Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Coordinate polari in Topografia
Distanza topografica
Livellazione trigonometrica

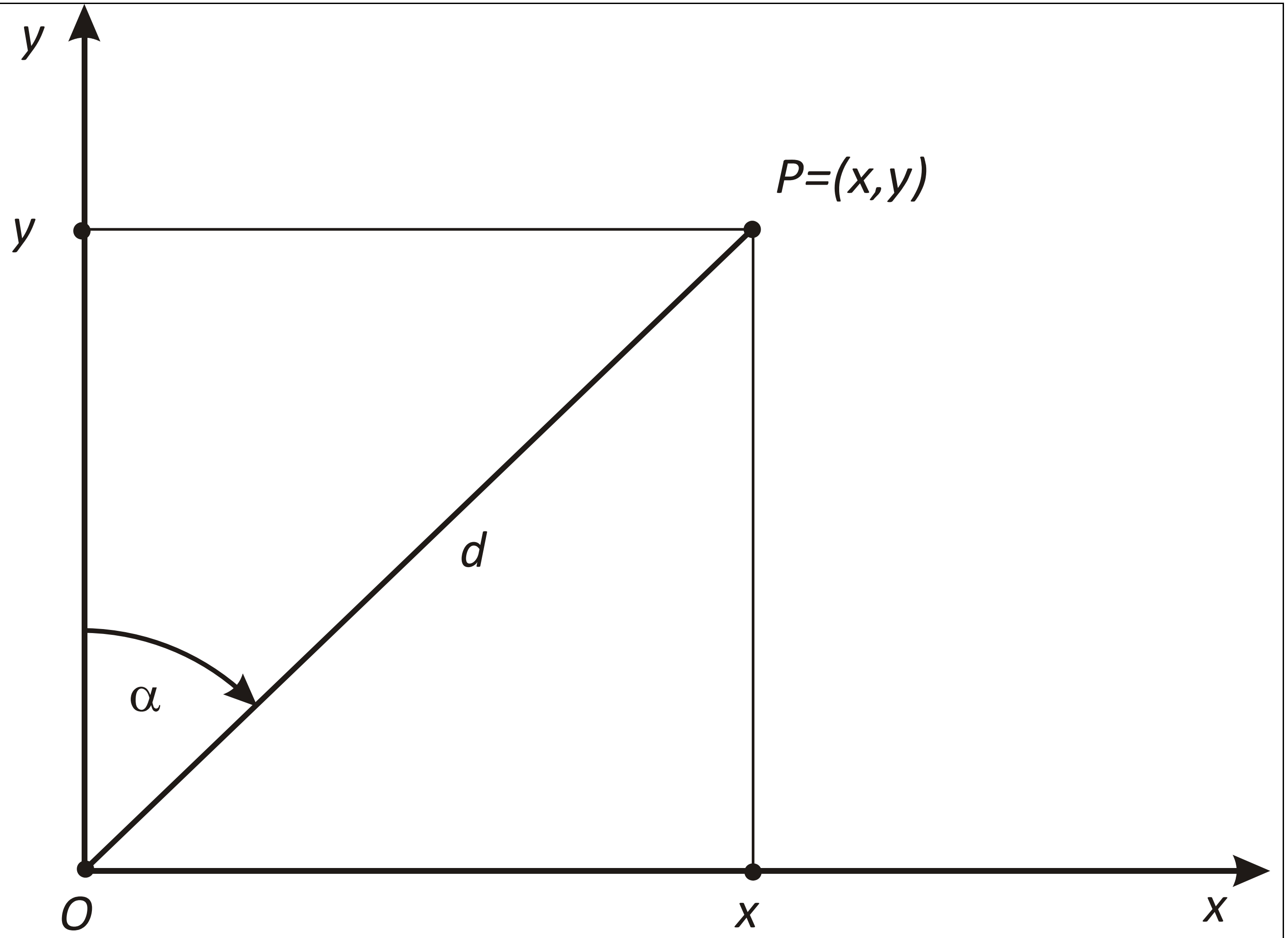
Dispense

Le coordinate polari in Topografia

In Geodesia e Topografia si usano coordinate polari definite in modo diverso che in analisi; l'anomalia α è misurata in senso orario rispetto all'asse y.

Per la conversione da polari a cartesiane, dal disegno si ricava

$$\begin{aligned} x &= r \sin\alpha \\ y &= r \cos\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$



[definizione_coordinate_polari_geodesia.cdr,wmf]

Le coordinate polari in Topografia – 2

Per ricavare le polari dalle cartesiane, ricordiamo preliminarmente i nomi dei quadranti nella trigonometria classica e in quella dei Topografi.

DISEGNO

Le coordinate polari in Topografia – 3

Come invertire le (1). Anzitutto quadrando e sommando si ottiene facilmente

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dividendo membro a membro la seconda per la prima si ha

$$\tan\alpha = \frac{x}{y}$$

Il problema è al solito come calcolare α da (x, y), visto che è scorretto scrivere semplicisticamente

$$\alpha = \arctan\frac{x}{y}$$

Le coordinate polari in Topografia – 4

Si vede facilmente che i risultati trovati per le coordinate polari degli analisti valgono anche per i corrispondenti quadranti delle coordinate polari dei topografi. Indicato con

$$\alpha' = \arctan\frac{x}{y}$$

Si ha

$$\alpha = \alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha' & \text{1° quadrante} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{asse x positivo} \\ \alpha' + \pi & \text{2° e 3°quadrante} \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{asse x negativo} \\ \alpha' + 2\pi & \text{4° quadrante} \end{cases}$$

Le coordinate polari in Topografia – 5

In sintesi:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

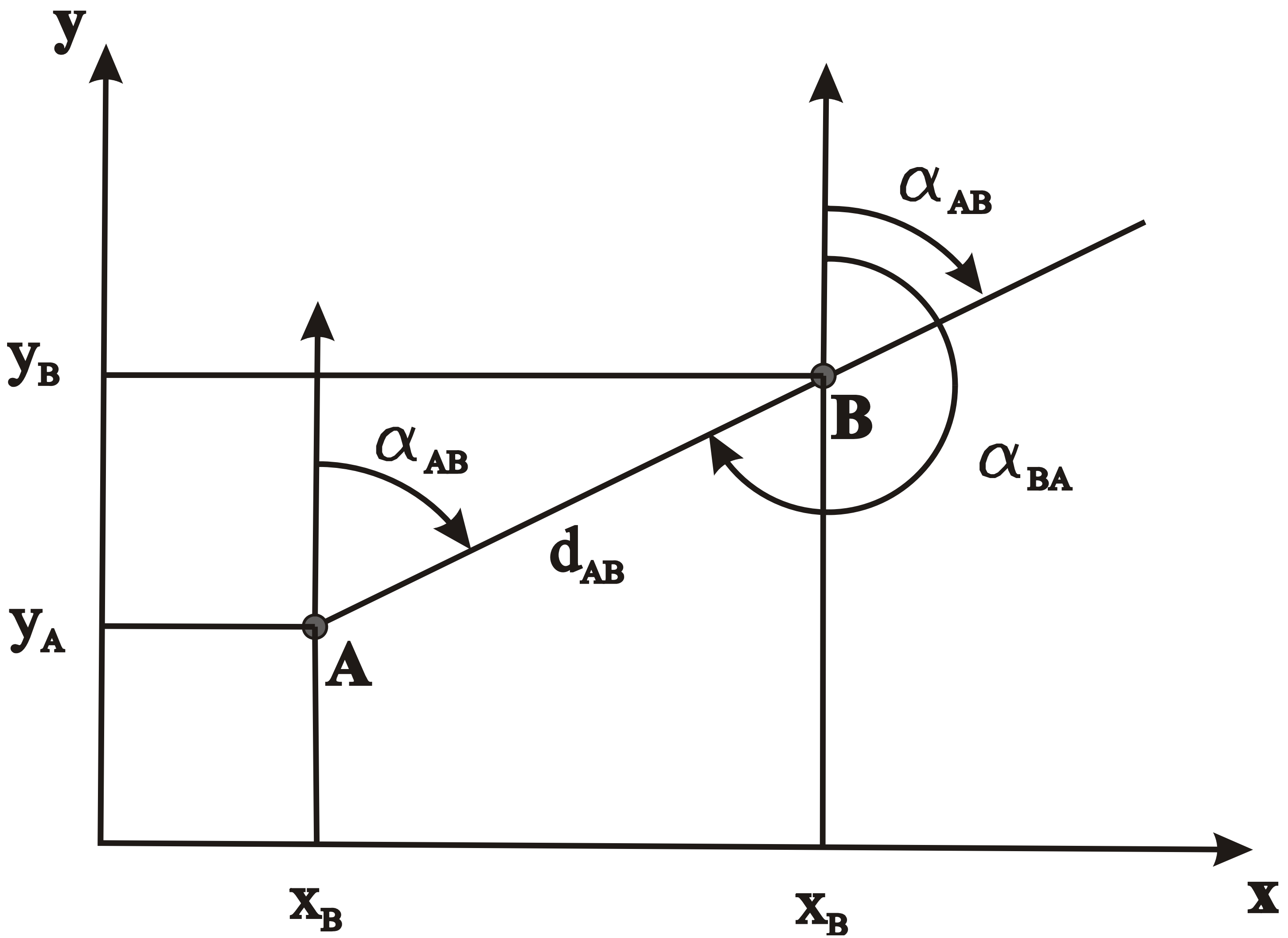
e posto

$$\alpha' = \arctan \frac{x}{y}$$

$$\alpha = \alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha' & x > 0 \quad y \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x > 0 \quad y = 0 \\ \alpha' + \pi & y < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x < 0 \quad y = 0 \\ \alpha' + 2\pi & x < 0 \quad y > 0 \end{cases}$$

