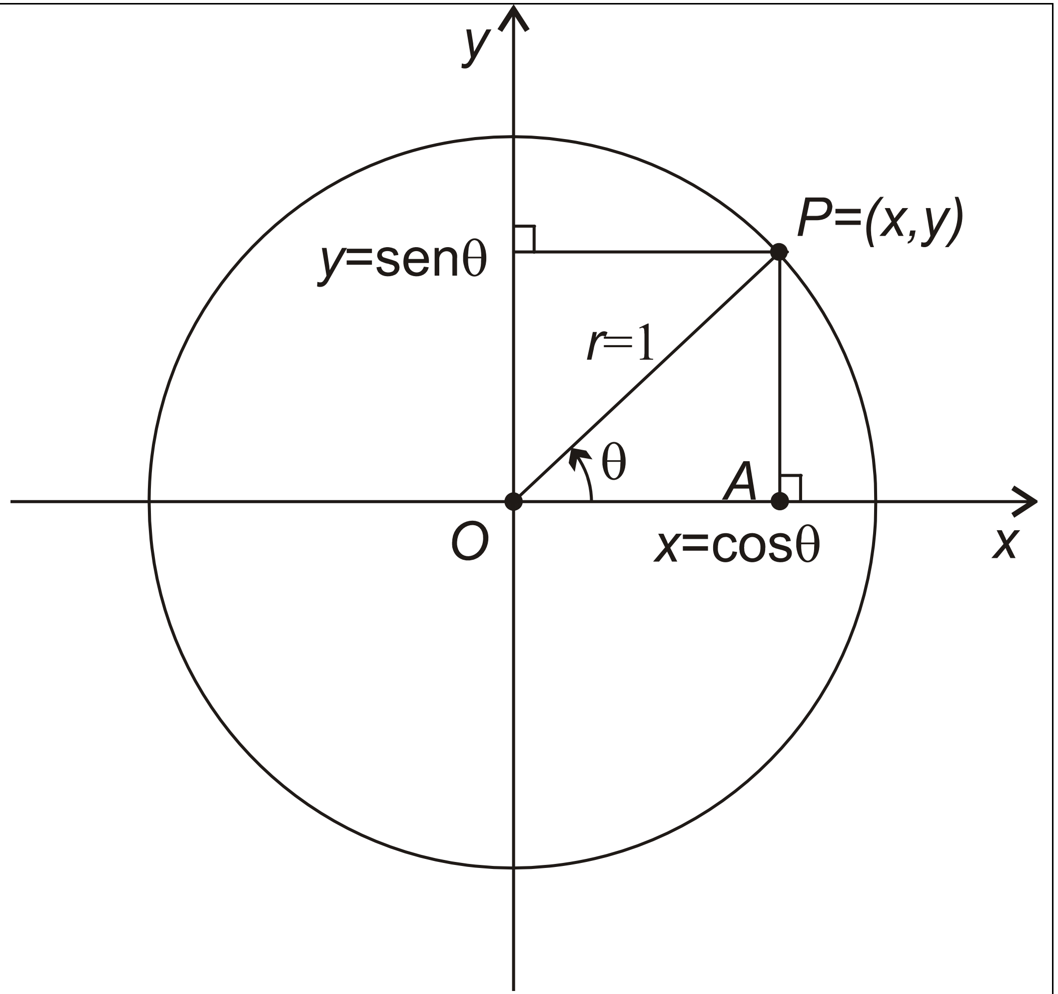
$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

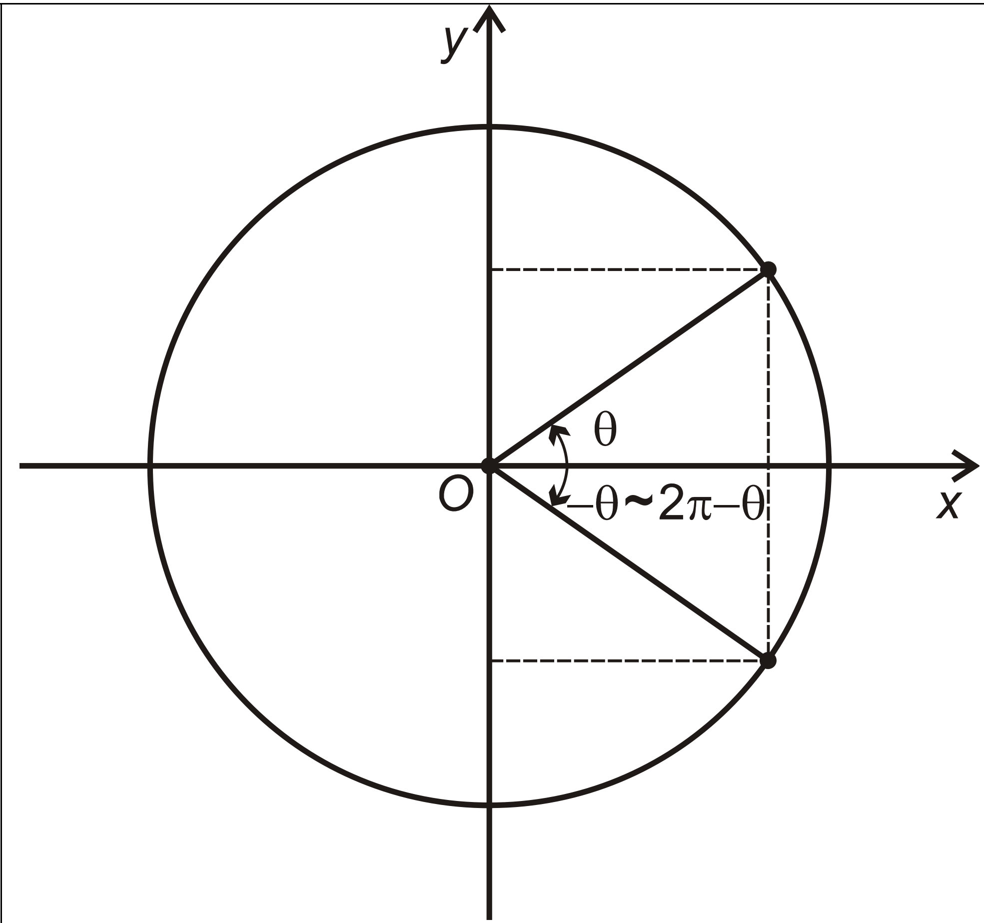
Vengono illustrate in seguito.



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 3

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$$

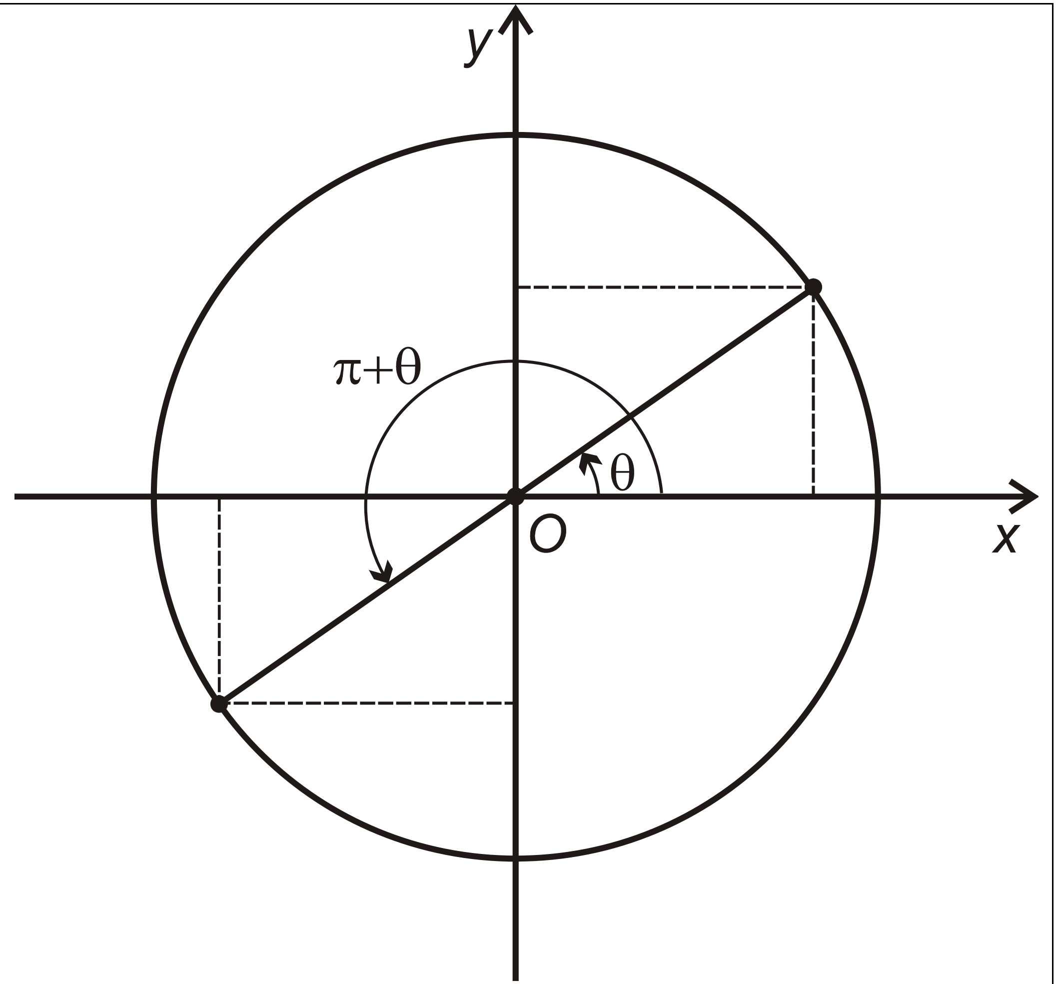


[seno_coseno_teta_2pi_meno_teta.cdr]

[seno_coseno_teta_2pi_meno_teta.wmf]

Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 4

$$\cos(\theta+\pi)=-\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta+\pi)=-\sin(\theta)$$

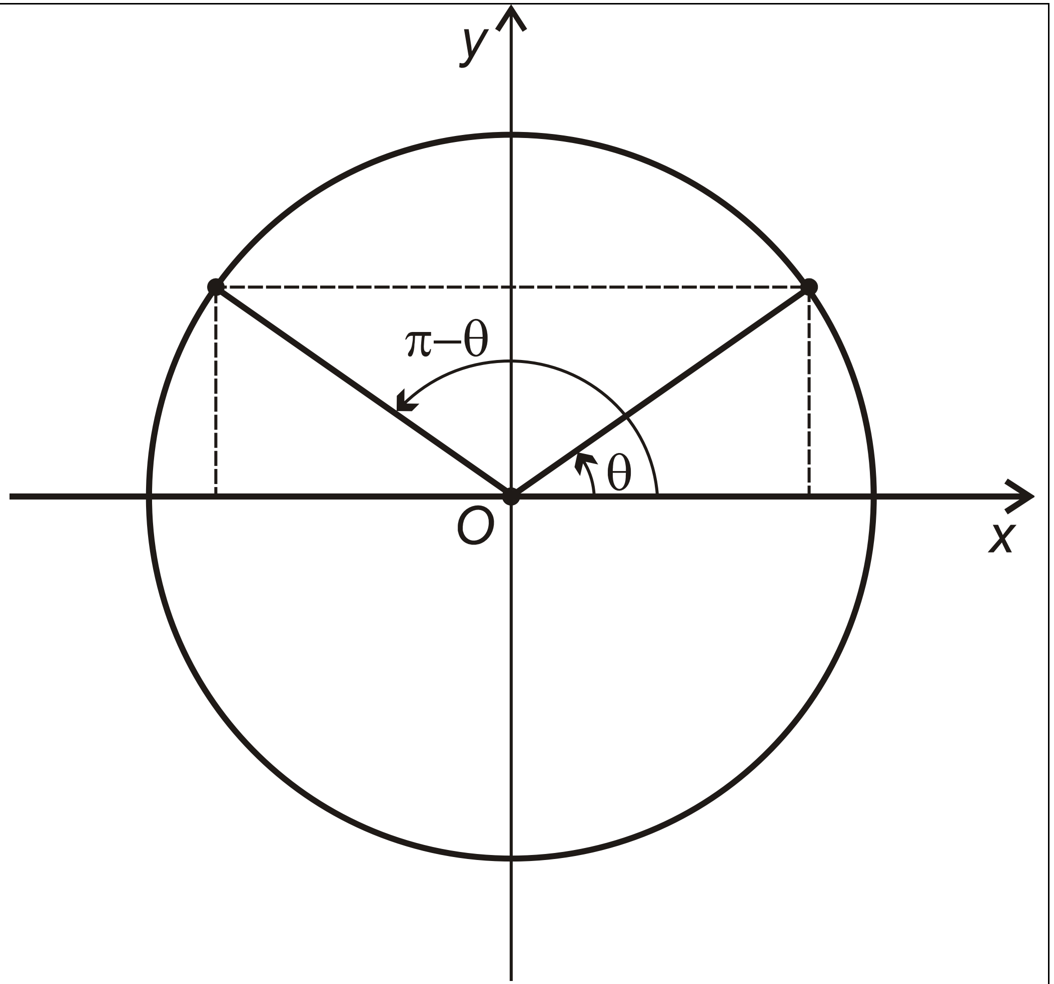


[seno_coseno_teta_pi_piu_teta.cdr; seno_coseno_teta_pi_piu_teta.wmf]

Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 5

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$



[seno_coseno_teta_e_pi_meno_teta.cdr]

[seno_coseno_teta_e_pi_meno_teta.wmf]

Casi notevoli per le funzioni seno e coseno

$$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$$
$$\sin(\pi/6) = 1/2$$

$$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$
$$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\cos(\pi/6) = 1/2$$
$$\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2$$

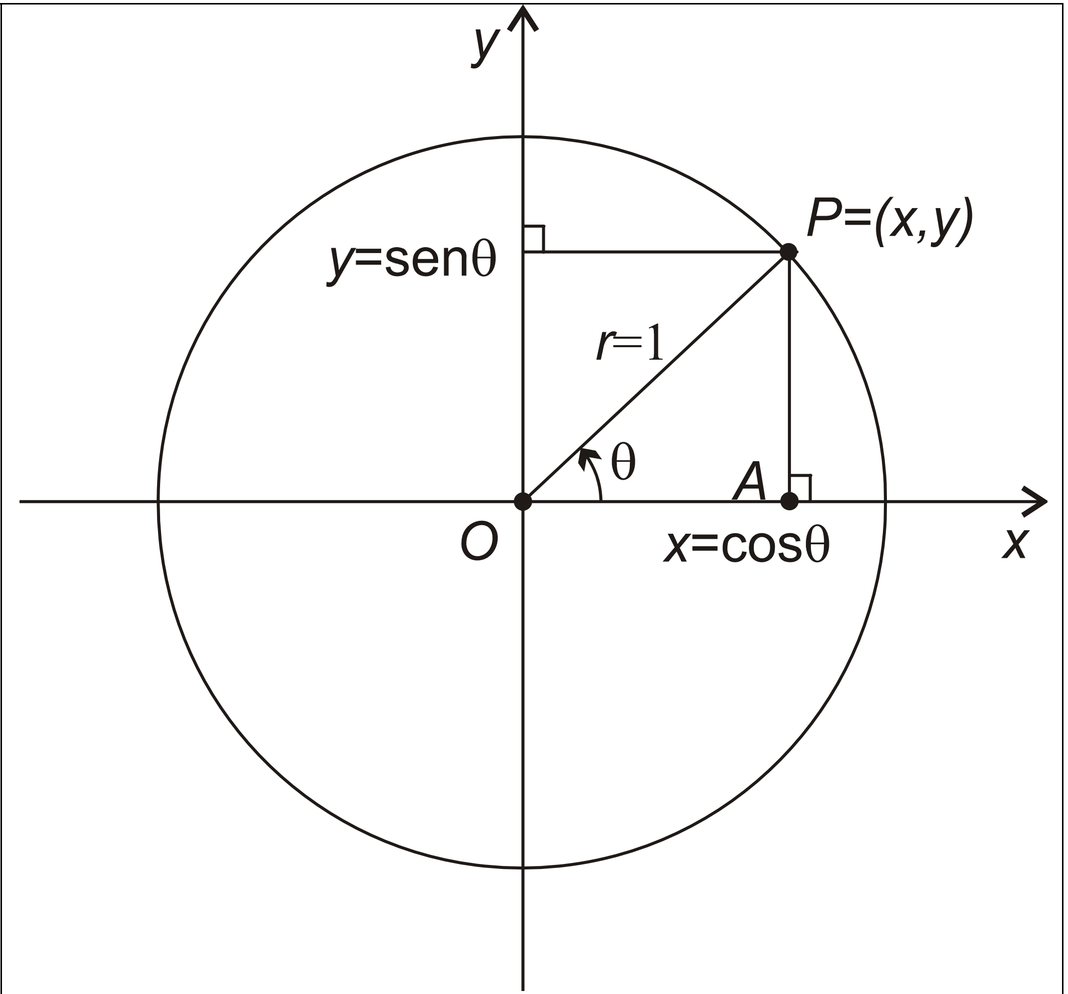
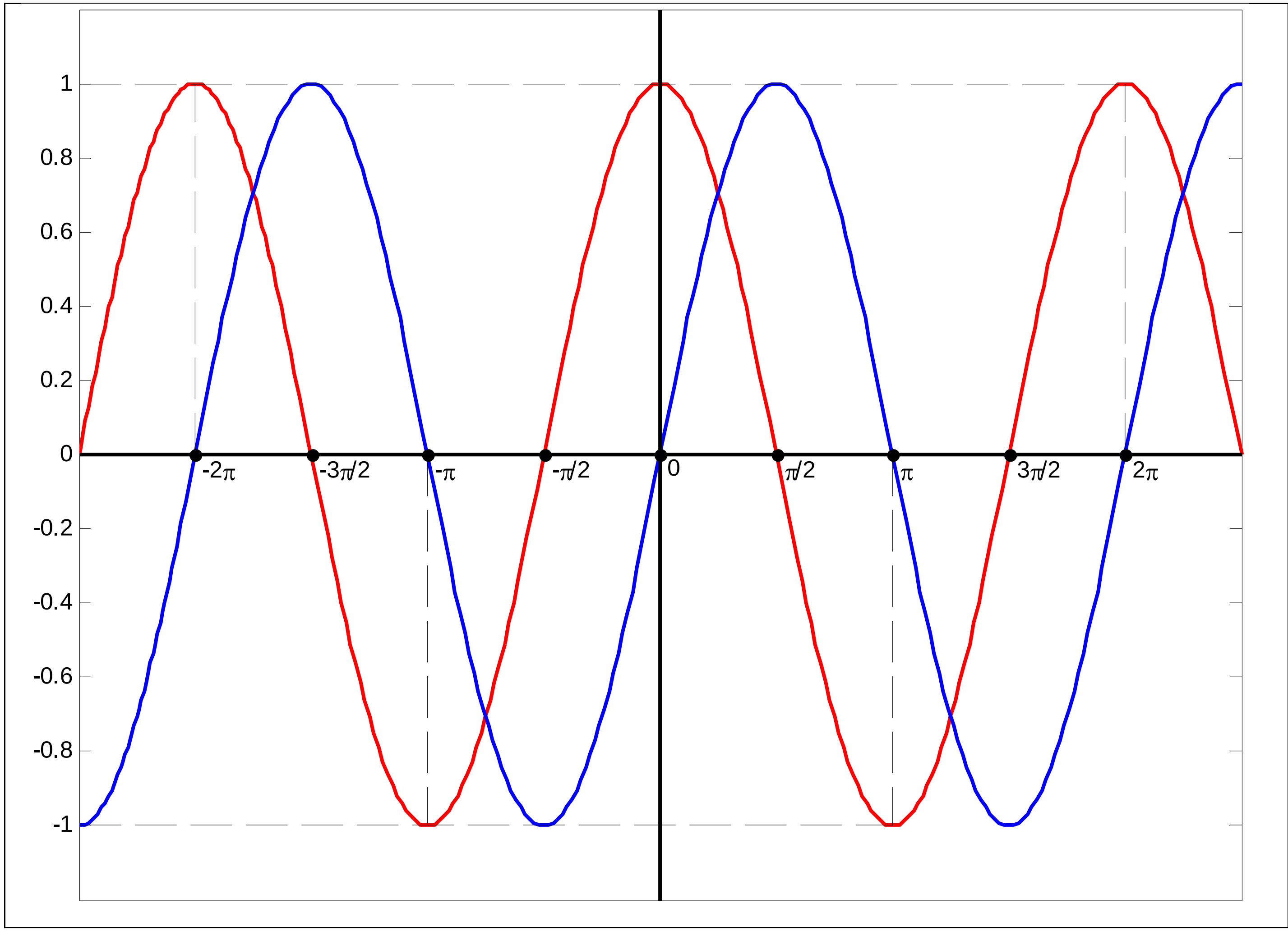


Grafico di seno e coseno

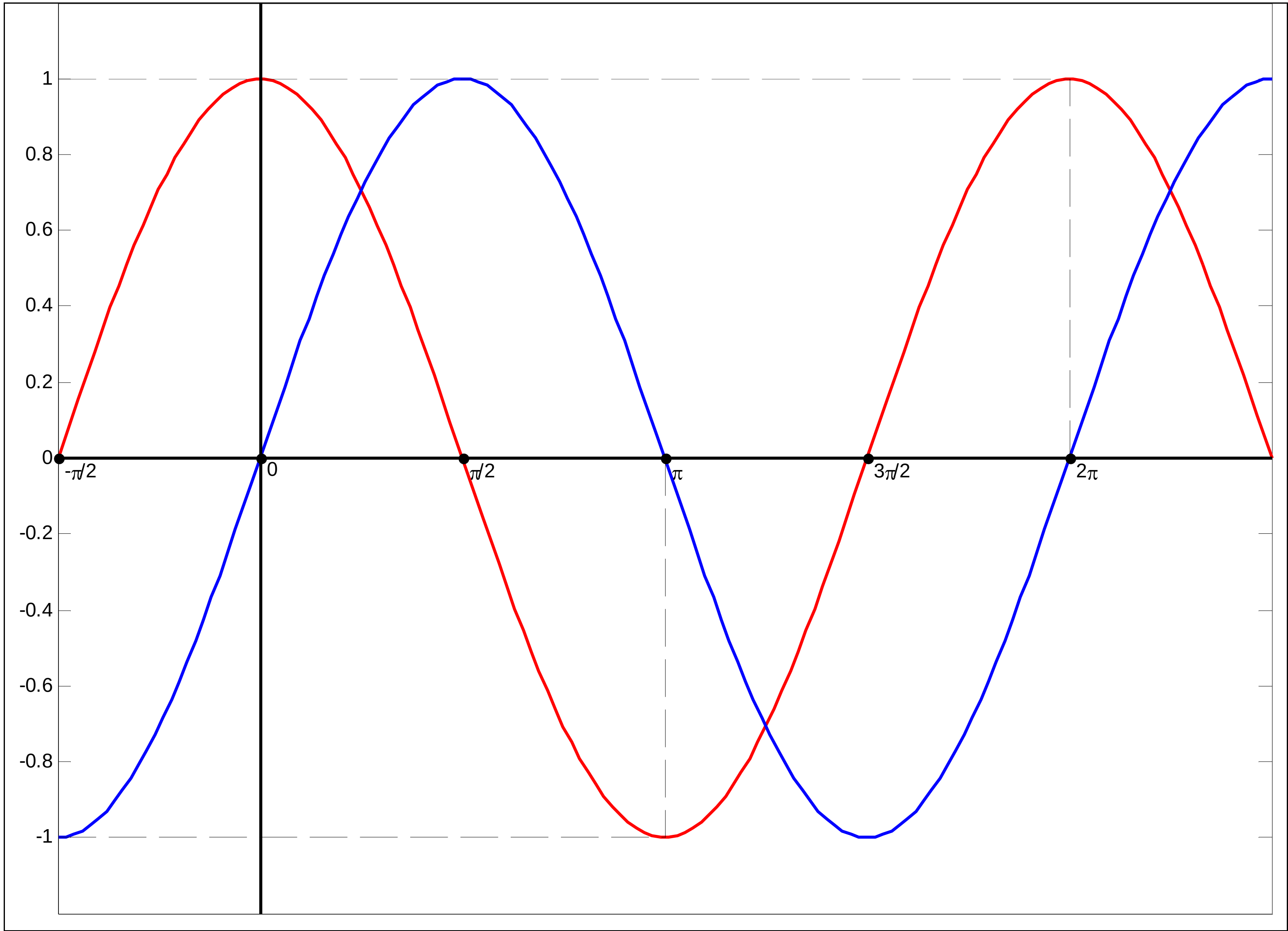


Blu - $\sin\theta$

Rosso - $\cos\theta$

[grafico_seno_coseno_4pi[m, emf]]

