Vittorio Casella

DIET – Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

La poligonale

Dispense

Introduzione

La poligonale è un metodo topografico rapido per la determinazione delle coordinate tridimensionali di punti *stazionabili* disposti lungo una spezzata.

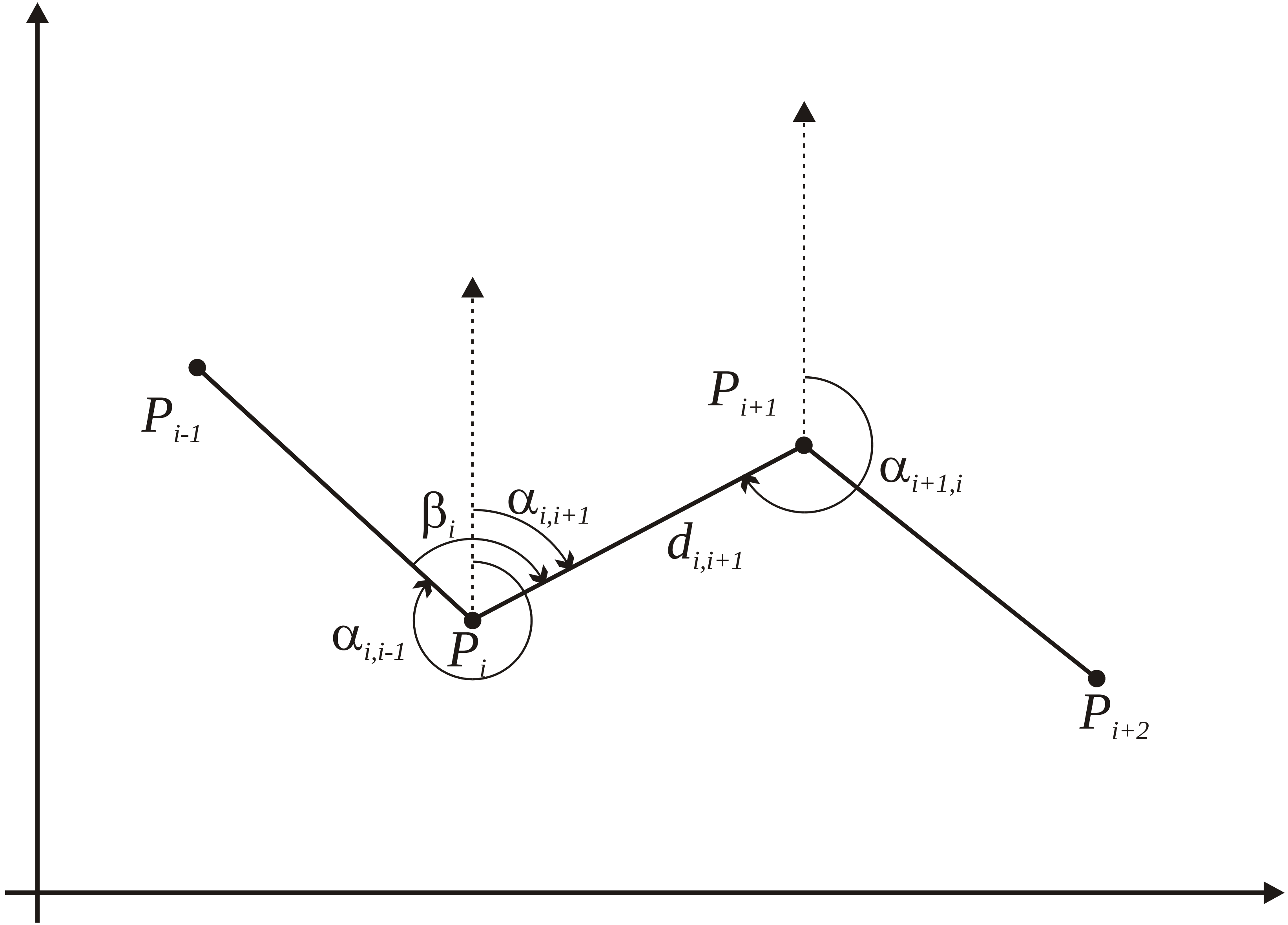
Ci deve essere intervisibilità fra coppie di punti consecutivi.