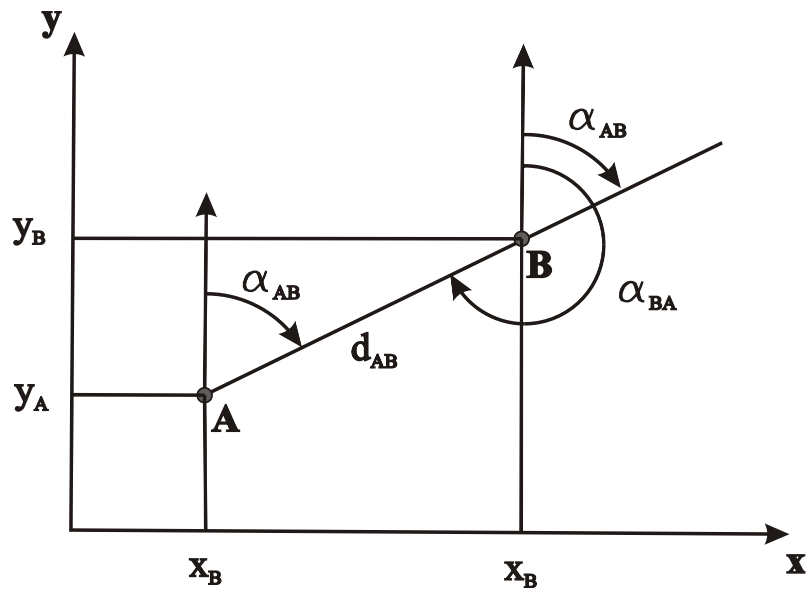
Coordinate polari di un segmento orientato

E' interessante caratterizzare, in termini di coordinate polari, un segmento di estremi $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$. Viene introdotto l'angolo di direzione.



Coordinate polari di un segmento orientato - 2

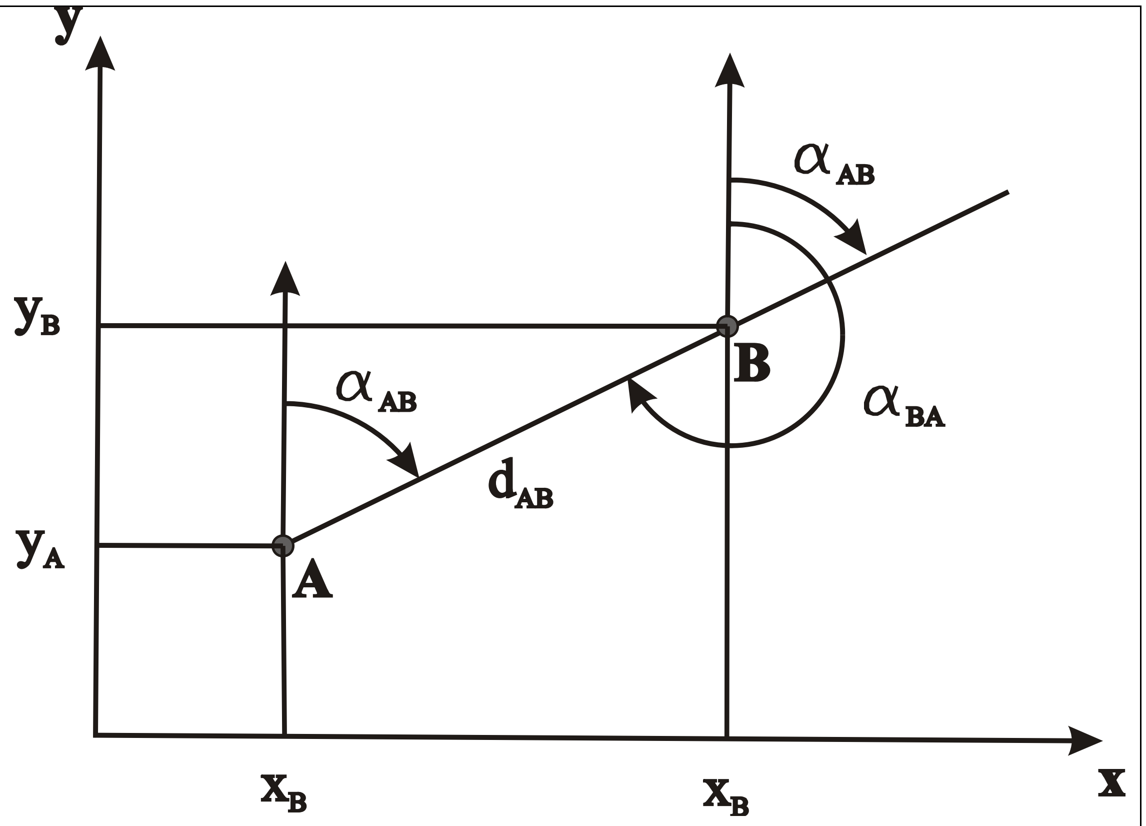
Prima definizione dell'angolo di direzione α_{AB}.

Consideriamo una semiretta r avente origine in A e parallela al semiasse positivo delle ordinate. Si definisce angolo di direzione α_{AB} del segmento $\overrightarrow{AB}$ l'angolo orario che la semiretta r deve descrivere per andarsi a sovrapporre al segmento $\overrightarrow{AB}$. Analogamente si definisce angolo di direzione α_{BA} del segmento $\overrightarrow{BA}$ l'angolo orario che una semiretta r, avente origine in B e parallela all'asse y, deve descrivere per andarsi a sovrapporre al segmento $\overrightarrow{BA}$.	

Coordinate polari di un segmento orientato - 3

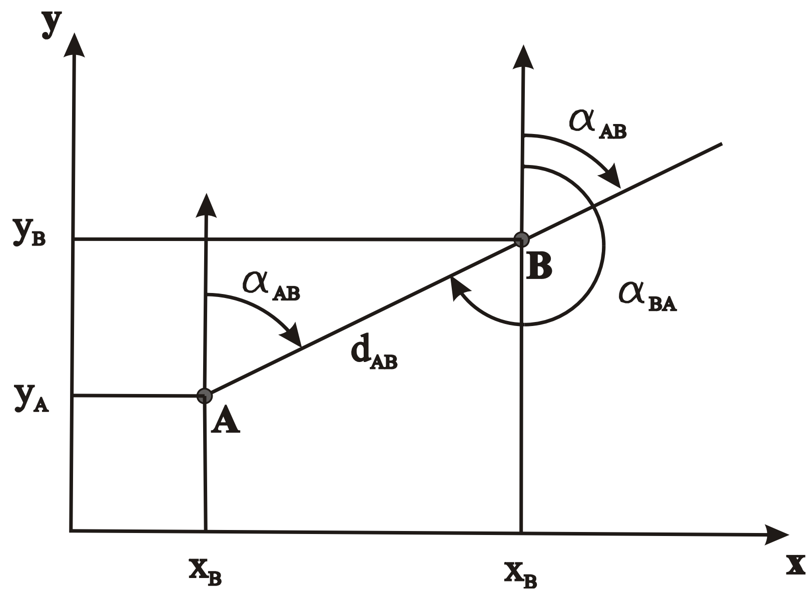
Attenzione!! Gli angoli di direzione α_{AB} e α_{BA} sono diversi e vale la relazione

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + \pi$$



Coordinate polari di un segmento orientato - 4

Seconda definizione dell'angolo di direzione α_{AB}.