Grafico di seno e coseno - 2



Blu - $\sin\theta$

Rosso - $\cos\theta$

[grafico_seno_coseno_2pi.m; grafico_seno_coseno_2pi.emf]

Inversione delle funzioni

Data una funzione

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

indichiamo con $f(I)$ il suo codominio, cioè l'insieme dei valori di $\mathbb{R}$ che sono immagine di qualche punto $x \in I$.

Dato $k \in \mathbb{R}$, ci possiamo chiedere se esista e sia unico il punto

$$x_0 \in I \quad \text{tc} \quad f(x_0) = k$$

Per l'esistenza, deve valere evidentemente

$$k \in f(I)$$

L'unicità dipende dalla funzione considerata. Se

$$\forall k \in f(I) \qquad \forall ! x_0$$

si può dire che f è invertibile ed esiste

$$f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$$

Seguono esempi.

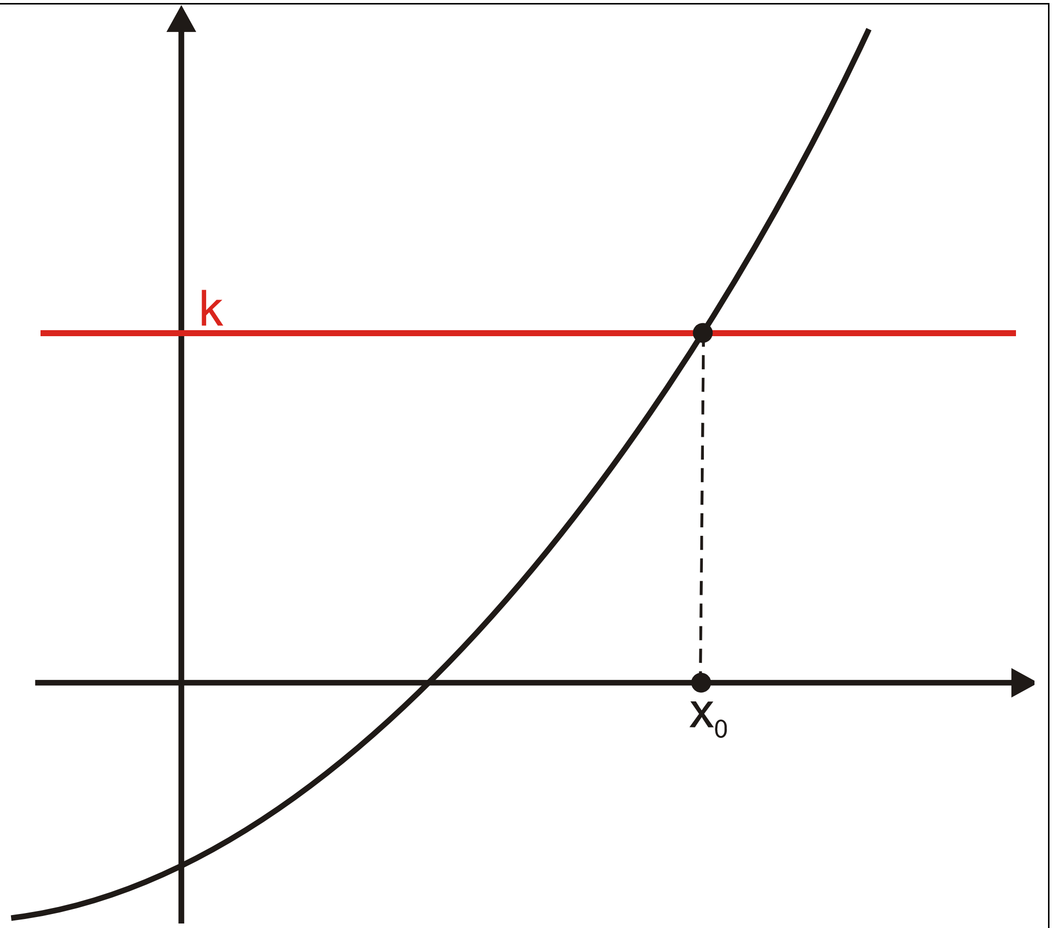
Inversione delle funzioni - 2

Per una funzione come quella indicata, si può dire che, per ogni k reale, x_0 esiste ed è unico.

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \exists! x_0$$

Dunque è definita

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



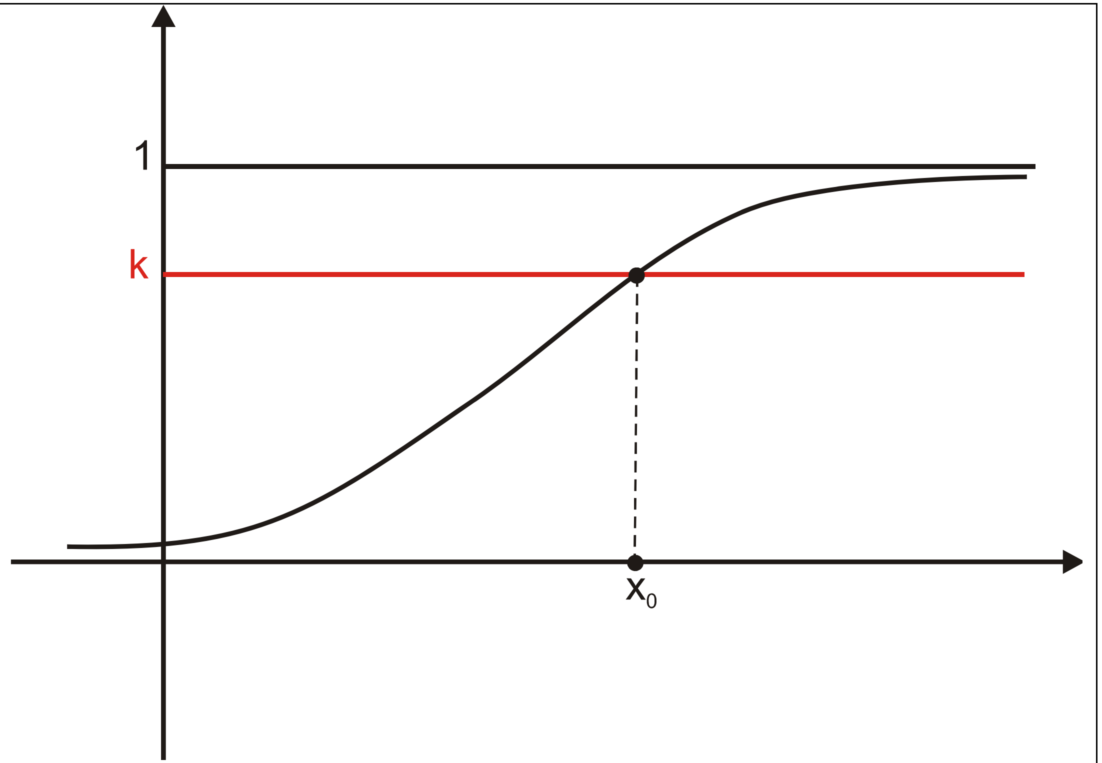
[funzione_inversa_1.cdr; funzione_inversa_1.wmf]

Inversione delle funzioni - 3

Per una funzione come quella indicata, si può dire che x_0 esiste ed è unico per i soli $k \in [0,1]$

Dunque è definita

$$f^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$$



[funzione_inversa_2.cdr; funzione_inversa_2.wmf]

Inversione delle funzioni - 4

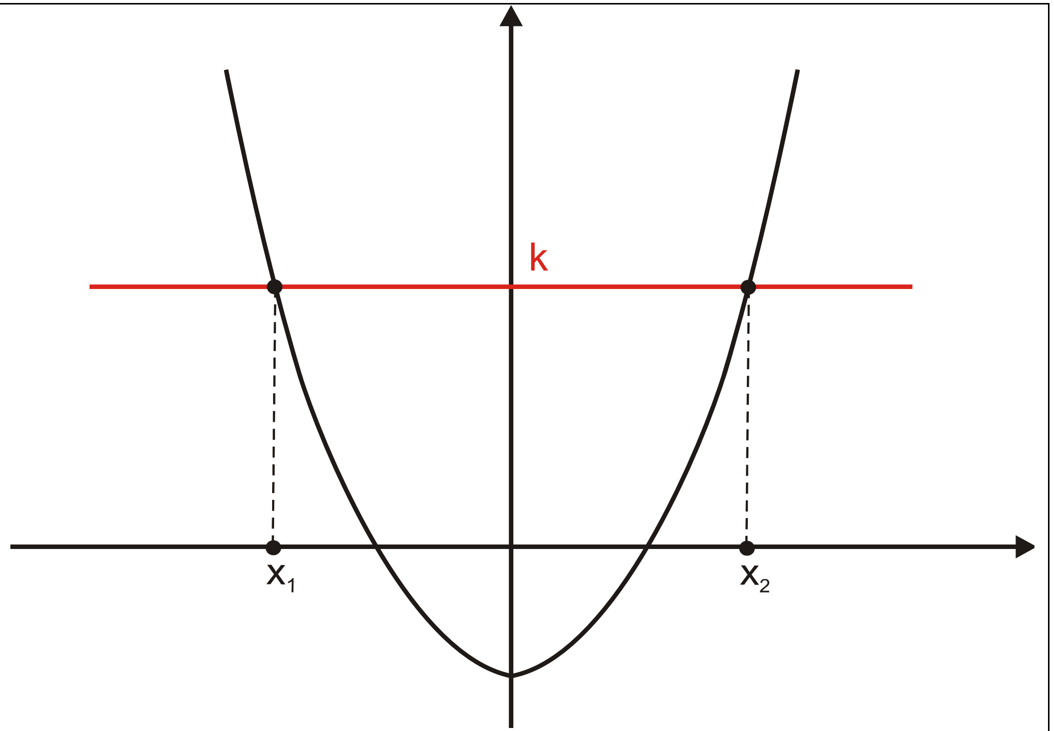
Per una funzione come quella indicata, x_0 non è unico, salvo che in un caso.

