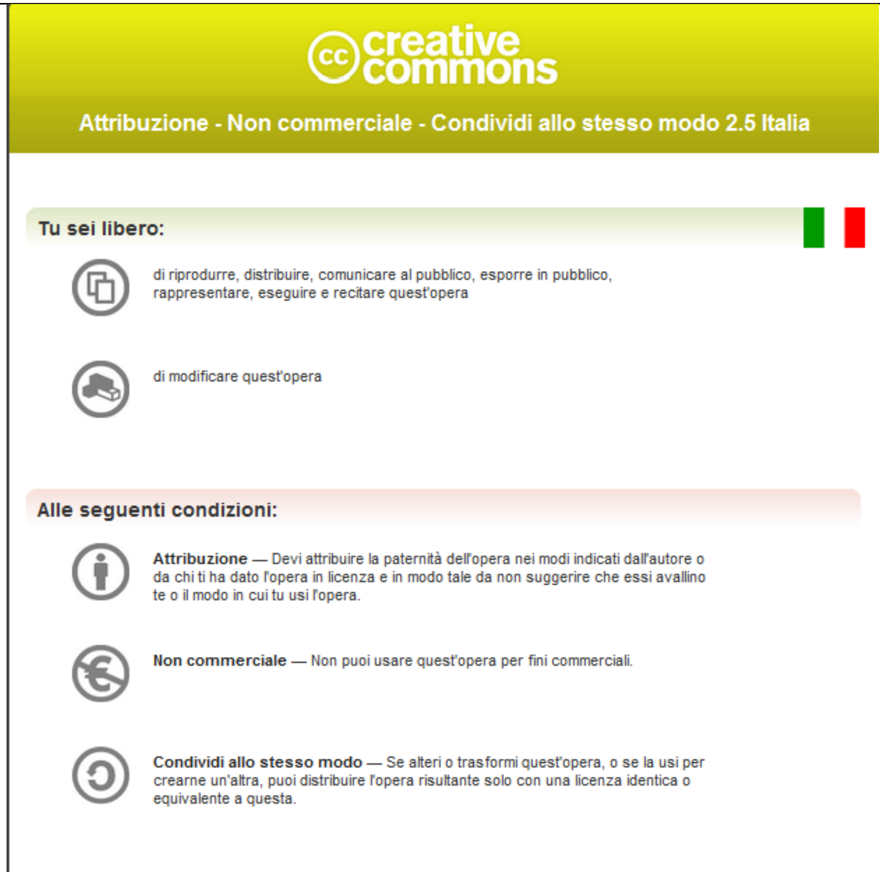
Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Unità di misura angolari e loro conversioni

Licenza

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.	

Pagine da tenere in considerazione

TOC AA 2011-2012

Illustrate a lezione: 4, 14-20, 26-43 con esclusione di quelle aventi il titolo evidenziato in giallo

Da conoscere comunque: 5-13, 21-27

Introduzione

Esistono quattro unità di misura principali degli angoli:

- radianti
- sessadecimali
- centesimali
- sessagesimali

Le prime tre sono unità di misura decimali, al contrario della quarta.

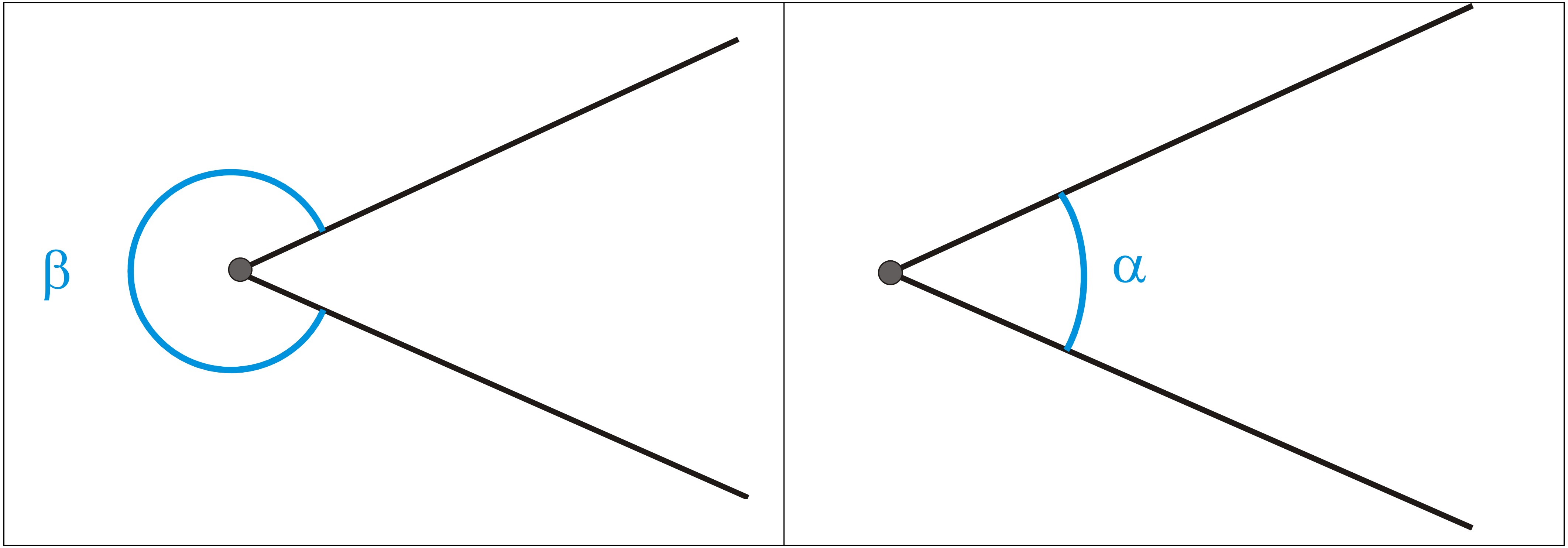
Verranno esposti:

- principali proprietà
- metodi di conversione

Definizione statica di angolo

Vedi all'indirizzo http://it.wikipedia.org/wiki/Angolo

Un angolo è ciascuna delle due parti di un piano delimitata da due semirette, dette lati, aventi in comune le loro origini, che formano il vertice dell'angolo. Si dice *concavo* se contiene i prolungamenti dei lati, *convesso* se non li contiene.

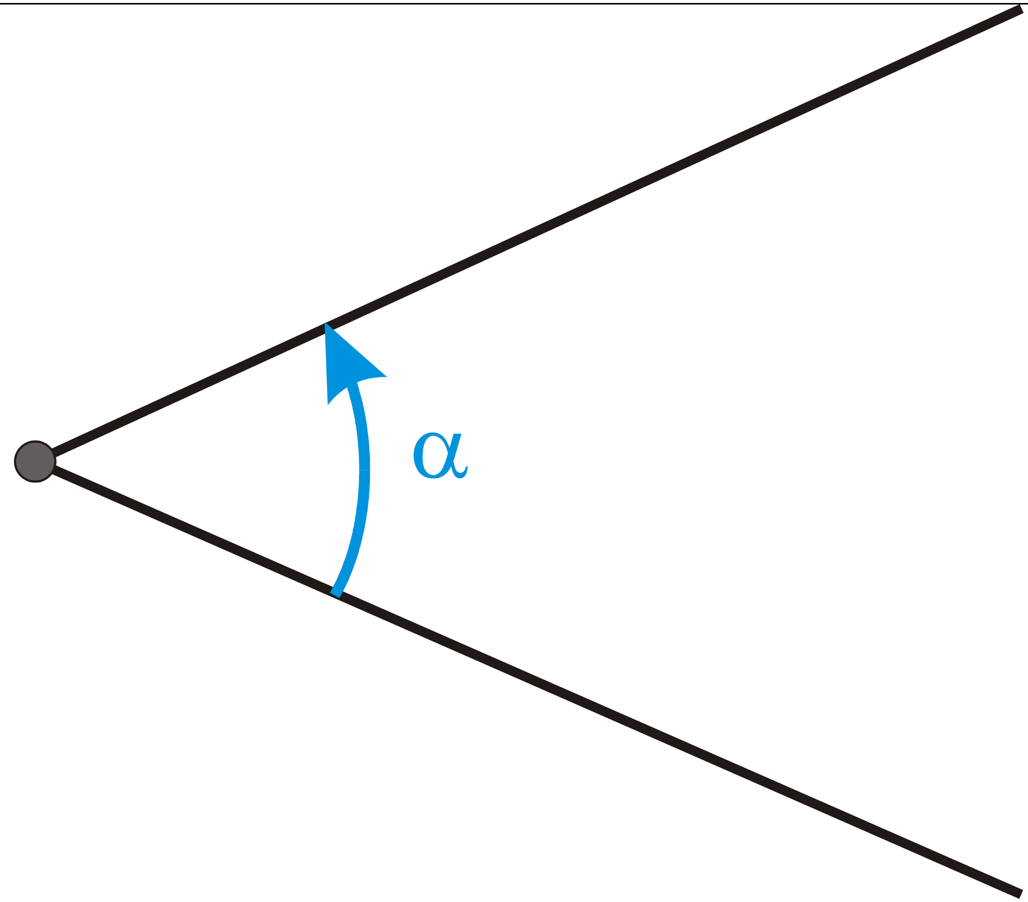


`[definizione_angolo_ concavo.cdr, wmf; definizione_angolo_convesso.cdr,wmf]`

Gli angoli vengono indicati di solito con le lettere greche minuscole.