L'angolo di direzione può essere definito anche in un'altra interessante maniera, equivalente alla precedente. L'angolo di direzione α_{AB} del segmento $\overrightarrow{AB}$ è l'anomalia del punto B in un sistema di riferimento ausiliario parallelo a quello dato, ma avente origine in A. L'angolo di direzione α_{BA} del segmento $\overrightarrow{BA}$ è l'anomalia del punto A in un sistema di riferimento ausiliario parallelo a quello dato, ma avente origine in B.	

Conversione da polari e cartesiane e viceversa per un segmento

Una direzione

Note le cartesiane di A e le polari del segmento, trovare le cartesiane di B;

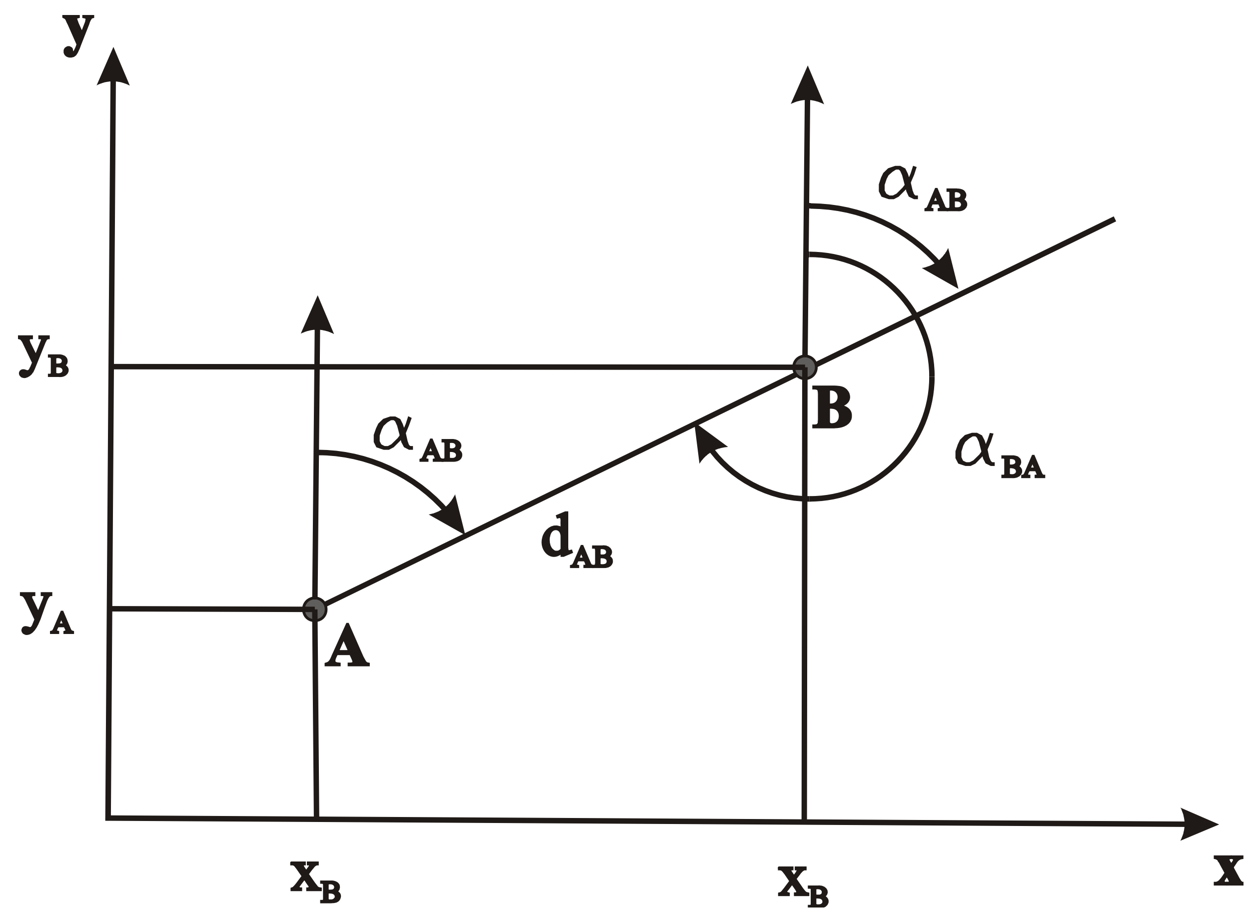
Similmente: note le cartesiane di B e le polari del segmento, trovare le cartesiane di A

La direzione opposta

Note le cartesiane di A e B, trovare le polari del segmento;

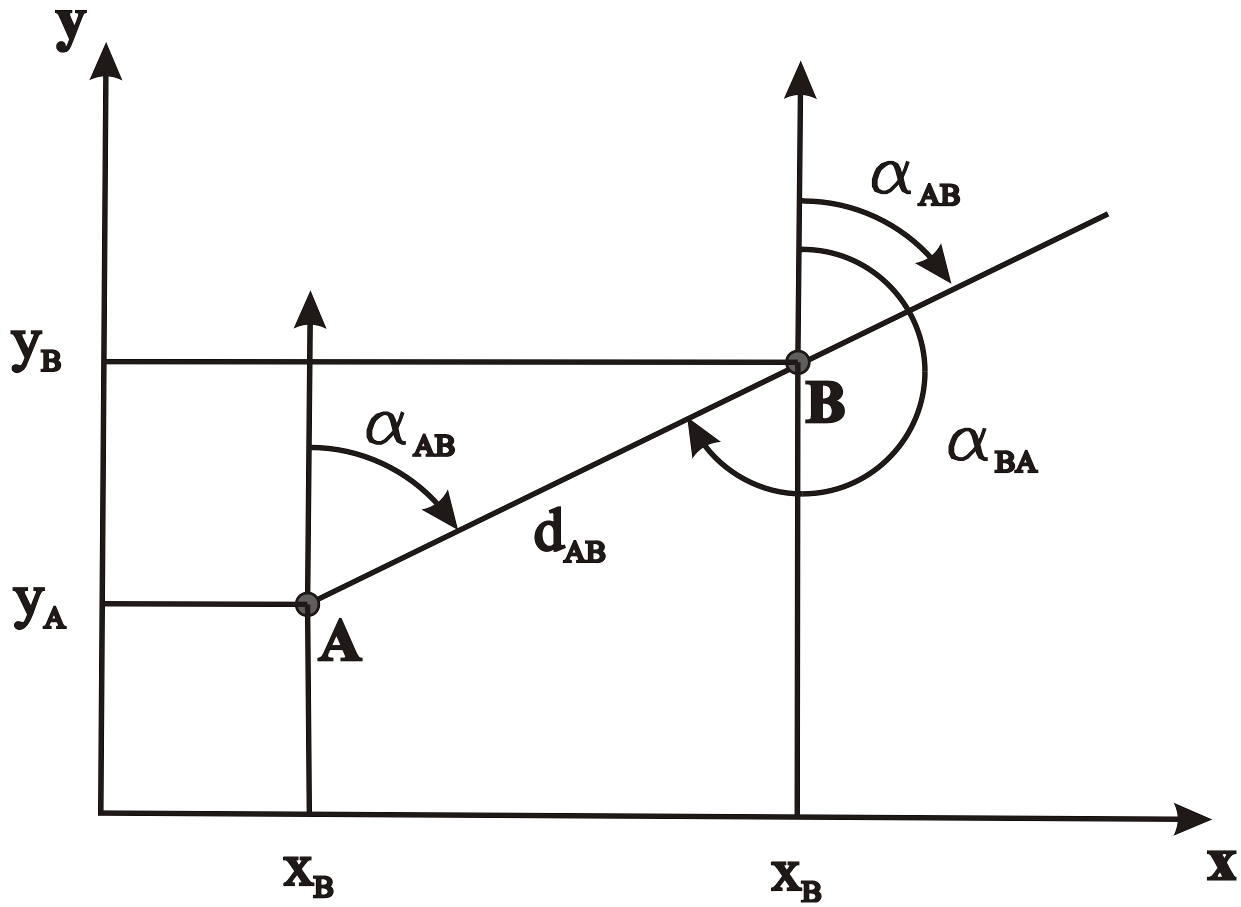
Da polari a cartesiane

$$x_B = x_A + d_{AB} \sin \alpha_{AB}$$
$$y_B = y_A + d_{AB} \cos \alpha_{AB}$$
(2)