I punti si definiscono stazionabili se è possibile mettere in stazione sulla loro verticale un cavalletto; i punti della facciata di un edificio, ad esempio, non sono stazionabili.

La misura di una poligonale necessita della misura di angoli e distanze, dunque richiede l'uso di un teodolite dotato di distanziometro, cosa che attualmente costituisce quasi la regola.

La poligonale è un metodo iterativo in quanto richiede la conoscenza delle coordinate di due punti consecutivi iniziali (tale affermazione, vera nella sostanza, verrà meglio specificata in seguito) e consente di determinare da questi le coordinate di un terzo punto; dal secondo e terzo si può ricavare il quarto, eccetera.

Esempio



[Calcolo_poligonale.cdr,wmf]

Simbologia

$d^*_{i,j}$	Distanza inclinata fra i punti P_i e P_j
$d_{i,j}$	Distanza orizzontale fra i punti P_i e P_j
$\alpha_{i,j}$	Angolo di direzione del segmento $\overrightarrow{P_iP_j}$
β_i	Angolo orizzontale, misurato in senso orario, formato dai segmenti $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$
$\lambda_{i,j}$	Lettura al cerchio orizzontale con lo strumento su P_i e osser-vando P_j
$\varphi_{i,j}$	Lettura al cerchio verticale con lo strumento su P_i e osser-vando P_j
h_i^s	Altezza dello strumento in stazione su P_i
h_i^p	Altezza del prisma in stazione su P_j

Terminologia

Punto di stazione

Punto indietro

Punto avanti

Lato indietro

Lato avanti

Angolo di direzione indietro

Angolo di direzione avanti

Le quantità misurate

Supponiamo ora di conoscere le coordinate dei punti P_{i-1} e P_i. Da esse si può ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i-1}$. Abbiamo inoltre ipotizzato che sia possibile mettere in stazione un teodolite sul punto P_i e osservare prima P_{i-1} (punto indietro) e poi P_{i+1} (punto avanti). Il risultato di queste collimazioni è la misura delle seguenti grandezze

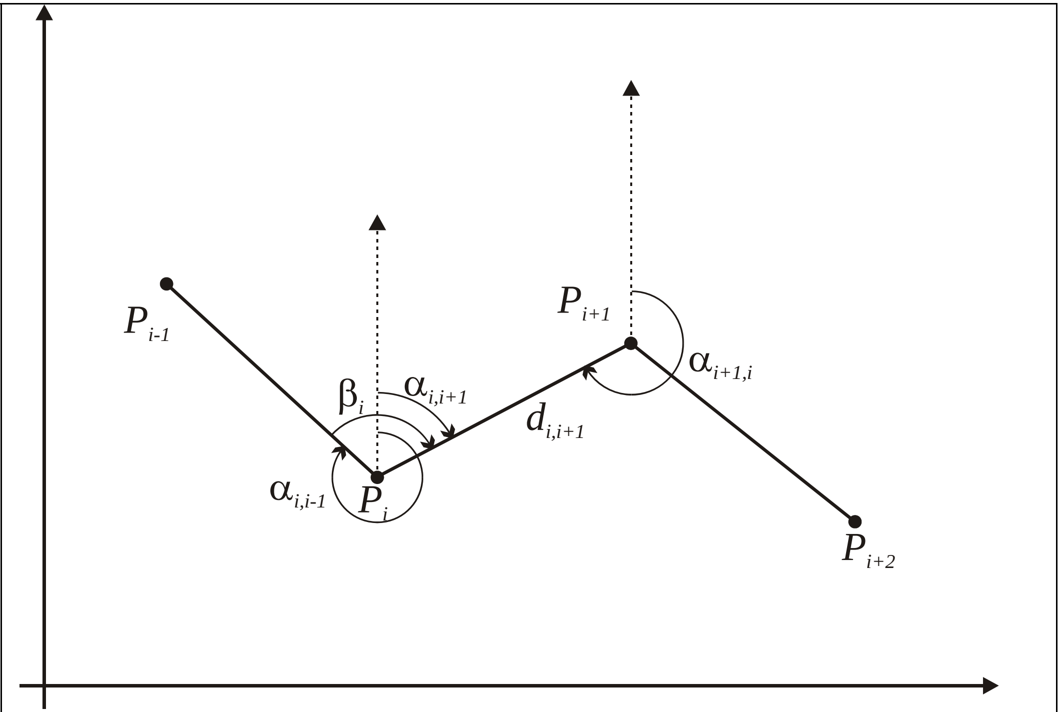
guardando il punto indietro: $d^*_{i,i-1}$, $\lambda_{i,i-1}$ e $\varphi_{i,i-1}$