La funzione considerata può essere resa invertibile limitandone il dominio. Se si considera

$$f:[0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

Allora x_0 è unico $\forall k$ ed esiste l'inversa

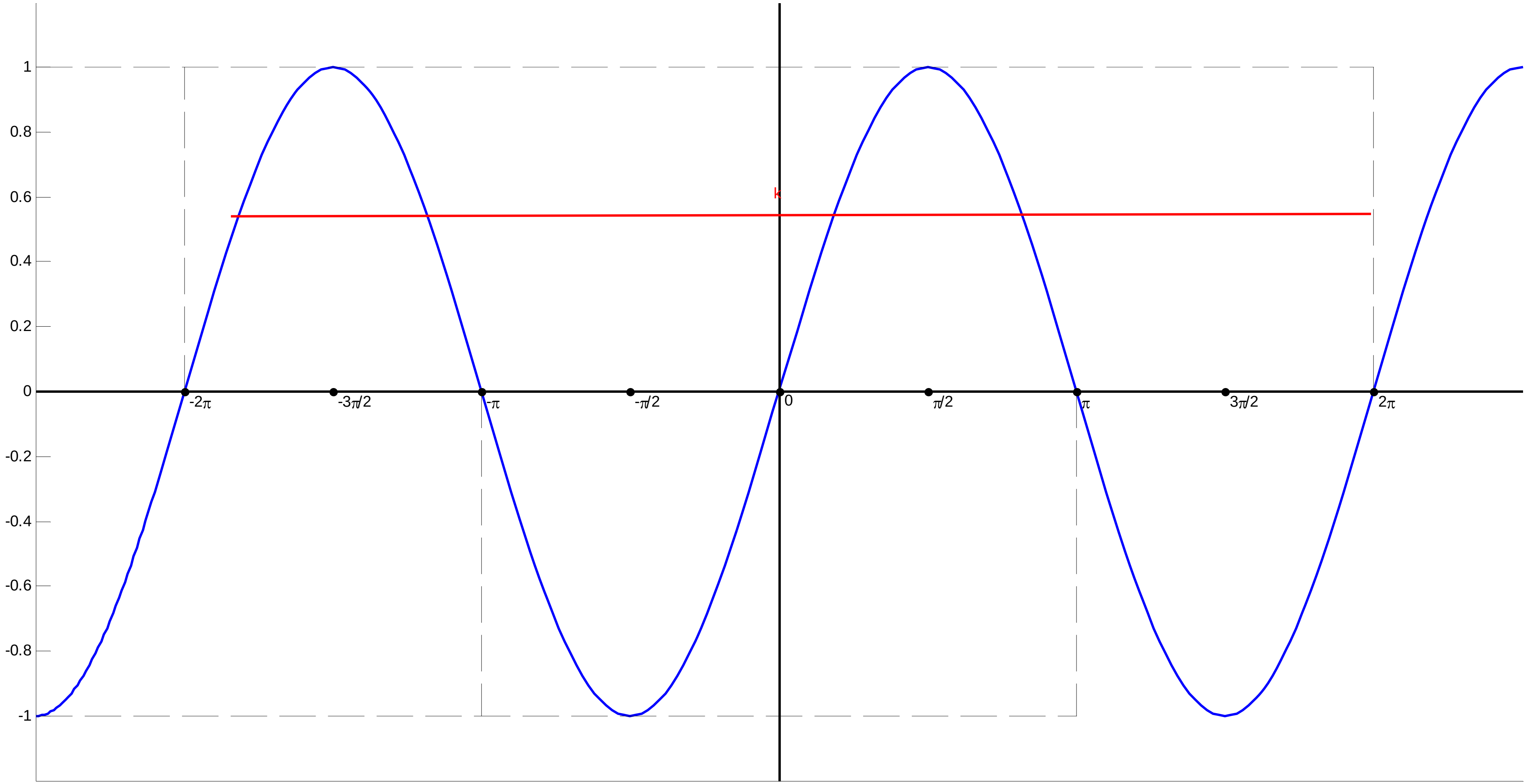
$$f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}^+$$



[funzione_inversa_3.cdr; funzione_inversa_3.wmf]

Inversione di seno e coseno

Consideriamo a titolo di esempio la funzione seno: cose analoghe valgono per il coseno.



[inversione_seno[m, emf]]

Inversione di seno e coseno - 2

Evidentemente per ogni k nell'intervallo $[-1,1]$, vi sono infiniti x_0. La funzione diventa invertibile se ne restringiamo il dominio. Di norma si considera

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$$

che è invertibile. La funzione inversa di sin è in generale indicata con arcsin; in sintesi

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

Ciò significa che, qualunque sia il k su cui si calcola arcsin, il valore restituito sta nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Cautele necessarie nell'inversione delle funzioni trigonometriche

La periodicità delle funzioni trigonometriche e la conseguente restrizione del loro dominio hanno effetti di cui non si è sempre consapevoli.

Facciamo un esempio ragionando in sessagesimali

$$\theta = 225$$

$$k = \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta_2 = \arcsin(k) = -45$$

Attenzione: non c'è errore perché entrambi gli angoli, θ e θ_2, hanno lo stesso seno. Ma la composizione in successione della funzione seno e della sua inversa non restituisce l'angolo originario

$$\arcsin(\sin(\theta)) \neq \theta$$

Definizione della tangente

Per definizione, la tangente di un angolo è

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

E' definita anche la cotangente

$$\text{ctan}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Rappresentazione delle tangente con il cerchio goniometrico

Per definizione si ha

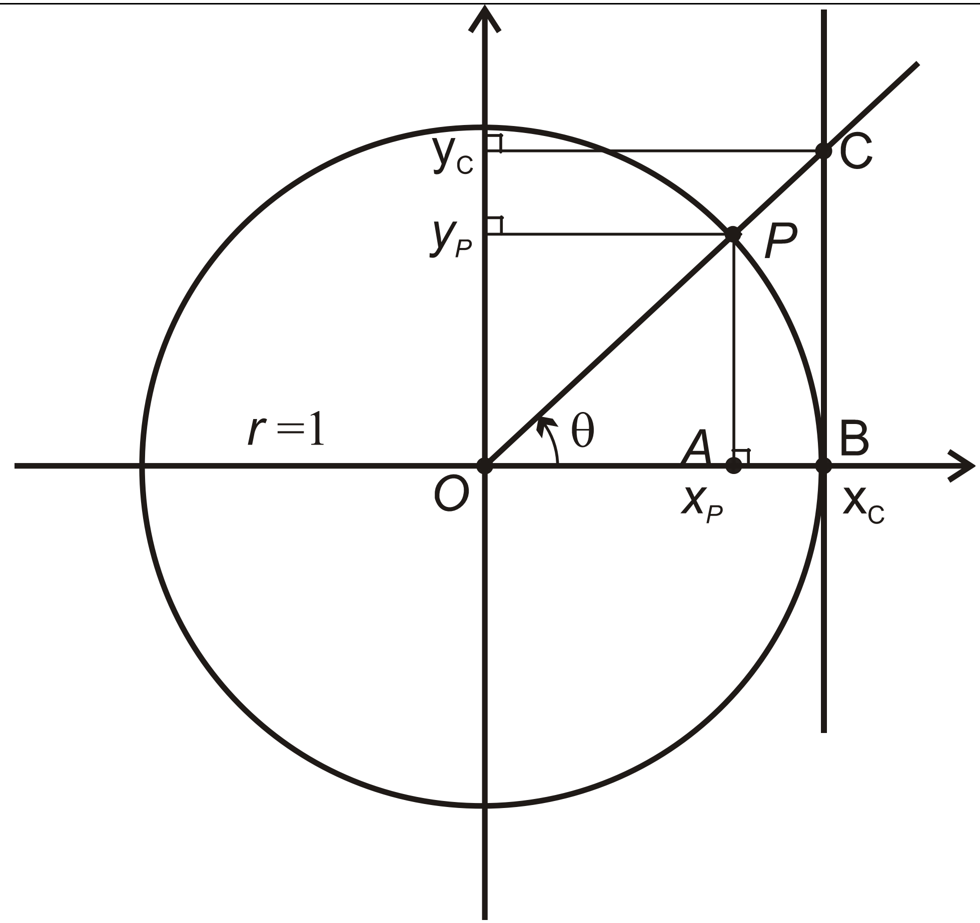
$$\tan\theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$$

Per la similitudine dei triangoli $\Delta(OAP)$ e $\Delta(OBC)$ si ha

$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}}$$

Essendo $\overline{OB} = 1$ si può concludere

$$\tan\theta = \overline{BC}$$



Ragionando sul disegno si capisce la periodicità della tangente, il segno che la funzione ha nei vari quadranti, il comportamento asintotico.

[definizione_funzione_tangente: cdr, wmf]

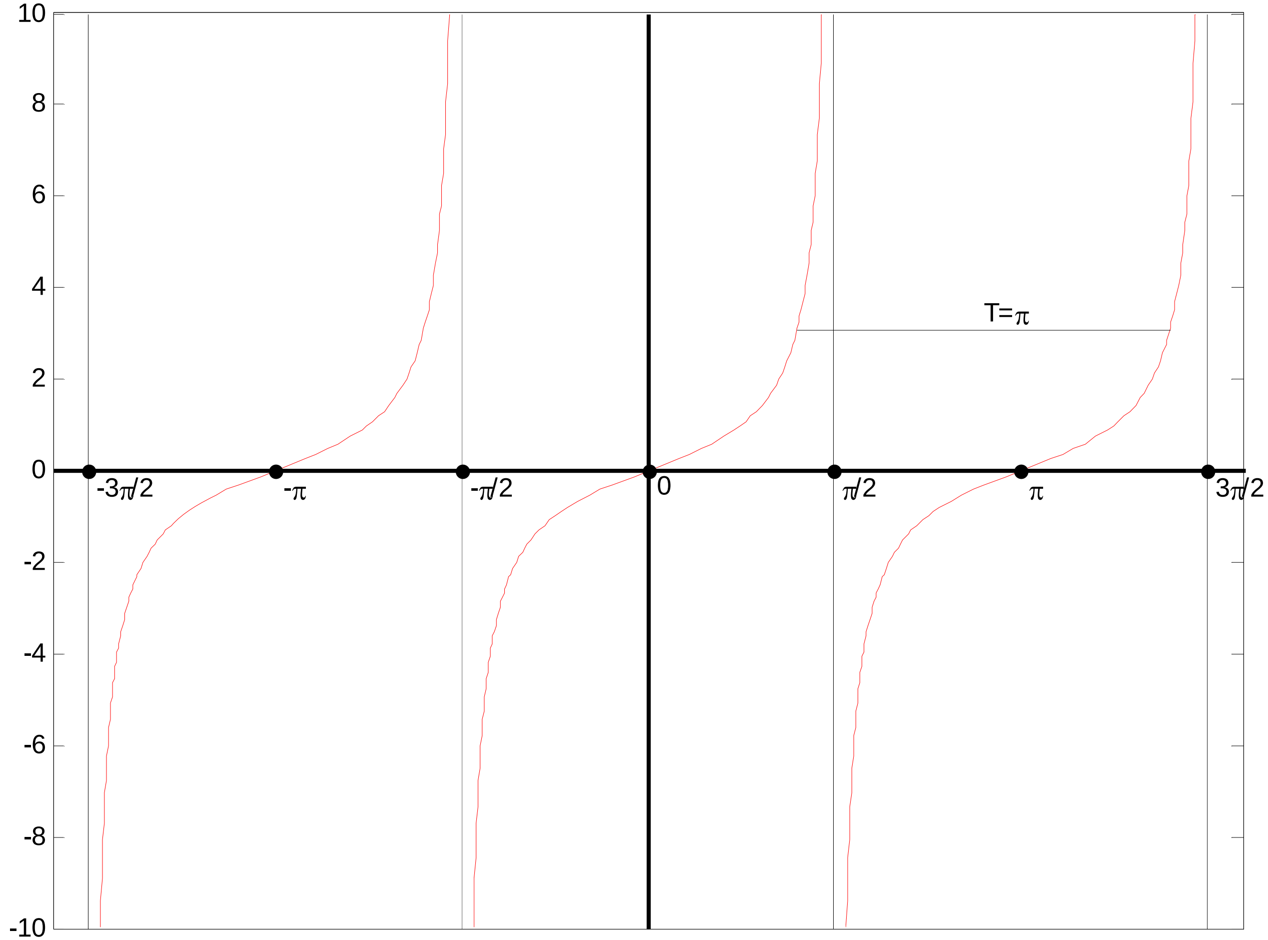
Proprietà della tangente

Ricordando le proprietà di simmetria di seno e coseno si ricavano quelle della tangente

$\tan(2\pi-\theta)=-\tan(\theta)$	$\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)$ $\sin(2\pi-\theta)=-\sin(\theta)$
$\tan(\theta+\pi)=\tan(\theta)$	$\cos(\theta+\pi)=-\cos(\theta)$ $\sin(\theta+\pi)=-\sin(\theta)$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$ $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$

La più importante à la seconda che evidenzia come la periodicità della tangente sia π

Grafico della tangente



Da notare gli asintoti.