Da cartesiane a polari - 1

$$d_{AB} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

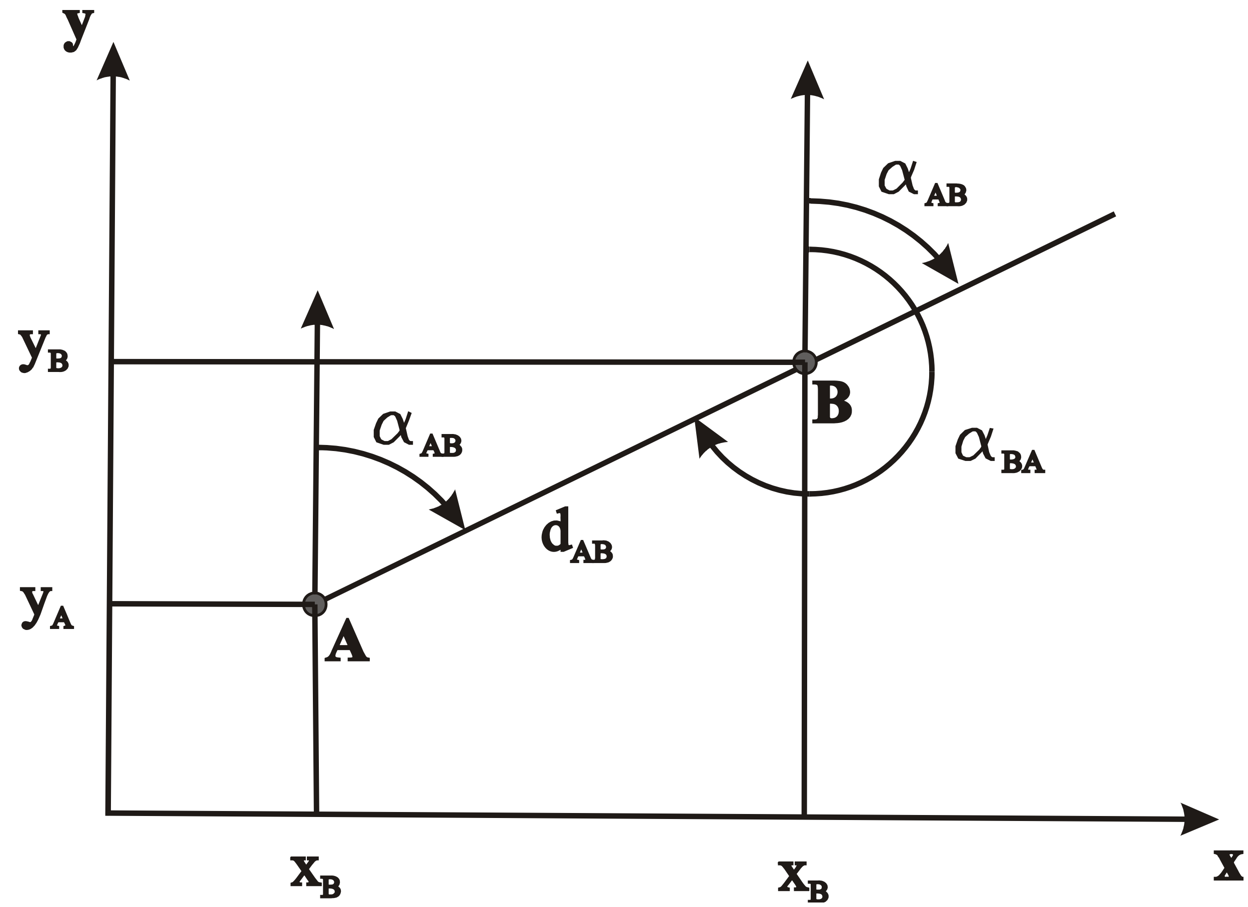


Da cartesiane a polari - 2

Ricordando la seconda definizione di angolo di direzione di un segmento, calcoliamo le coordinate ausiliarie di B rispetto ad A

$$x_B^A = x_B - x_A$$

$$y_B^A = y_B - y_A$$



Da cartesiane a polari - 2

Ponendo

$$\alpha'_{AB} = \arctan \frac{x_B^A}{y_B^A}$$

$$\alpha_{AB} = \alpha(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = \begin{cases} \alpha'_{AB} & x_B^A > 0 \quad y_B^A \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x_B^A > 0 \quad y_B^A = 0 \\ \alpha'_{AB} + \pi & y_B^A < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x_B^A < 0 \quad y_B^A = 0 \\ \alpha'_{AB} + 2\pi & x_B^A < 0 \quad y_B^A > 0 \end{cases}$$

Esercizi

Da polari a cartesiane

X1 [m]	Y1 [m]	d [m]	alfa [GRAD]	X2 [m]	Y2 [m]
55.338	99.631	154.555	221.9100	3.190	-45.861
21.063	46.567	125.586	137.7507	125.208	-23.616
91.775	43.788	187.699	11.3147	124.960	228.530
35.733	24.964	74.562	51.9099	90.014	76.082
27.470	43.860	164.376	335.6749	-111.765	131.227
44.589	23.708	163.077	21.6964	99.097	177.406
56.485	60.434	138.661	24.6005	108.743	188.871
28.134	80.914	85.787	85.3568	111.662	100.473

Esercizi - 2

Da cartesiane a polari

X1 [m]	Y1 [m]	X2 [m]	Y2 [m]	d [m]	alfa [GRAD]
82.414	91.238	-5.824	30.126	107.334	261.4381
47.007	83.917	24.613	-14.730	101.157	214.2111
68.629	78.747	-92.212	113.172	164.484	313.4231
79.300	24.107	103.532	-32.361	61.448	174.1939
28.385	25.831	-36.638	10.603	66.782	285.3547
30.231	27.082	-83.223	-76.325	153.508	252.9473
63.963	83.868	203.970	48.174	144.485	115.8917
58.818	95.441	184.876	139.859	133.655	78.4328

Esempi e complementi

Se si conoscono $\mathbf{x}_B$, d_{AB} e α_{AB}, come si può calcolare $\mathbf{x}_A$?

Si può manipolare la (2) nel modo seguente

$$x_A = x_B - d_{AB} \sin \alpha_{AB}$$
$$y_A = y_B - d_{AB} \cos \alpha_{AB}$$

Oppure si può scrivere la relazione corrispondente alla (2), ma riguardante il punto A

$$x_A = x_B + d_{BA} \sin \alpha_{BA}$$
$$y_A = y_B + d_{BA} \cos \alpha_{BA}$$

e ricordare che

$$d_{BA} = d_{AB} \qquad \text{(ovvia)}$$

e

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 200$$

Normalizzazione degli angoli orizzontali

Per ragioni sostanzialmente estetiche, si ritiene preferibile che gli angoli di direzione α e gli angoli orizzontali in genere soddisfino la condizione di normalizzazione