guardando il punto avanti: $d^*_{i,i+1}$, $\lambda_{i,i+1}$ e $\varphi_{i,i+1}$

Devono essere misurate inoltre le altezze strumentali h_i^s, h_{i-1}^p e h_{i+1}^p.

Convenzioni – Il verso di percorrenza

La poligonale ha un verso di percorrenza, deciso dal rilevatore (il quale tiene conto di tale scelta quando individua i punti indietro e i punti avanti delle varie stazioni), e che i nomi *logici* assegnati ai punti in queste note tengono conto di tale verso: il punto P_2 precede P_3, eccetera. Nel casi pratici è possibile che i punti costituenti la poligonale abbiano una denominazione assegnata in precedenza con altri criteri, che potrebbe essere anche in contrasto con quella logica.

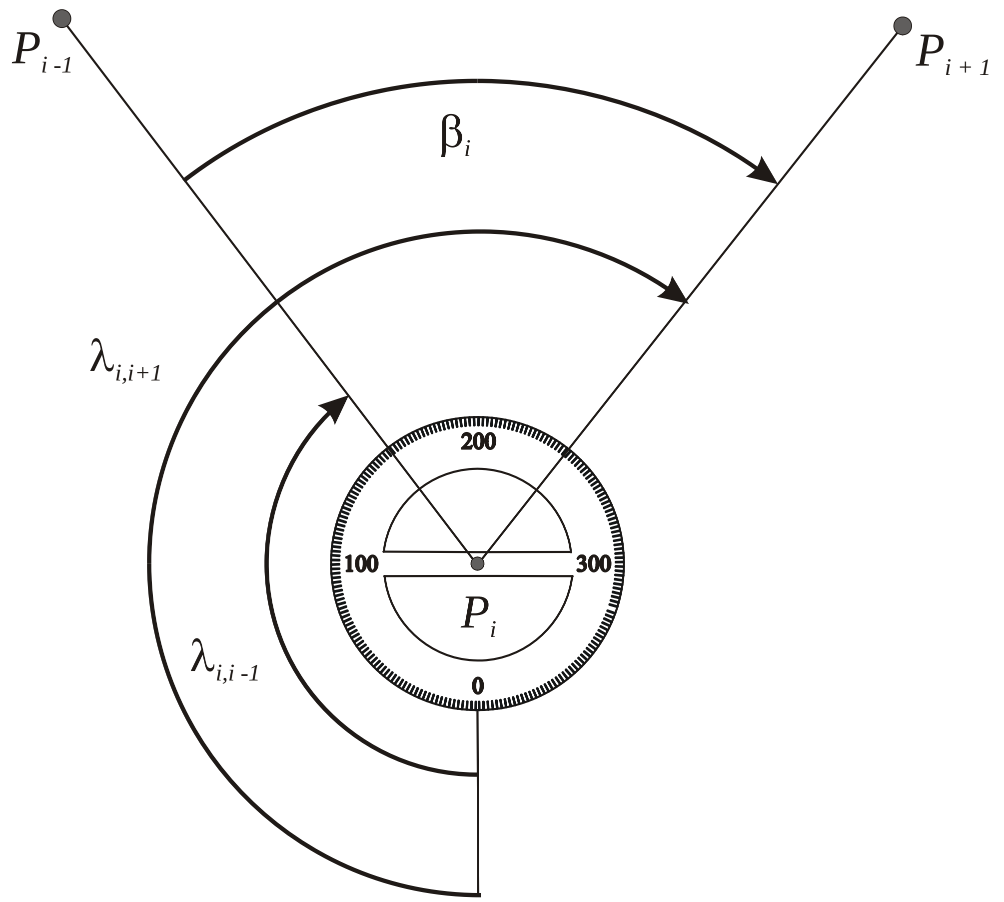


Per il calcolo della poligonale non si dovrà tenere conto della denominazione preesistente, ma si dovranno assegnare ai punti, almeno mentalmente, i nomi logici

Convenzioni – Angoli misurati in senso orario

Un'altra convenzione da fissare riguarda l'angolo interno β_i, formato dai segmenti $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$, in quanto vi sono due possibili candidati. La scelta adottata per convenzione è quella oraria, dunque β_i è l'angolo che il segmento *indietro* $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ descriverebbe se ruotasse in senso orario fino a sovrapporsi al segmento *avanti*, $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ ..