Inversione della funzione tangente

Se si restringe il dominio nel modo seguente

$$\tan : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione può essere invertita. Anche in questo caso bisogna fare attenzione alla non chiusura dell'andata e ritorno, da intendersi

$$\arctan(\tan(\theta)) \neq \theta$$

Esempi sulla inversione della tangente

Angoli in sessagesimali

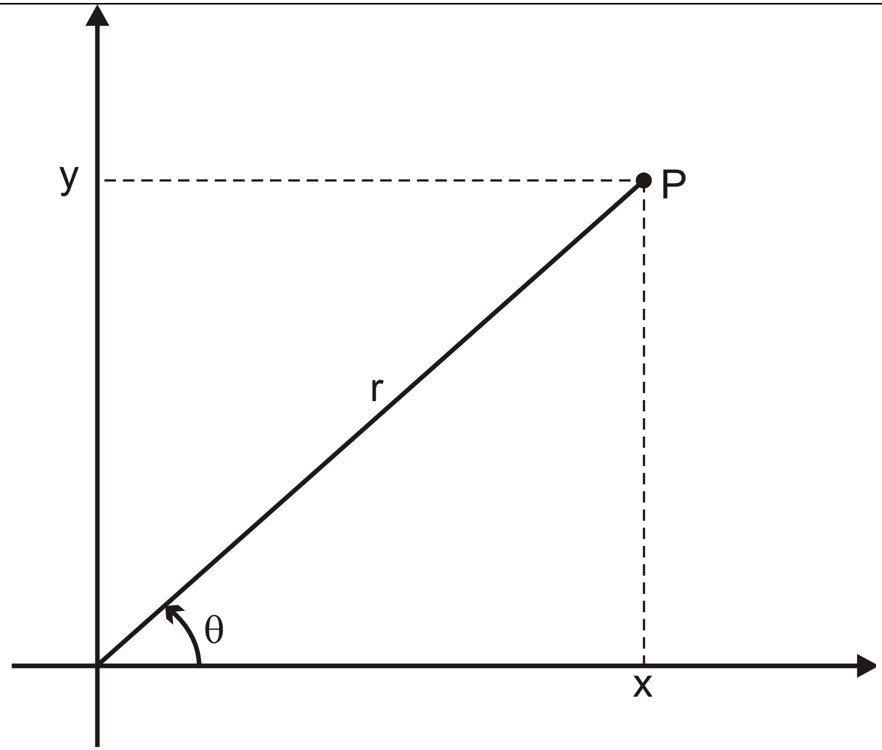
$$\theta_1 = 45 \quad t_1 = \tan(\theta_1) = 1 \quad \theta_1' = \arctan(t_1) = 45 = \theta_1$$
$$\theta_2 = 135 \quad t_2 = \tan(\theta_2) = -1 \quad \theta_2' = \arctan(t_2) = -45 \neq \theta_2$$
$$\theta_3 = 225 \quad t_3 = \tan(\theta_3) = 1 \quad \theta_3' = \arctan(t_3) = 45 \neq \theta_3$$
$$\theta_4 = 315 \quad t_4 = \tan(\theta_4) = -1 \quad \theta_4' = \arctan(t_4) = -45 \neq \theta_4$$

In sintesi, non è vero in generale che

$$\theta = \arctan(\tan(\theta))$$

Coordinate cartesiane e polari

Consideriamo un punto *P* del piano e le sue coordinate cartesiane (x, y). La posizione di *P* può essere anche caratterizzata in termini di coordinate polari (r, θ), dove *r* indica la distanza dall'origine, mentre θ è l'angolo antiorario formato dal segmento $\overline{OP}$ con il semiasse positivo delle ascisse.



L'angolo θ appartiene all'intervallo $[0,2\pi]$ oppure, in altre formulazioni, all'intervallo $[-\pi,\pi]$. θ è detto *anomalia*.

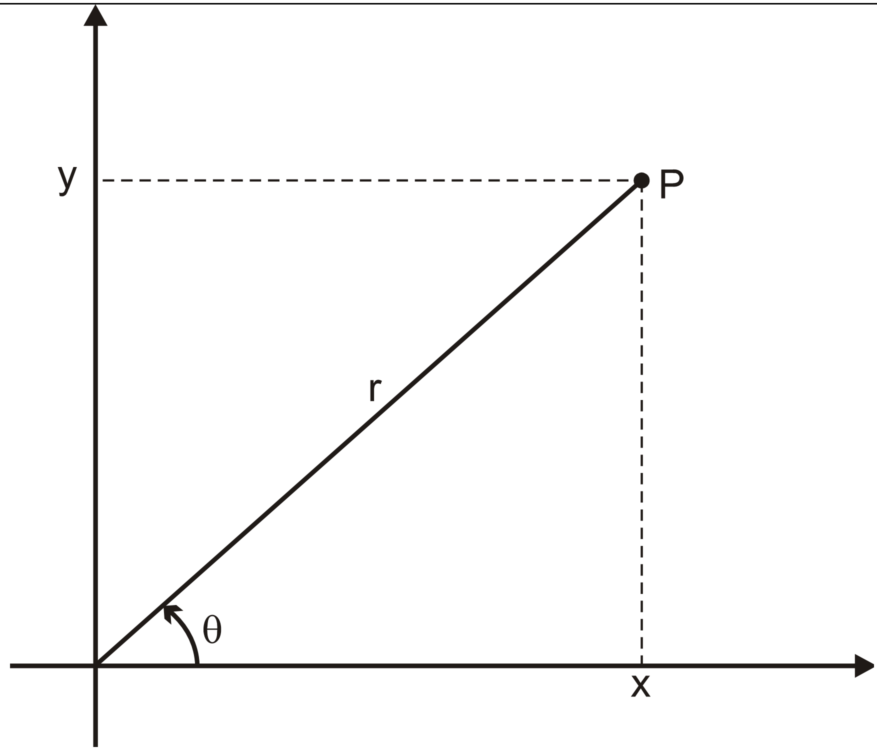
Come è possibile calcolare le cartesiane dalle polari e viceversa?

[definizione_coordinate_polari.cdr; definizione_coordinate_polari.wmf]

Da polari a cartesiane

Dal disegno, facilmente

$$x = r\cos\theta \qquad (1)$$
$$y = r\sin\theta$$



Da cartesiane a polari – 1

Partiamo dalle precedenti relazioni

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (2)$$

Quadrando e sommando si ottiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

da cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

Da cartesiane a polari – 2

Ripartiamo dalle

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Dividendo membro a membro, la seconda per la prima (sotto la condizione $x \neq 0$), si ottiene

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \qquad (4)$$

Da questa molti ricavano

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

ma ciò è scorretto.

Per precisione: l'angolo $\arctan\left(y/x\right)$ ha la stessa tangente di θ, ma in generale non coincide con θ. Il motivo è la solita non chiusura dell'applicazione consecutiva di arctan e tan, già esemplificata.

Da cartesiane a polari – 3

Facciamo ancora esempi, ricordando che la chiusura della funzione composta arctan(tan(θ)) dipende dai quadranti	$P = \begin{cases} (x, y) \\ (r, \theta) \end{cases}$ θ $\theta' = \arctan(\frac{y}{x}) \overset{?}{=} \theta$ $P_1 = \begin{cases} (1,1) \\ (\sqrt{2}, 45) \end{cases}$ $\theta_1 = 45$ $\theta_1' = \arctan(\frac{1}{1}) = 45 = \theta_1$ $P_2 = \begin{cases} (-1,1) \\ (\sqrt{2}, 135) \end{cases}$ $\theta_2 = 135$ $\theta_2' = \arctan(\frac{1}{-1}) = -45 \neq \theta_2$ $P_3 = \begin{cases} (-1,-1) \\ (\sqrt{2}, 225) \end{cases}$ $\theta_3 = 225$ $\theta_3' = \arctan(\frac{-1}{-1}) = 45 \neq \theta_3$ $P_4 = \begin{cases} (1,-1) \\ (\sqrt{2}, 315) \end{cases}$ $\theta_4 = 315$ $\theta_4' = \arctan(\frac{-1}{1}) = -45 \neq \theta_4$

Da cartesiane a polari – 4

Conclusioni: nei quadranti 2, 3 e 4 si ha

$$\theta \neq \arctan(\tan(\theta))$$

ma non è difficile trovare la relazione che lega θ e θ'.

Analizziamo il risultato delle esemplificazioni in ogni singolo quadrante. Nelle esemplificazioni:

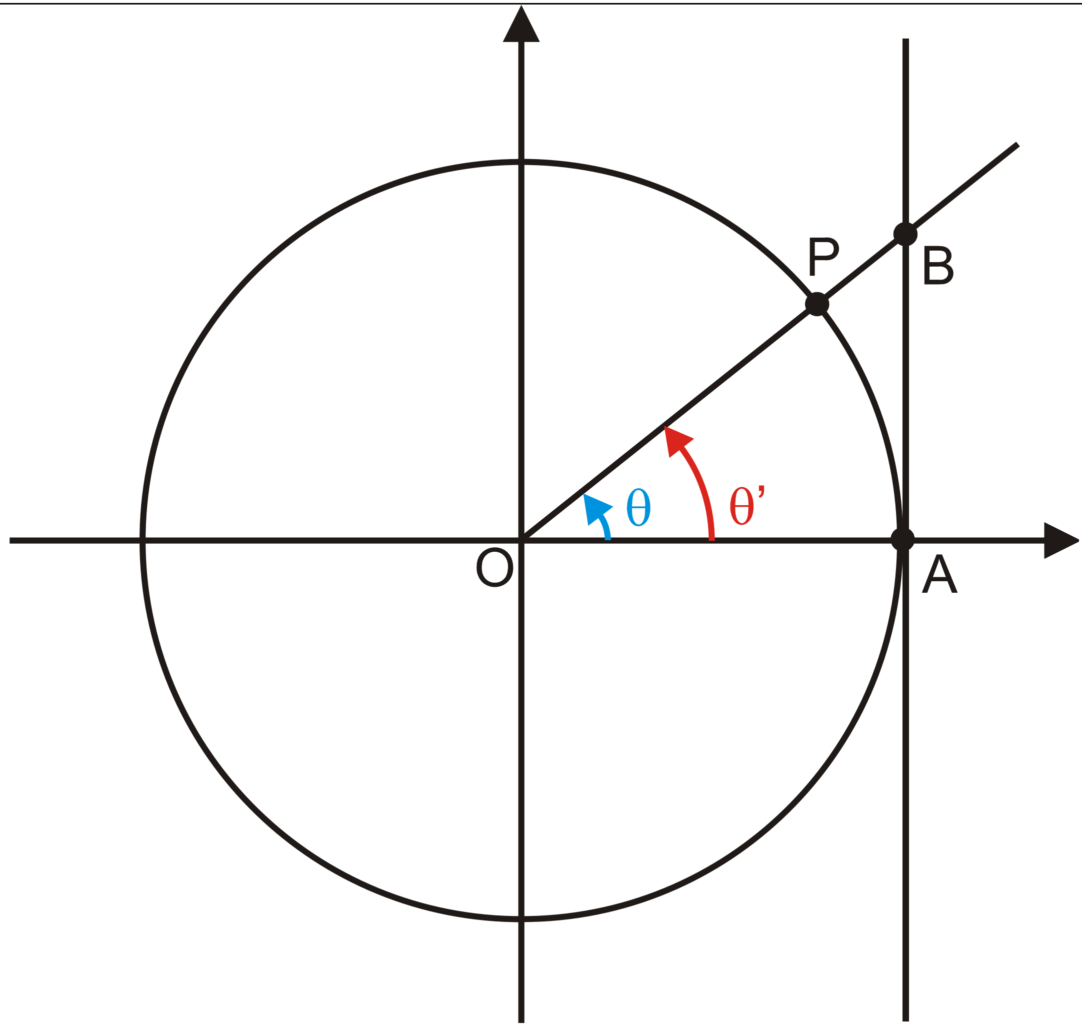
θ: anomalia del punto considerato

θ': risultato del calcolo di $\arctan(\frac{y}{x})$

Da cartesiane a polari – 5

Nel primo quadrante

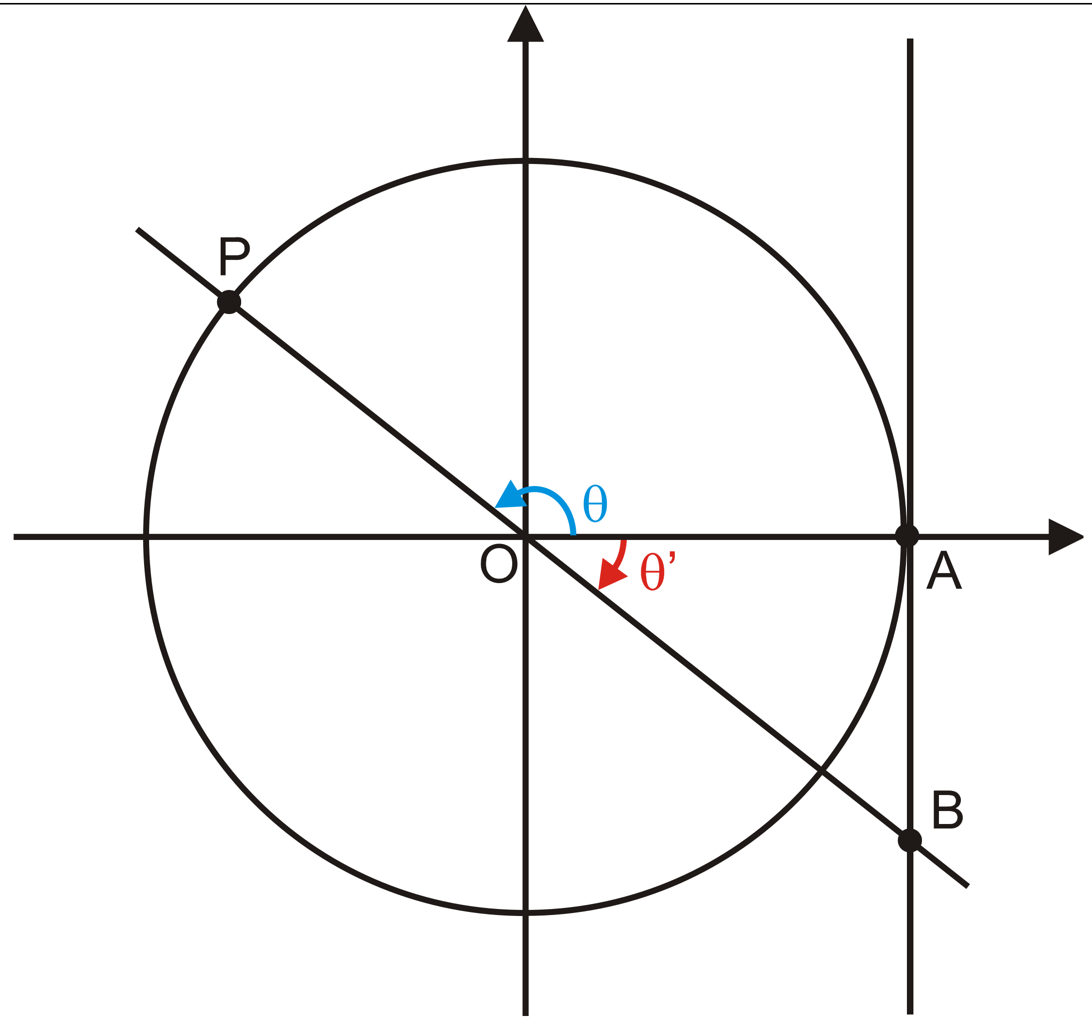
$$\theta = \theta'$$



Da cartesiane a polari – 6

Nel secondo quadrante

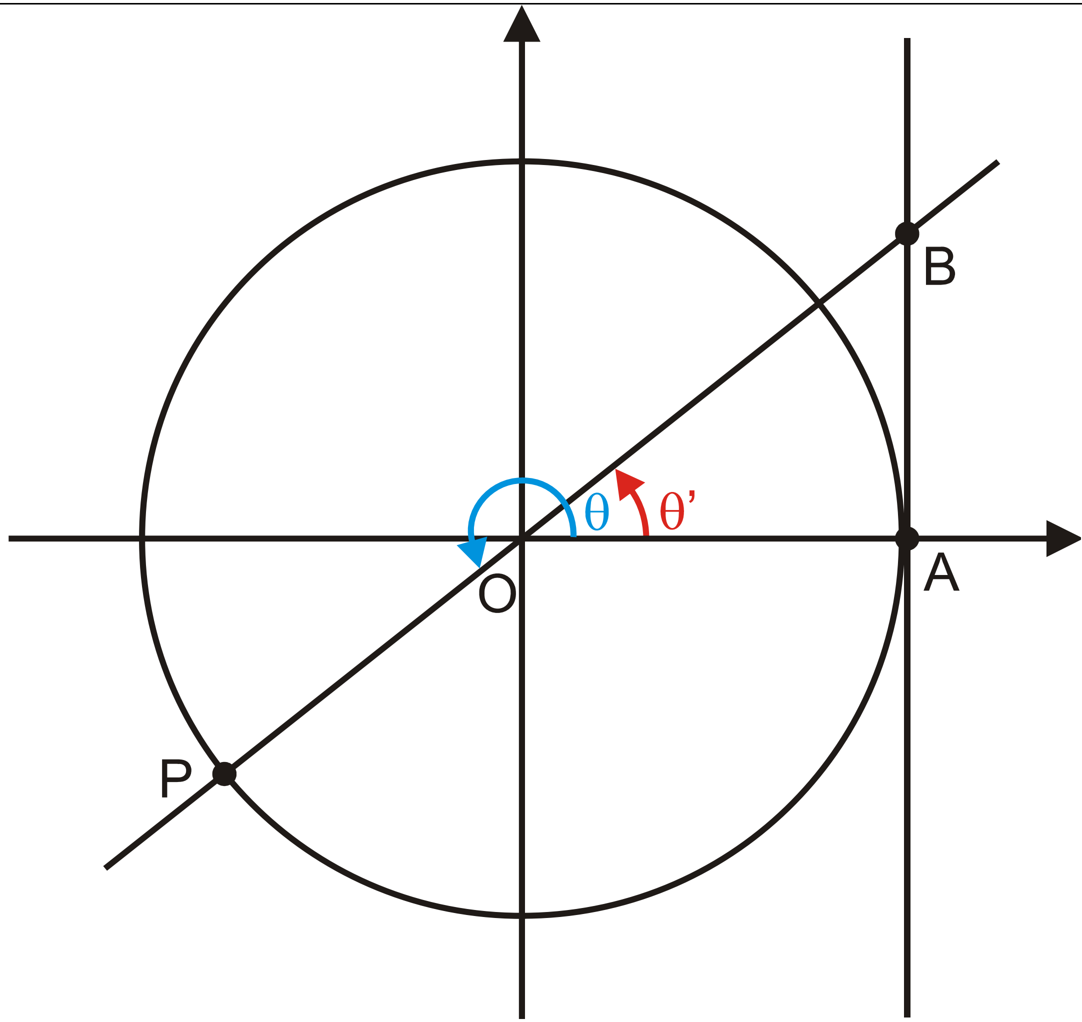
$$\theta = \theta' + \pi$$



Da cartesiane a polari – 7

Nel terzo quadrante

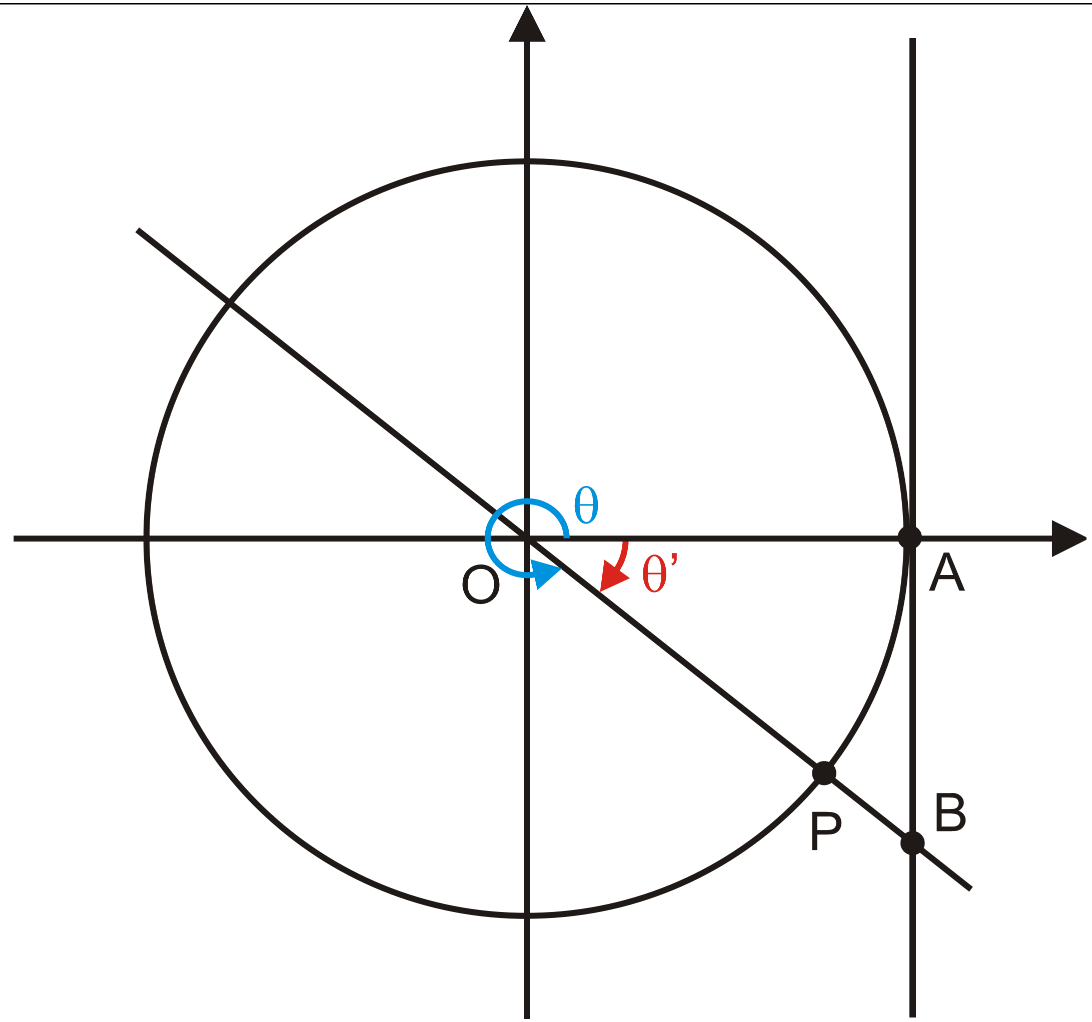
$$\theta = \theta' + \pi$$



Da cartesiane a polari – 8

Nel terzo quadrante

$$\theta = \theta' + 2\pi$$



Da cartesiane a polari – 9

Riassumiamo. Considerato un angolo ausiliario

$$\theta' = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

si ha

$$\theta = \theta(x, y) = \begin{cases} \theta' & 1° \text{ quadrante} \\ \theta' + \pi & 2° \text{ quadrante} \\ \theta' + \pi & 3° \text{ quadrante} \\ \theta' + 2\pi & 4° \text{ quadrante} \end{cases}$$