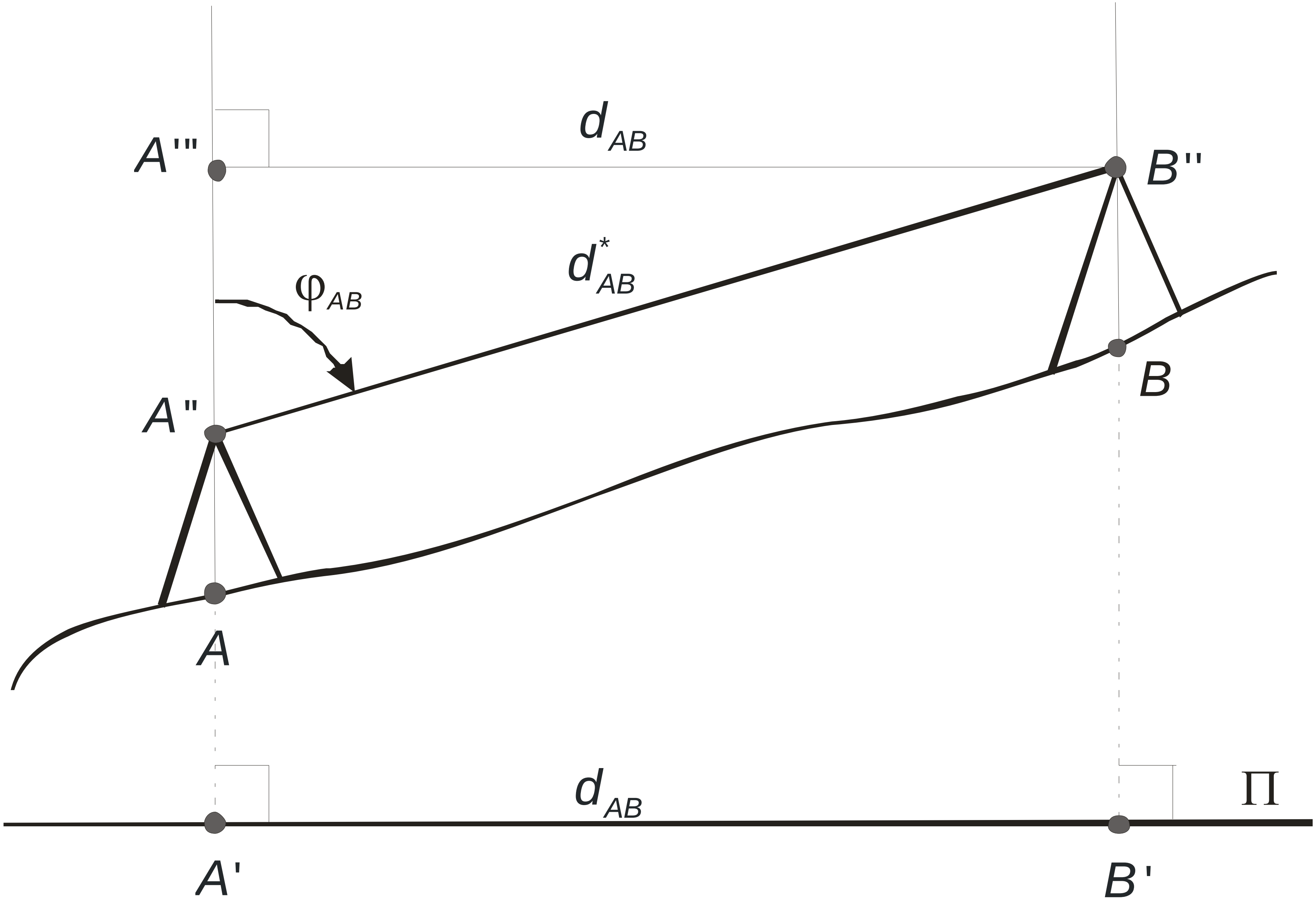
$$0 \le \alpha < 2\pi$$

Non vi è una motivazione sostanziale, in quanto tutti gli angoli

$$\alpha + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

sono equivalenti, tuttavia è bene usare angoli normalizzati. Durante lo svolgimento dei calcoli avviene spesso che, pur partendo da angoli normalizzati, i risultati non lo siano: è necessario pertanto normalizzare gli angoli. L'idea per la normalizzazione è che, se $\alpha > 2\pi$ si deve sottrarre iterativamente 2π fino a quando la condizione di normalizzazione è soddisfatta. Se viceversa α è negativo, si dovrà aggiungere iterativamente 2π fino a renderlo positivo.

Distanza topografica



Distanza topografica - 2

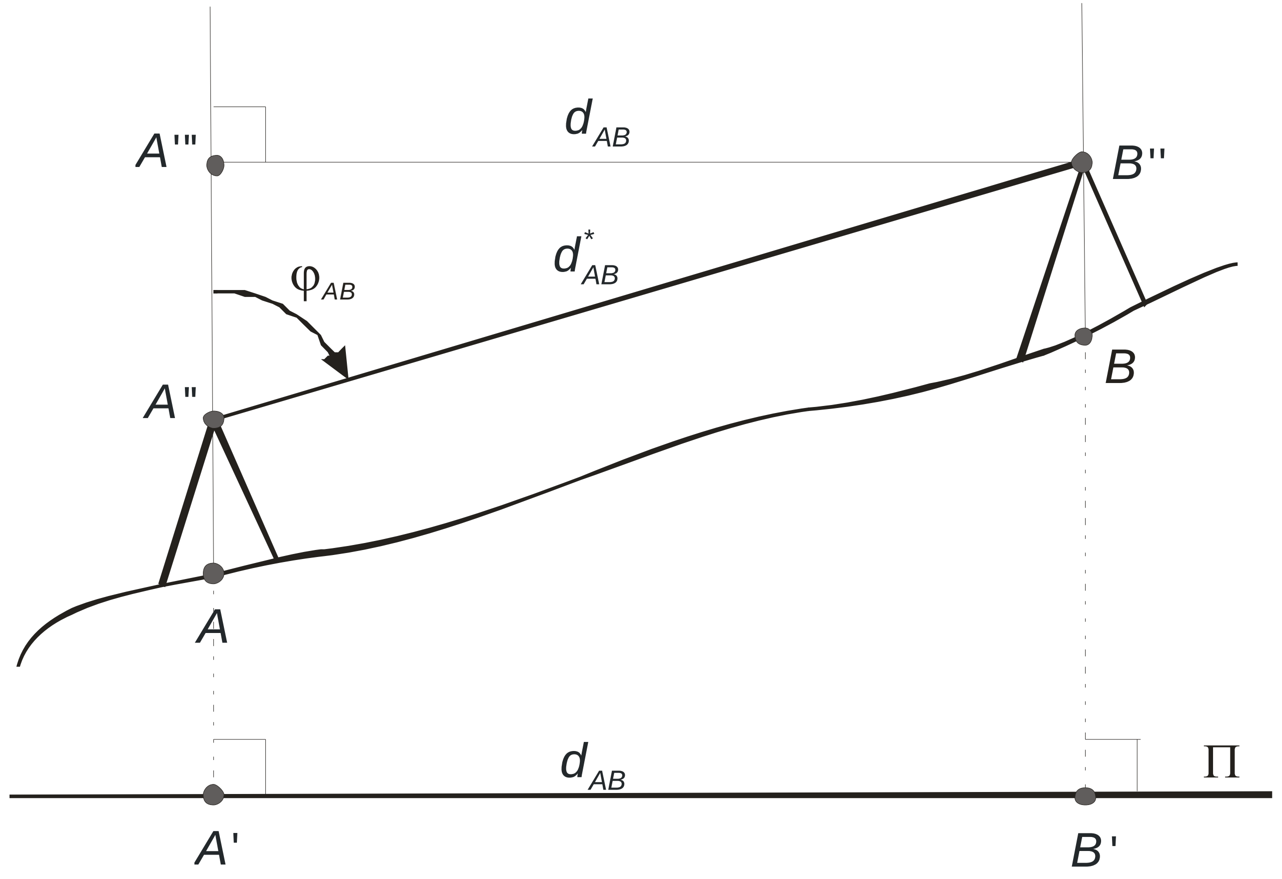
Due punti *A* e *B*.

Su *A* si trova un teodolite con distanziometro.

Su *B* si trova un prisma.

Lo strumento consente di misurare la *distanza inclinata* d^*_{AB} fra i centri dei due strumenti, A'' e B''.

La *distanza topografica* o *distanza orizzontale* d_{AB} è la distanza che separa A' e B', cioè le proiezioni dei punti *A* e *B* sul piano di riferimento.