La convenzione oraria è adottata dalla stragrande maggioranza degli strumenti topografici attuali, che dispongono di goniometri orari.

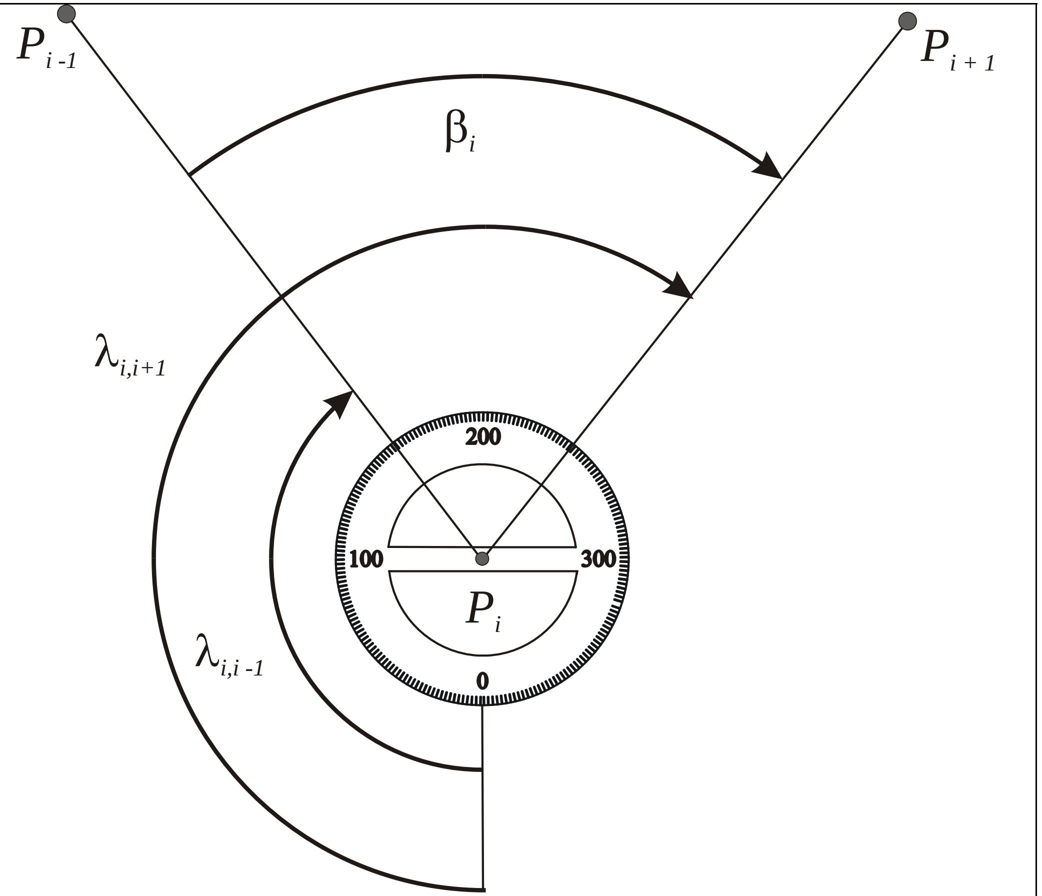


[poligonale_calcolo_angolo_interno.cdr,wmf]