Da cartesiane a polari – 10

Traduciamo le condizioni di appartenenza ai quadranti in condizioni sulle coordinate. Notare che i quadranti 2 e 3 vengono unificati

$$\theta' = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\theta = \theta(x,y) = \begin{cases} \theta' & x > 0 \quad y \geq 0 \\ \theta' + \pi & x < 0 \\ \theta' + 2\pi & x > 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

Restano da gestire i casi in cui $x = 0$. In tali casi P si trova sull'asse delle ordinate; se si trova sul semiasse positivo θ vale $\pi/2$. Diversamente θ vale $3\pi/2$.

Da cartesiane a polari – 11

Traduciamo le condizioni di appartenenza ai quadranti in condizioni sulle coordinate.

$$\theta' = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\theta = \theta(x,y) = \begin{cases} \theta' & x > 0 \quad y \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x = 0 \quad y > 0 \\ \theta' + \pi & x < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x = 0 \quad y < 0 \\ \theta' + 2\pi & x > 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

Esercizi svolti – 1

Consideriamo il punto P avente coordinate polari $(r,\theta)=\left(3.6,2.8\right)$; angoli in radianti. Troviamo le coordinate cartesiane di P

$$x = r\cos\theta = -3.39$$

$$y = r\sin\theta = 1.21$$

Consideriamo ora il punto Q di coordinate $\left(-2.45,-4.78\right)$ e cerchiamo le coordinate polari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5.37$$

Per l'anomalia

$$\theta' = \mathrm{atan}\left(y/x\right) = 1.0972$$

Il punto si trova nel 3° quadrante dunque

$$\theta = \theta' + \pi = 4.2387$$

Esercizi

x	y	r	teta
-3.550	5.360	6.429	2.15578
3.552	-8.036	8.786	5.12864
-7.793	-4.020	8.769	3.61778
-4.410	-5.309	6.902	4.01924
5.173	-5.890	7.839	5.43301

Convertire da polari a cartesiane; angoli in radianti.

`[esercizi_polari2cartesiane.m]`

Esercizi – 2

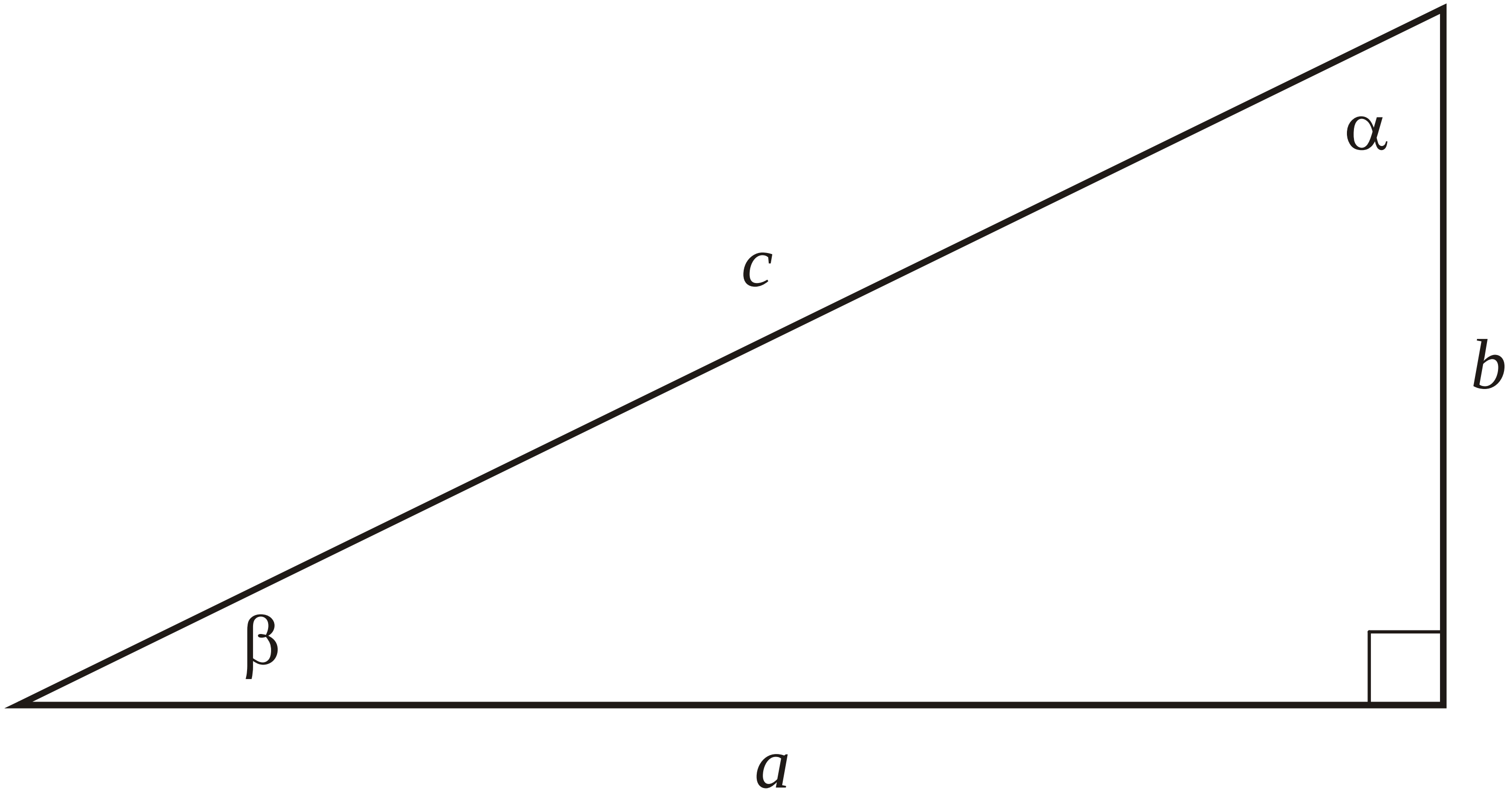
x	y	r	teta
5.579	1.625	5.811	0.28343
-8.671	-2.301	8.971	3.40098
-4.629	4.643	6.556	2.35468
3.756	6.656	7.643	1.05704
-5.488	1.962	5.828	2.79825

Convertire da cartesiane a polari; angoli in radianti.

`[esercizi_cartesiane2polari.m]`

Teoremi sui triangoli rettangoli

I teoremi sui triangoli servono a risolvere i triangoli, cioè a calcolare alcuni elementi incogniti (lati e/o angoli) in funzione di altri noti. Per i triangoli rettangoli valgono risultati particolarmente forti.



[triangolo rettangolo.wmf]

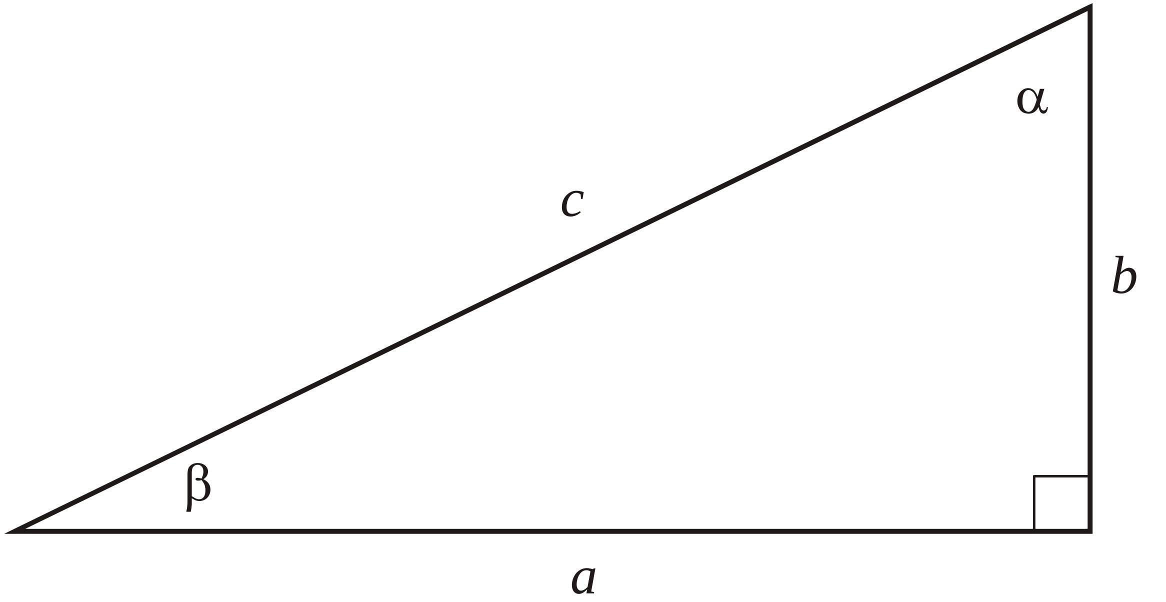
Teoremi sui triangoli rettangoli - 2

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (al cateto che si vuole calcolare).

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenuta per il coseno dell'angolo adiacente (al cateto che si vuole calcolare).

Formalmente

$$a = c\sin\alpha \qquad b = c\cos\alpha$$
$$\;\; = c\cos\beta \qquad \;\; = c\sin\beta$$

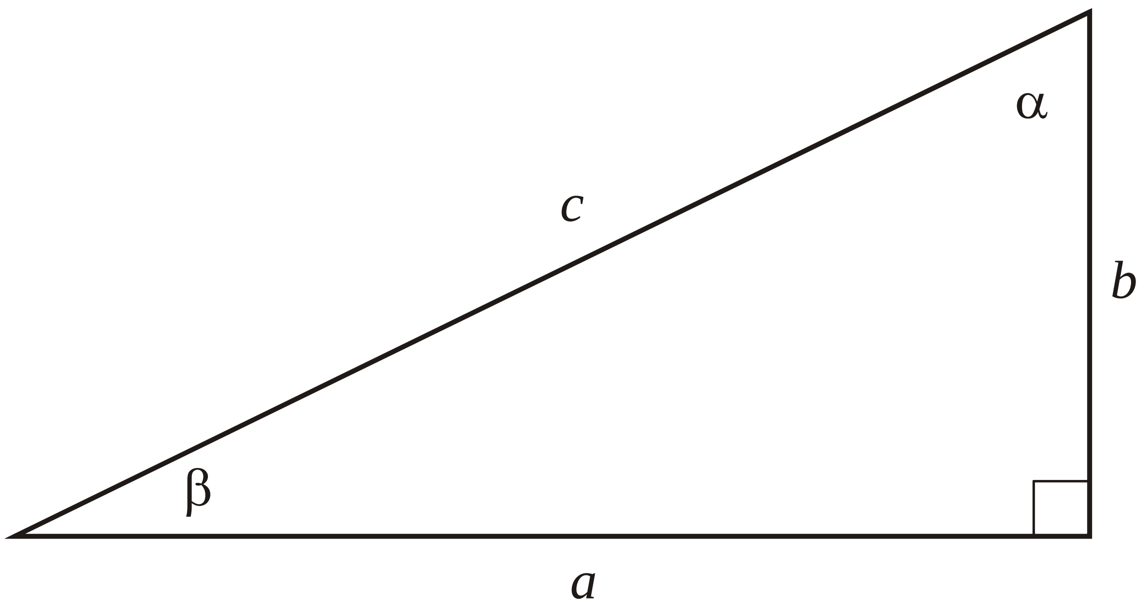


Teoremi sui triangoli rettangoli - 3

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (al cateto che si vuole calcolare).