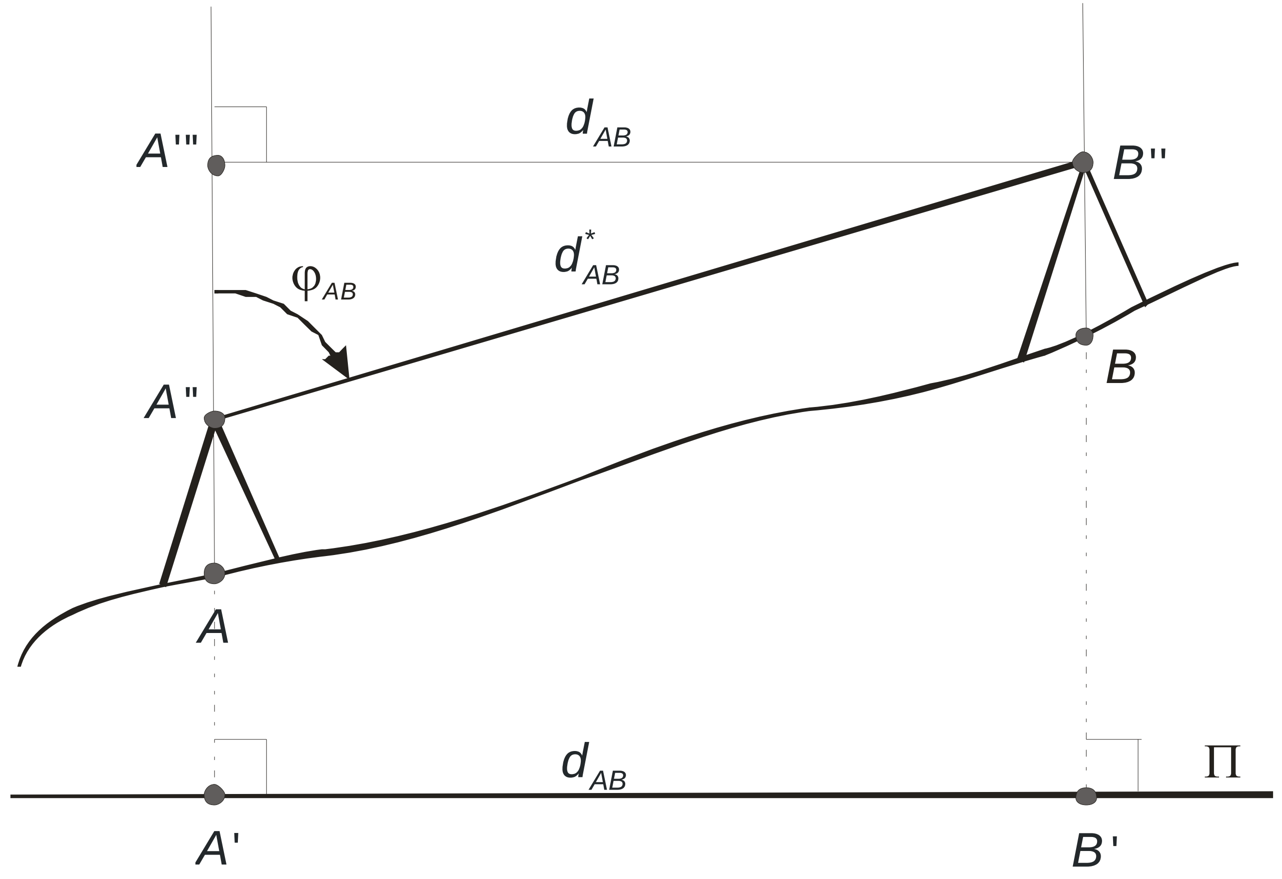
Distanza topografica - 3

Dal disegno

$$d_{AB} = d^*_{AB} \sin\varphi_{AB}$$

Condizione necessaria: A, A' e A'' si devono trovare sulla stessa retta ortogonale al piano di riferimento. Cose analoghe per B e B'.

Importanza della corretta messa in stazione.



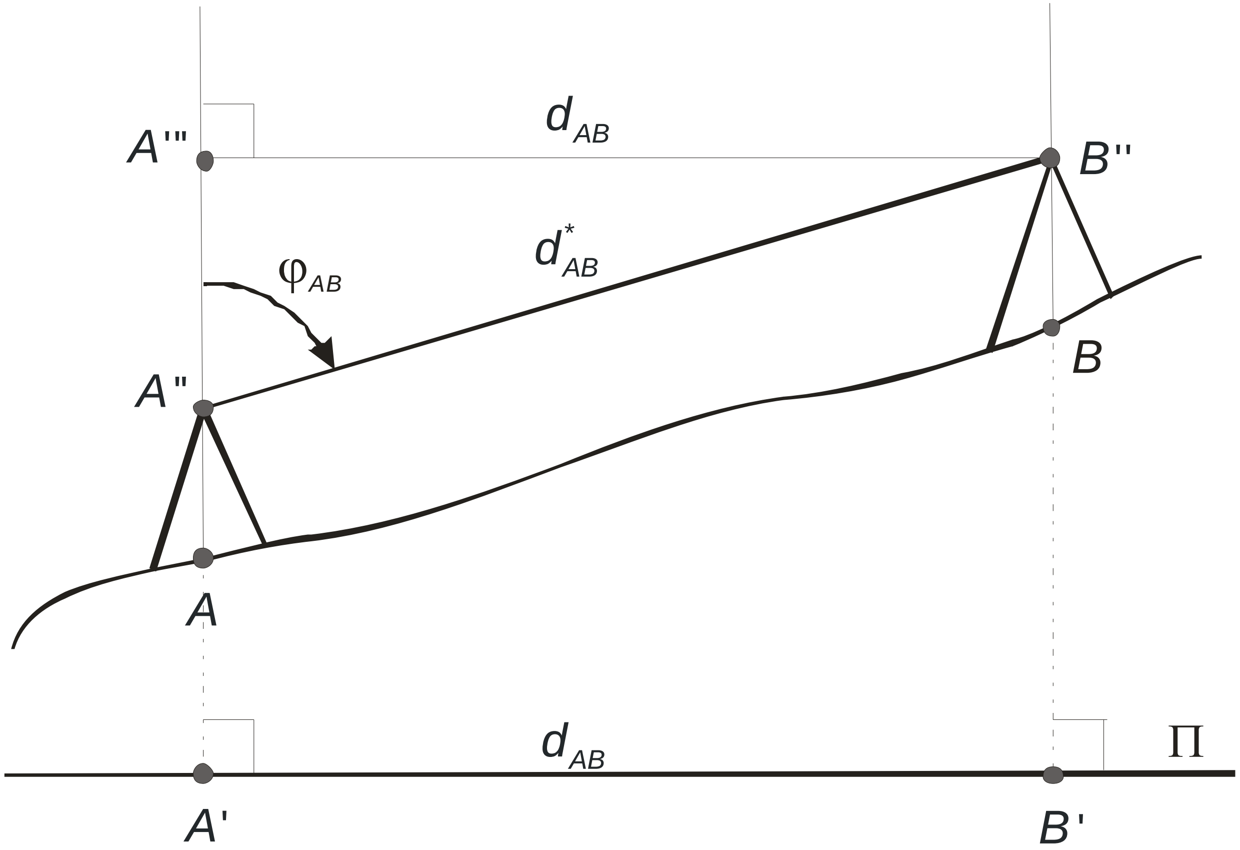
Distanza topografica: la costruzione logica

Esiste il terreno

Si sceglie un piano di riferimento Π (in un certo senso arbitrariamente)

Si proiettano ortogonalmente i punti del terreno sulla superficie di riferimento

Si mettono in stazione teodolite e prisma in modo da avere l'asse primario ortogonale al piano di riferimento; si fa anche in modo che A e A'' appartengano alla stessa retta ortogonale a Π



Altro modo di definire la messa in stazione: rendere l'asse primario dello strumento ortogonale a Π e passante per A

Distanza topografica: la costruzione logica - 2

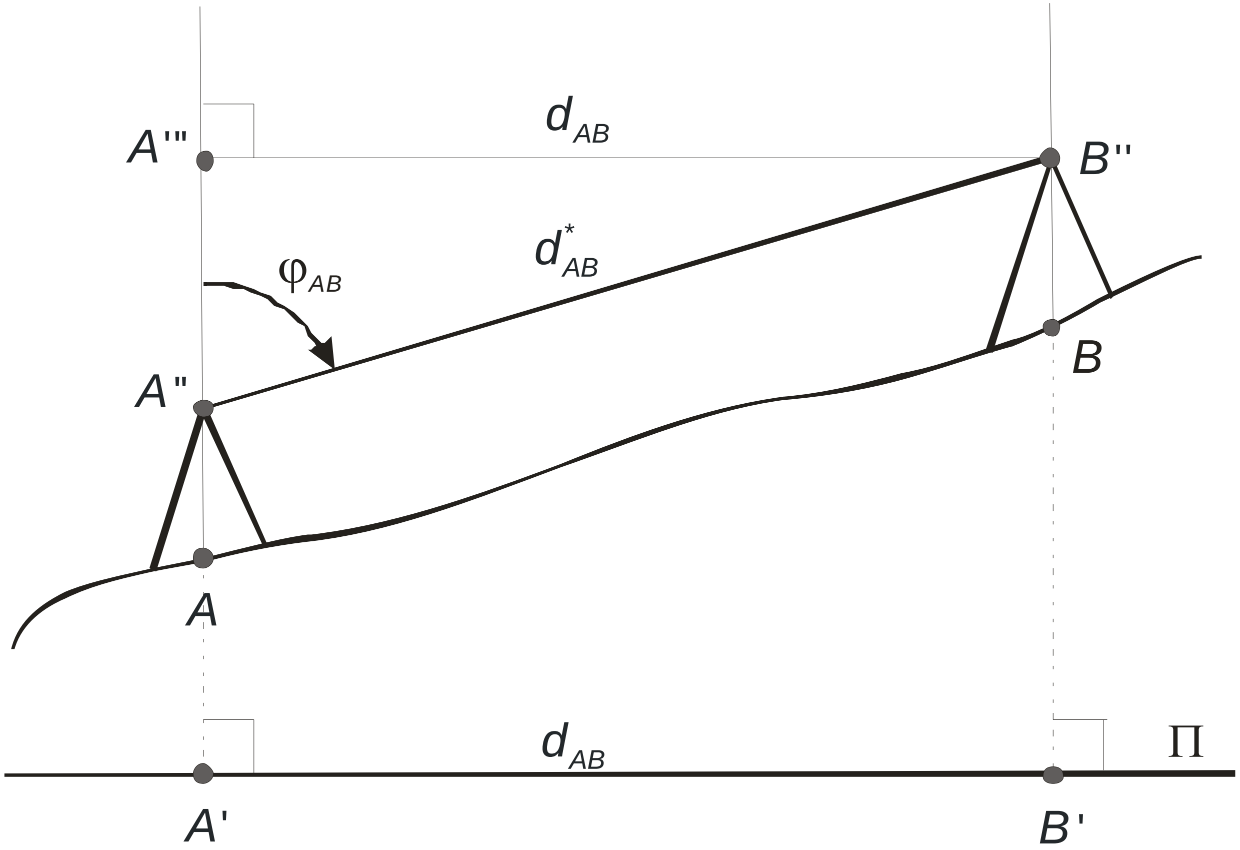
Il punto A''' è scelto in modo da appartenere all'asse primario dello strumento in posizione tale che il segmento