Calcolo dell'angolo interno

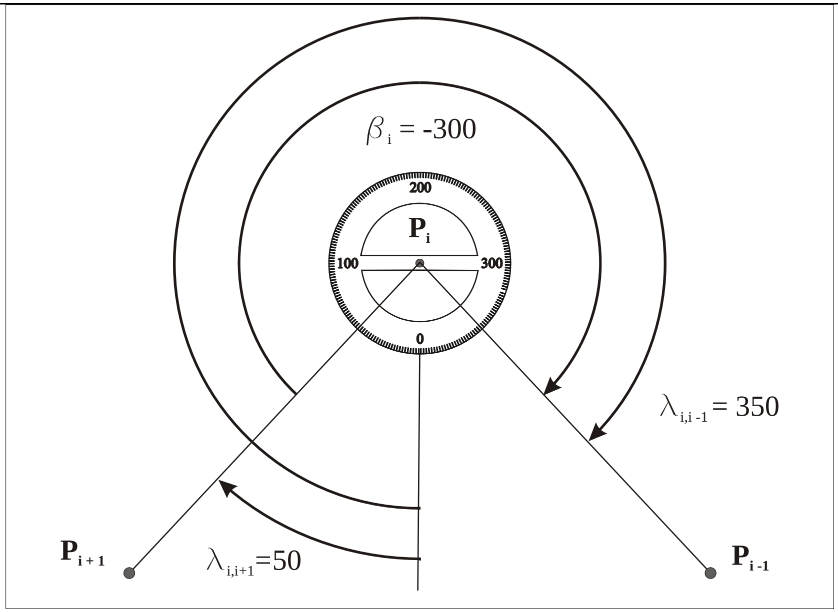
Nel quadro delle convenzioni fissate, per l'angolo interno e per il goniometro degli strumenti, l'angolo interno α_i può essere ottenuto da

$$\beta_i = \lambda_{i,i+1} - \lambda_{i,i-1} \qquad (1)$$



[poligonale_calcolo_angolo_interno.cdr,wmf]

Casi possibili

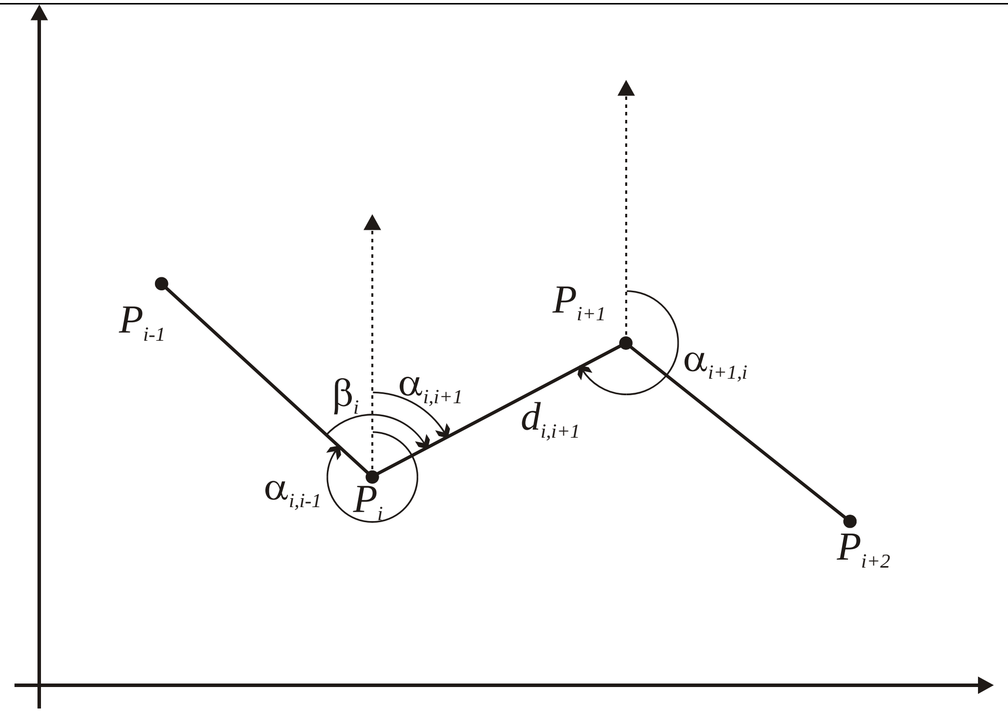
La particolare posizione dell'origine del goniometro può portare ad un angolo negativo, che deve essere normalizzato	 [poligona-le_calcolo_angolo_interno_2.cdr,wmf]