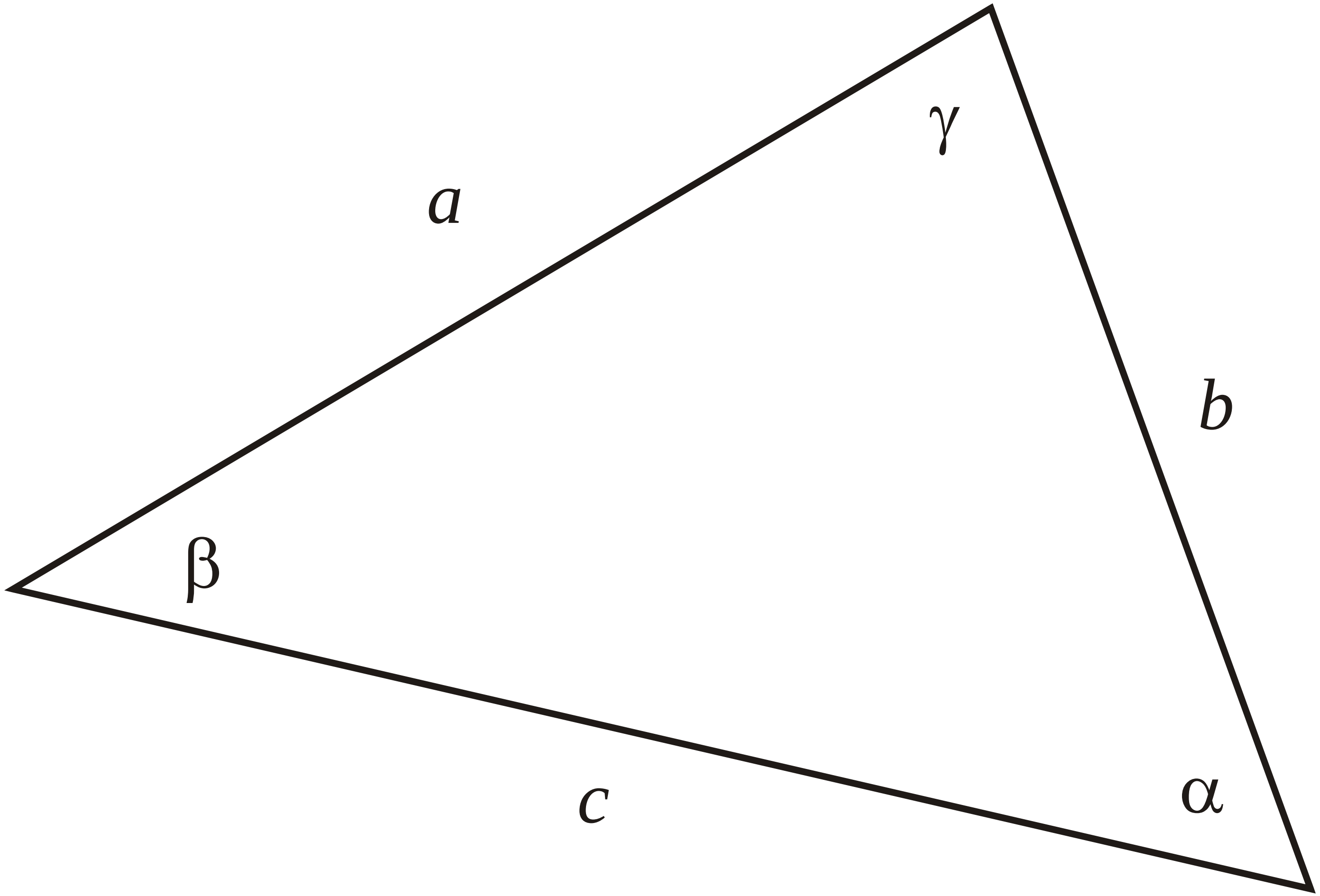
Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente (al cateto che si vuole calcolare).

$$a = b\tan\alpha \qquad b = a\tan\beta$$
$$\quad = b\cot\beta \qquad\quad = a\cot\alpha$$



Teoremi sui triangoli qualunque

Anche per i triangoli qualunque vi sono teoremi utili.

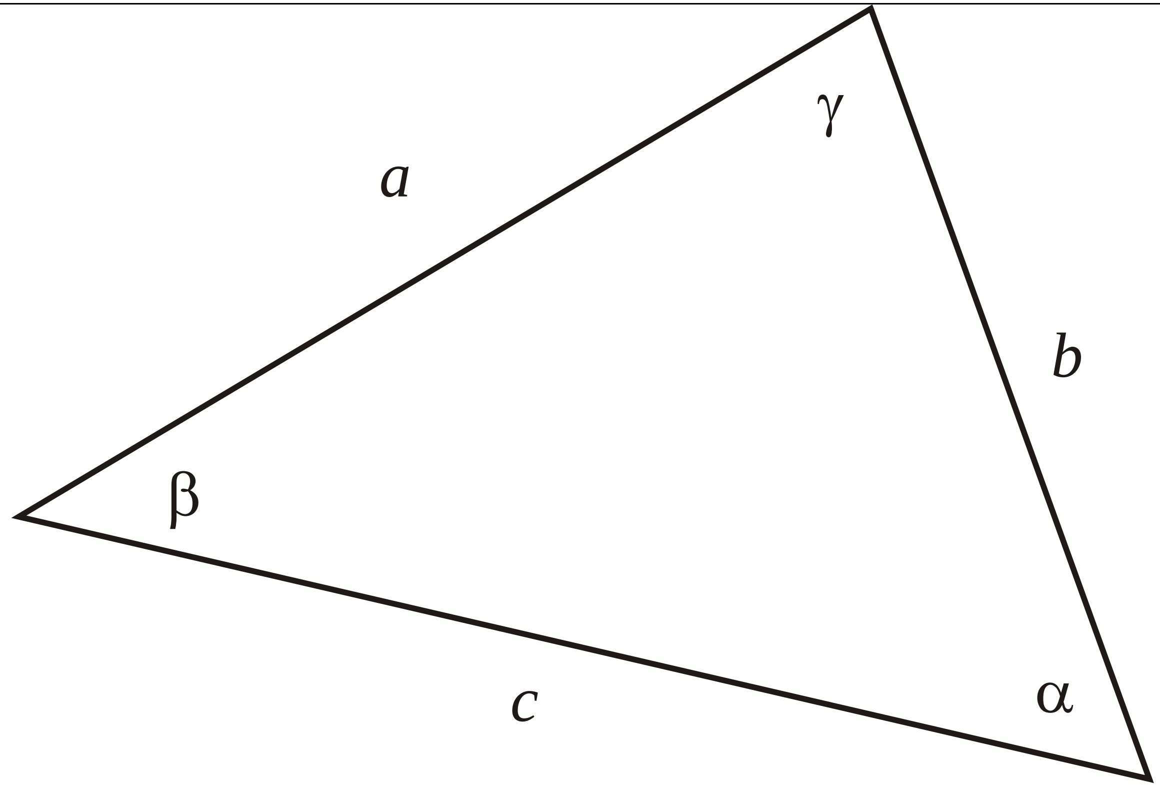


Teoremi sui triangoli qualunque - 2

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante.

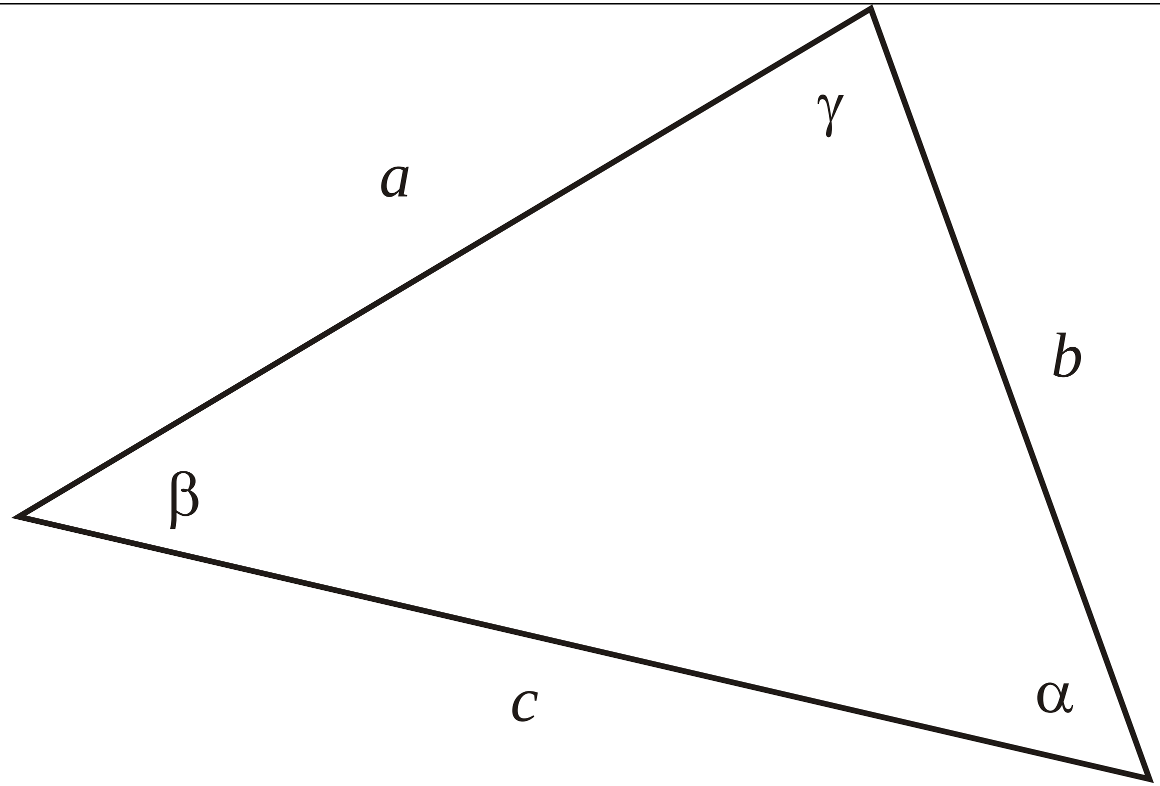


Teoremi sui triangoli qualunque - 3

Teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Il teorema costituisce una generalizzazione del teorema di Pitagora, al quale si riduce se il triangolo è retto, cioè $\gamma = \pi/2$ e $\cos\gamma = 0$.



Nota bene. Il teorema può essere applicato a ciascuno dei lati del triangolo e non certo solo a c. A sinistra: un lato qualunque; a destra: gli altri due lati e l'angolo da essi formato.

Da fare

Migliorare grafici delle funzioni trigonometriche

Disegno per dimostrare valori notevoli seno e coseno?

Formule seno e coseno di somma e sottrazione; prostaferesi