$$\overrightarrow{A'''B''}$$

sia parallelo al segmento

$$\overrightarrow{A'B'}$$

In altre parole. A''' è l'intersezione fra l'asse primario dello strumento e la retta passante per B'' e parallela alla retta passante per $\overrightarrow{A'B'}$



Distanza topografica: la costruzione logica - 3

In pratica, per mettere lo strumento in stazione, è necessario individuare la direzione ortogonale a Π.

In campagna vi è una direzione individuabile facilmente, con dispositivi economici e in ogni luogo: la direzione della forza di gravità, indicata dal filo a piombo.

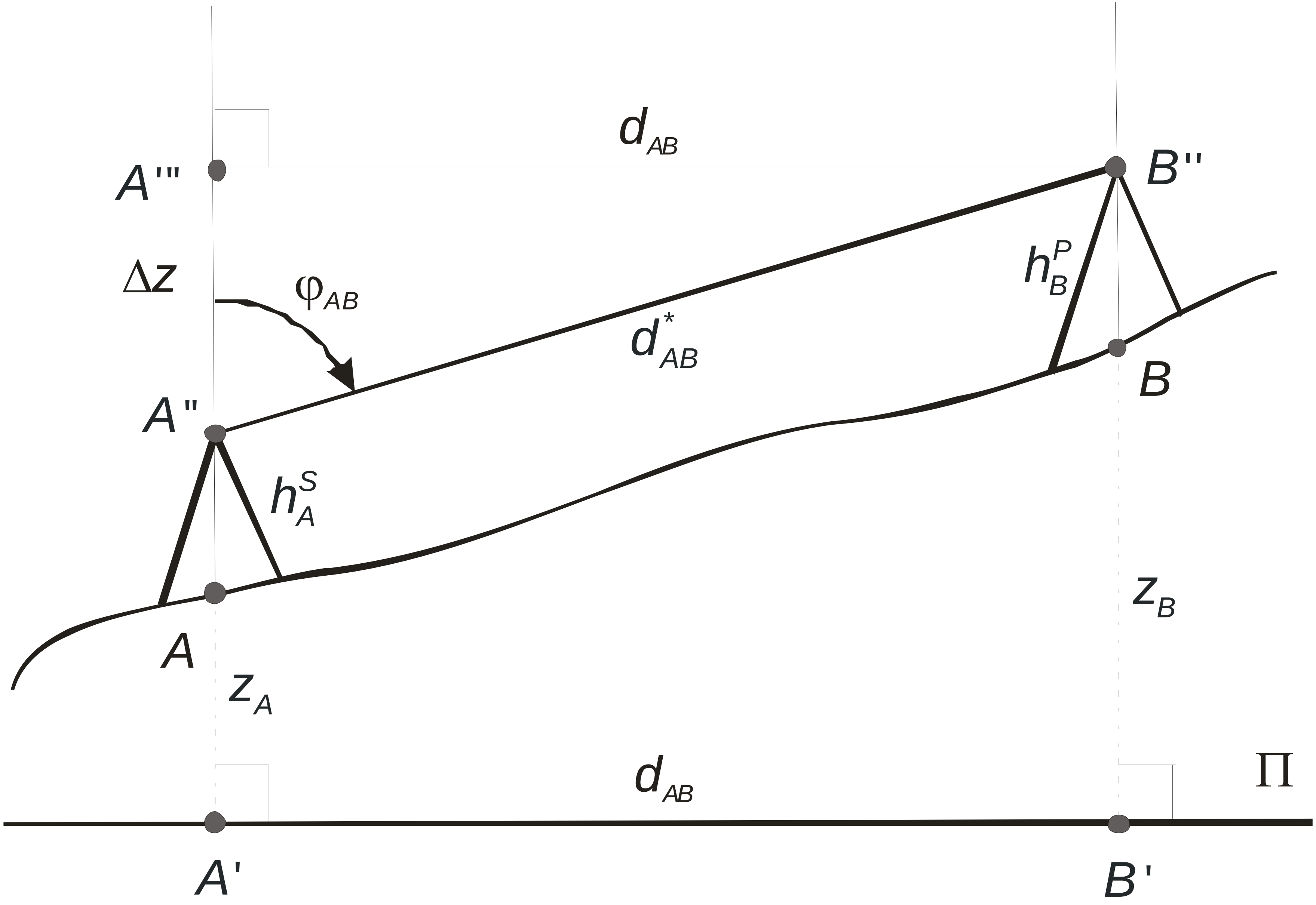
La superficie di riferimento, che concettualmente potrebbe essere qualunque, per motivi pratici viene scelta come quella ortogonale alla forza di gravità.

Esercizi sulla distanza topografica

Calcolare la distanza topografica

fi [grad]	d* [m]	d [m]
77.6025	79.935	75.039
117.9703	98.390	94.496
115.5098	73.615	71.441
66.2612	83.411	71.969
61.8998	68.952	56.968

Livellazione trigonometrica



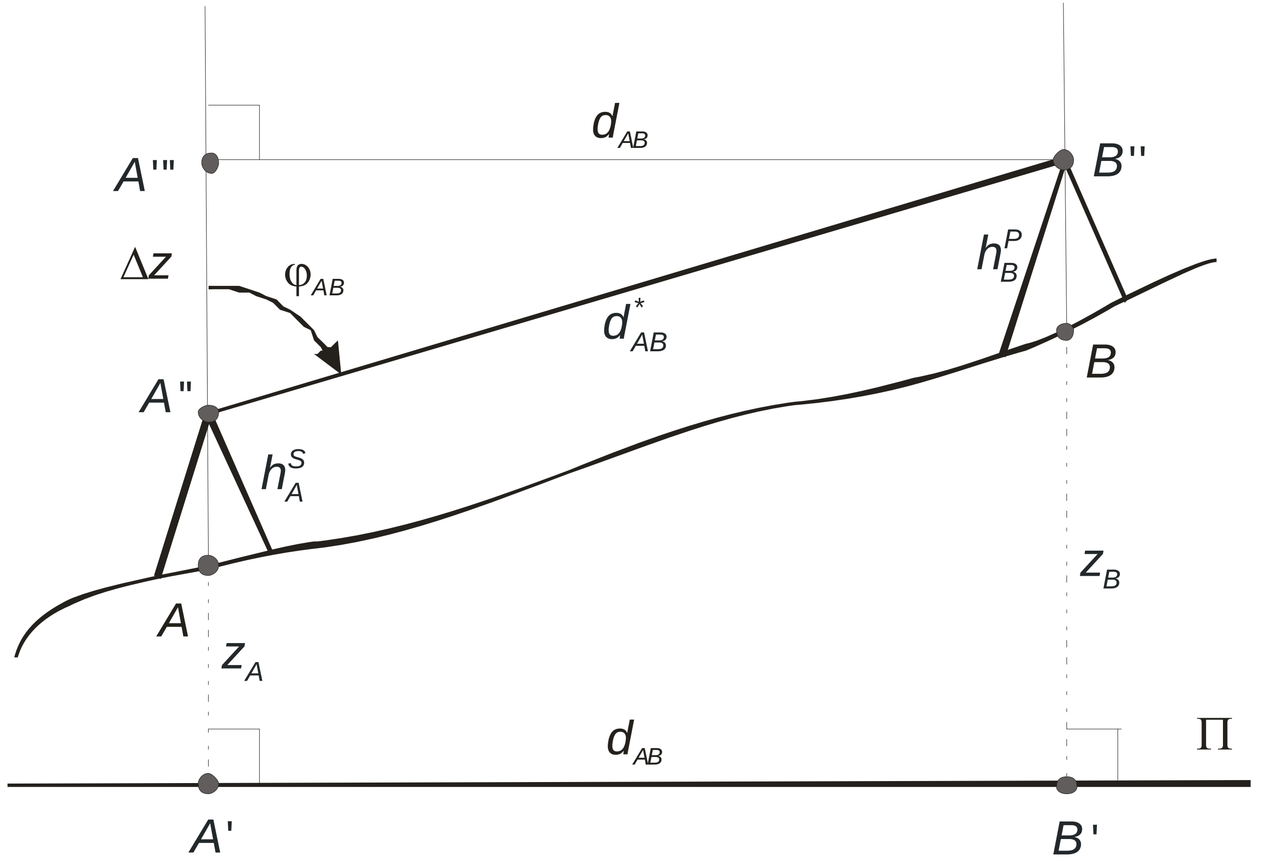
Livellazione trigonometrica - 2

Altezze dei punti rispetto alla superficie di riferimento, z_A e z_B.