Angolo di direzione del segmento avanti

Noto β_i, si può ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i+1}$,

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i,i-1} + \beta_i \qquad (2)$$

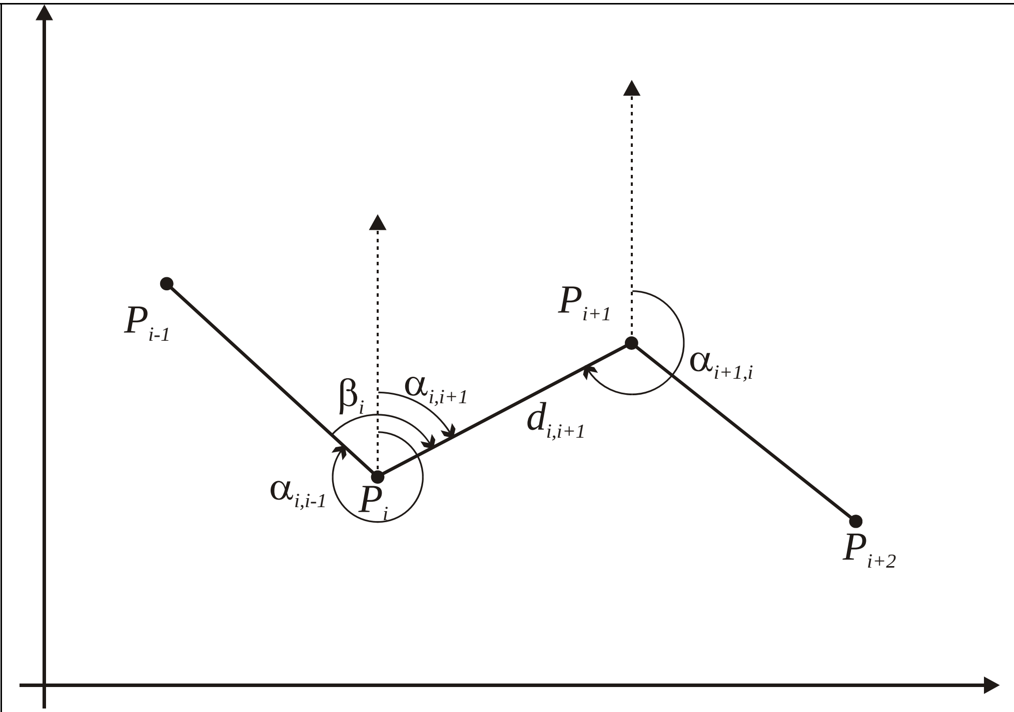
Anche $\alpha_{i,i+1}$ potrebbe richiedere la normalizzazione.