Altezze dei centri dei dispositivi (teodolite e prisma) rispetto ai punti.

h_A^S: altezza dello strumento che si trova su A; la distanza $\overline{AA''}$

h_B^P: altezza del prisma che si trova su B; la distanza $\overline{BB''}$



Livellazione trigonometrica - 3

Per costruzione

$$z_{A'''} = z_{B''}$$

Il disegno suggerisce

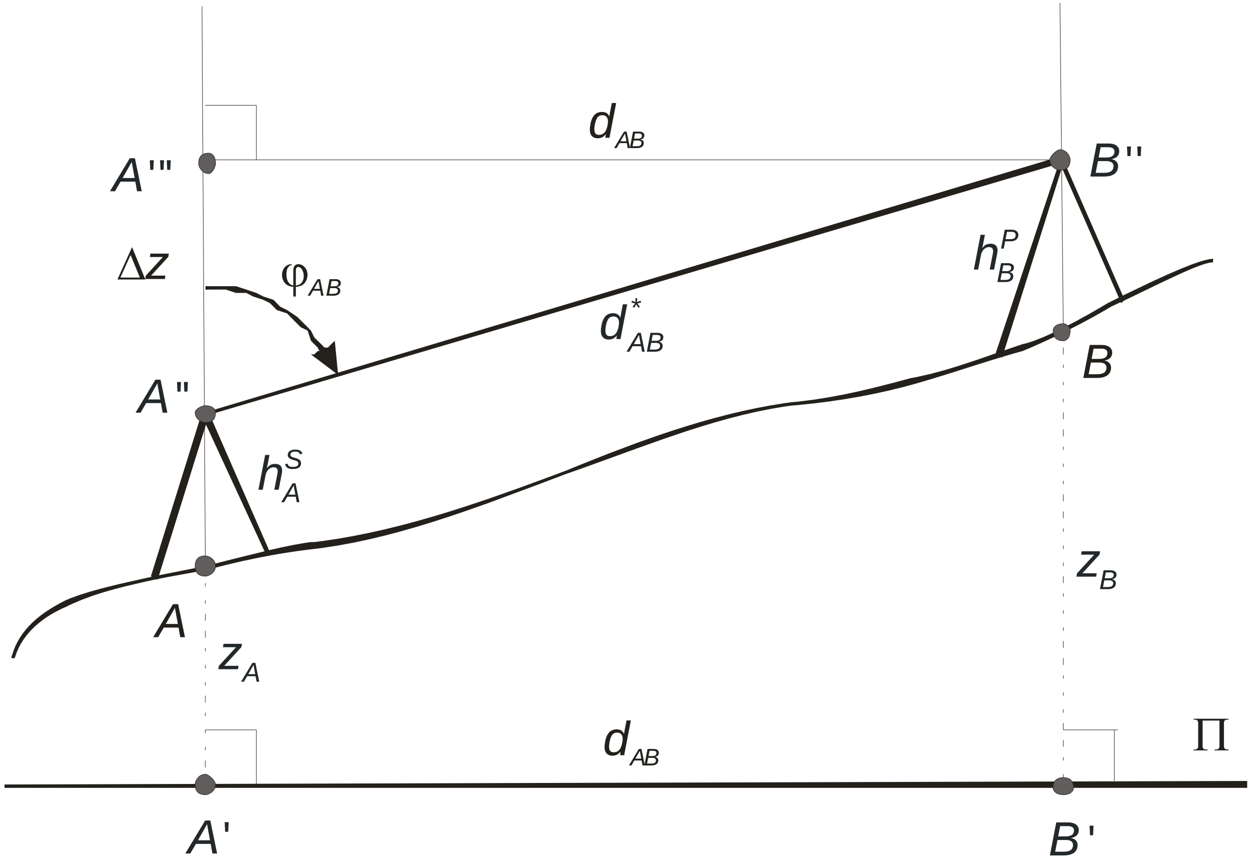
$$z_{A'''} = z_A + h_A^S + \Delta z$$

$$z_{B''} = z_B + h_B^P$$

Infine

$$\Delta z = d_{AB}^{*} \cos\varphi_{AB} =$$

$$= d_{AB}\, \mathrm{ctan}\, \varphi_{AB}$$



$$z_A + h_A^S + d_{AB}^{*} \cos\varphi_{AB} = z_B + h_B^P$$

Livellazione trigonometrica – 4

Dalla

$$z_A + h_A^S + d_{AB}^* \cos\varphi_{AB} = z_B + h_B^P$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta z_{AB} = z_B - z_A &= h_A^S - h_B^P + d_{AB}^* \cos\varphi_{AB} \\ &= h_A^S - h_B^P + d_{AB} \cot\varphi_{AB}\end{aligned}$$

Tale relazione può essere usata ovviamente sia per quotare B, noto A, sia per quotare A, noto B, fermo restando che lo strumento topografico staziona in A. Il modo più razionale di impostare la cosa è calcolare anzitutto il valore di Δz_{AB} e successivamente porre

$$z_B = z_A + \Delta z_{AB}$$

$$z_A = z_B - \Delta z_{AB}$$

Livellazione trigonometrica – 5

Le formule considerate sono dette della livellazione trigonometrica perché consentono di determinare il dislivello fra due punti con misure di angoli e distanze, le tipiche misure trigonometriche.

La misura dell'altezza strumentale gioca un ruolo essenziale e costituisce il punto debole di tale tecnica.

L'algebra dei dislivelli

Dalla definizione

$$\Delta z_{AB} = z_B - z_A$$

Si ricava

$$\Delta z_{BA} = z_A - z_B = -\Delta z_{AB}$$

Esercizi - 1

Calcolare il dislivello mediante livellazione trigonometrica

h_SA [m]	h_PB [m]	fi_AB [grad]	d*_AB [m]	DZ_AB [m]
1.297	1.059	81.1102	99.190	29.240
1.131	1.148	142.3380	77.555	-47.876
1.301	1.159	93.0207	64.445	7.193
1.356	1.212	68.4816	70.323	33.555
1.111	1.254	140.4881	76.349	-45.492

[esercizi_livellazione_trigonometrica1.m]

Esercizi - 2

Livellazione trigonometrica: stazione su A, altezza di A nota, trovare l'altezza di B

h_SA [m]	h_PB [m]	fi_AB [grad]	d*_AB [m]	Z_A [m]	Z_B [m]
1.310	1.369	70.8461	97.917	485.894	529.125
1.287	1.032	106.4980	63.283	478.556	472.363
1.026	1.430	114.0312	64.228	451.338	436.892
1.466	1.467	91.7029	65.682	417.760	426.295
1.364	1.492	70.5976	66.658	439.859	469.434

[esercizi_livellazione_trigonometrica2.m]

Esercizi - 3

Livellazione trigonometrica: stazione su A, altezza di B nota, trovare l'altezza di A

h_SA [m]	h_PB [m]	fi_AB [grad]	d*_AB [m]	Z_B [m]	Z_A [m]
1.280	1.089	63.3931	73.317	498.842	458.777
1.427	1.331	53.0890	78.683	453.998	401.029
1.174	1.165	143.9142	85.928	470.692	525.366
1.223	1.449	80.1306	61.009	499.949	481.441
1.027	1.059	79.5534	93.688	428.785	399.241

[esercizi_livellazione_trigonometrica3.m]