Distanza topografica rispetto al punto avanti

Si ha

$$d_{i,i+1} = d^*_{i,i+1} \sin\varphi_{i,i+1} \qquad (3)$$



Determinazione delle coordinate cartesiane del punto avanti

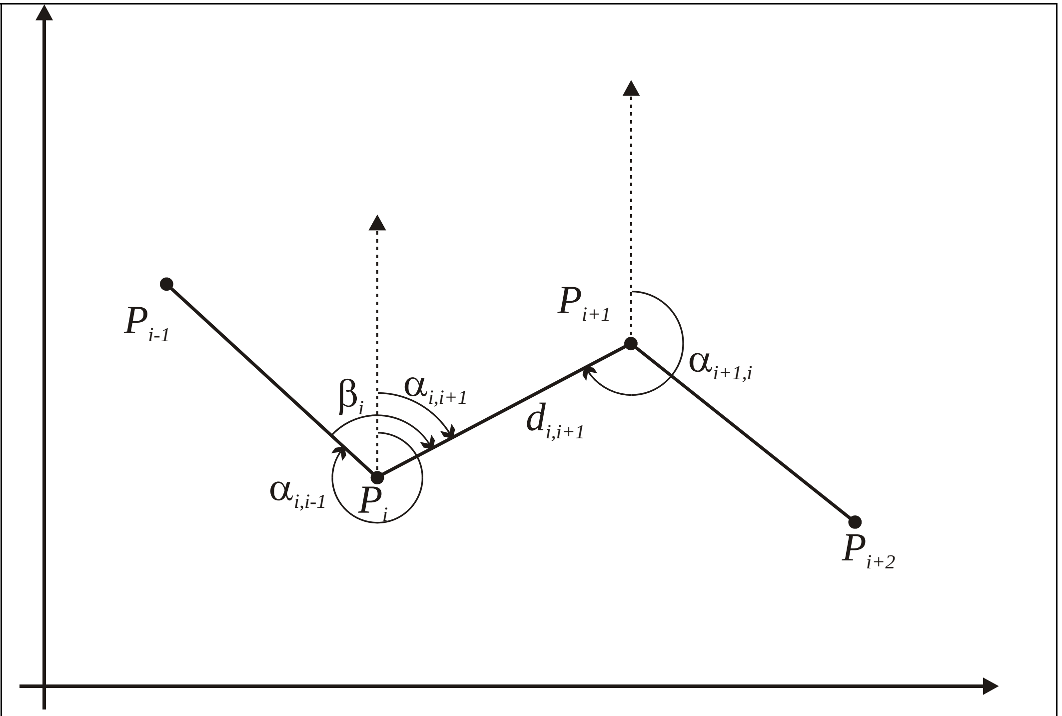
A questo punto si conoscono le coordinate polari di P_{i+1} rispetto a P_i dunque si può concludere

$$x_{i+1} = x_i + d_{i,i+1} \sin\alpha_{i,i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + d_{i,i+1} \cos\alpha_{i,i+1}$$

$$z_{i+1} = z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)$$

(4)



Le formule presentate fanno riferimento al generico punto *i*-esimo per sottolineare come esse possano essere adottate ripetutamente e identicamente per calcolare progressivamente i punti P_3, P_4, P_5, eccetera.

Poligonale 2D e 3D

Le formule

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + d_{i,i+1} \sin\alpha_{i,i+1} \\
y_{i+1} &= y_i + d_{i,i+1} \cos\alpha_{i,i+1} \\
z_{i+1} &= z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Risolvono il problema della poligonale per il punto P_{i+1}. Le formule complete devono essere impiegate per il calcolo della poligonale nello spazio, mentre sono sufficienti le prime due relazioni delle (5) per il calcolo della poligonale nel piano.

Poligonale 2D e 3D – 2

$$x_{i+1} = x_i + d_{i,i+1} \sin \alpha_{i,i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + d_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1}$$

$$z_{i+1} = z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)$$

Si potrebbe pensare erroneamente che altezze strumentali e angoli verticali entrino nel calcolo solo nel caso di poligonali 3D, ma questo non è vero in quanto, anche per la soluzione 2D, è necessario misurare l'angolo verticale per ricavare la distanza topografica da quella inclinata. Tuttavia nel caso bidimensionale le altezze strumentali, che costituiscono la maggior fonte di errori, sono ininfluenti: è sufficiente che strumento e prisma siano posti correttamente sulla verticale dei punti misurati.

Calcolo dei punti successivi

Con la stessa metodologia mostrata.

Ma esiste la possibilità, una volta inizializzato l'algoritmo, di evitare il calcolo dell'angolo di direzione del segmento indietro; supponiamo che, per il calcolo delle coordinate di P_3, sia stato ricavato l'angolo di direzione $\alpha_{2,1}$ dalle coordinate dei punti P_1 e P_2. Passando ora al calcolo di P_4, si potrebbe certamente ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{3,2}$ dalle coordinate, ora note, di P_2 e P_3; tuttavia l'angolo di direzione cercato $\alpha_{3,2}$ è più facilmente ricavabile dall'angolo di direzione $\alpha_{2,3}$, calcolato per la determinazione di P_3, nel modo usuale

$$\alpha_{3,2} = \alpha_{2,3} + \pi$$

Problemi di qualità e controllo

Il controllo di qualità ha due scopi essenziali:

- stimare l'entità degli errori accidentali;
- individuare ed eliminare gli errori grossolani.

La metodologia rigorosa per affrontare entrambi i problemi è la compensazione, mentre la metodologia di calcolo esposta in queste note è piuttosto debole sotto questo aspetto. Si consideri ad esempio che se, collimando un punto, si commette un errore di 100° nella lettura al cerchio orizzontale, tutti i punti della poligonale collimati successivamente risentiranno di tale errore.

Poligonale chiusa

Il miglior strumento di controllo empirico è la *chiusura della poligonale.* Supponendo che i vertici siano n, si deve fare in modo che l'ultimo punto sia prossimo al primo, e che i due siano intervisibili. In questo modo è possibile trattare il punto P_1 come un punto supplementare, denominato, P_{n+1}, che deve essere rilevato facendo stazione su P_n. Le coordinate $\mathbf{x}_{n+1}$ e $\mathbf{x}_1$ dovrebbero coincidere, nominalmente, ma in pratica ciò non si verifica. Piccoli scostamenti sono accettabili, in quanto dovuti agli errori accidentali di misura; tali differenze consentono di stimare, anche se in modo non rigoroso, la precisione delle coordinate calcolate. Scostamenti significativi indicano invece la presenza di errori grossolani che devono essere individuati e eliminati.

Poligonale vincolata

Purtroppo non è sempre possibile, o agevole, chiudere una poligonale, a causa della conformazione del territorio su cui si opera. Una seconda possibilità di controllo è legata alla conoscenza a priori delle coordinate dei punti estremi di una poligonale aperta. Capita talvolta che misure precedenti abbiano determinato, con metodologia topografica classica o GPS, i vertici estremi di una poligonale ancora da rilevare. In tal caso il controllo può essere effettuato verificando che le coordinate dell'ultimo vertice, determinate dalla poligonale, non differiscano significativamente dalle coordinate note a priori.

Dati di esempio

Nome punto	x	y	z
P1	208.10	201.66	99.16
P2	282.43	282.56	100.28

Il libretto di campagna relativo alle stazioni effettuate è:

Punto stazione	Punto osservato	h_s	h_p	λ	φ	d^*
P2	P1	1.520	1.390	281.5936	100.7243	109.870
P2	P3	1.520	1.270	379.8971	99.7388	104.796
P3	P2	1.550	1.370	169.4301	100.5224	104.798
P3	P4	1.550	1.570	273.1307	100.6600	99.360
P4	P3	1.380	1.320	166.1447	99.3657	99.359
P4	P1	1.380	1.470	268.7148	100.3885	108.166

Il libretto riporta, nell'ordine: nome punto stazionato, nome punto collimato altezza strumentale, altezza prisma, lettura cerchio orizzontale, lettura cerchio verticale, distanza inclinata. Gli angoli sono misurati in gradi centesimali. Coordinate e distanze in metri.
Calcolare le coordinate 3D dei punti incogniti.

Nome punto	x	y	z
P3	203.40	351.38	100.96
P4	133.91	280.37	99.91

Soluzione

Determiniamo l'angolo di direzione *indietro* α_{21}

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 208.10 - 282.43 = -74.33$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 201.66 - 282.56 = -80.90$$

$$\alpha'_{21} = \arctan\frac{\Delta x}{\Delta y} = 47.3072$$

$$\alpha_{21} = \alpha'_{21} + 200 = 247.3072$$

Determiniamo l'angolo interno β_2

$$\beta_2 = \lambda_{23} - \lambda_{21} = 379.8971 - 281.5936 = 98.3035$$

Determiniamo l'angolo di direzione *avanti* α_{23}

$$\alpha_{23} = \alpha_{21} + \beta_2 = 345.6107$$

Soluzione - 2

Determiniamo la lunghezza topografica del segmento avanti

$$d_{23} = d_{23}^{*} * \sin\varphi_{23} = 104.796 * \sin(99.7388) = 104.795$$

Concludiamo trovando le coordinate di P_3

$$x_3 = x_2 + d_{23}\sin(\alpha_{23}) = 282.43 + 104.795\sin(345.6107) =$$
$$= 203.40$$

$$y_3 = y_2 + d_{23}\cos(\alpha_{23}) = 282.56 + 104.795\cos(345.6107) =$$
$$= 351.38$$

$$z_3 = z_2 + h_2^S - h_3^p + d_{23}\cot(\varphi_{23}) = 100.28 + 1.52 - 1.27 +$$
$$+ 104.795\cot(99.7388) =$$
$$= 100.96$$