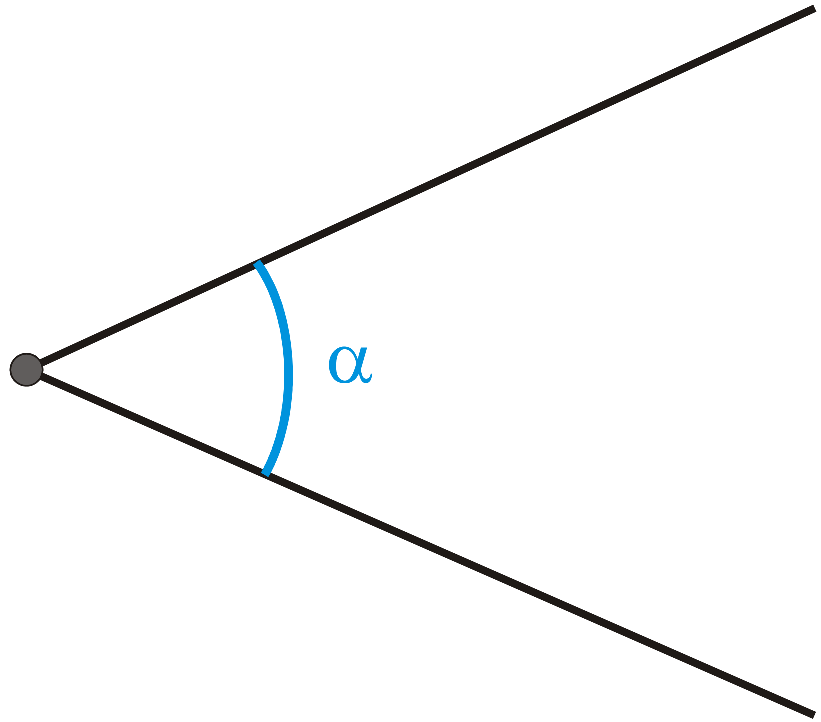
Definizione cinematica di angolo

L'angolo può essere anche descritto in termini cinematici come la superficie coperta da una semiretta durante una rotazione attorno al suo estremo.

[definizione_angolo_orientato.cdr,wmf;	

Ampiezza di angolo

Ogni angolo ha una ampiezza, quantità descritta in gradi, che possono essere misurati con diverse unità.



[definizione_angolo_concavo.cdr,wmf]

Due angoli aventi la stessa ampiezza sono *congruenti*.

Angoli notevoli - 1

Un angolo formato da due semirette non coincidenti ma appartenenti alla stessa retta si dice *angolo piatto.*

Un *angolo retto* è pari alla metà di uno piatto: è formato da due semirette ortogonali.

Un *angolo giro* è formato da due semirette coincidenti ed è pari al doppio di un angolo piatto.

Angoli notevoli - 2

Un angolo è *acuto* se ha ampiezza minore di un angolo retto.

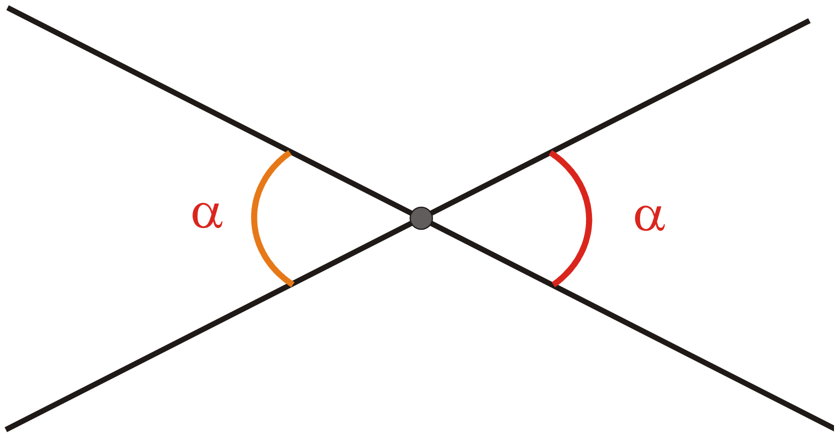
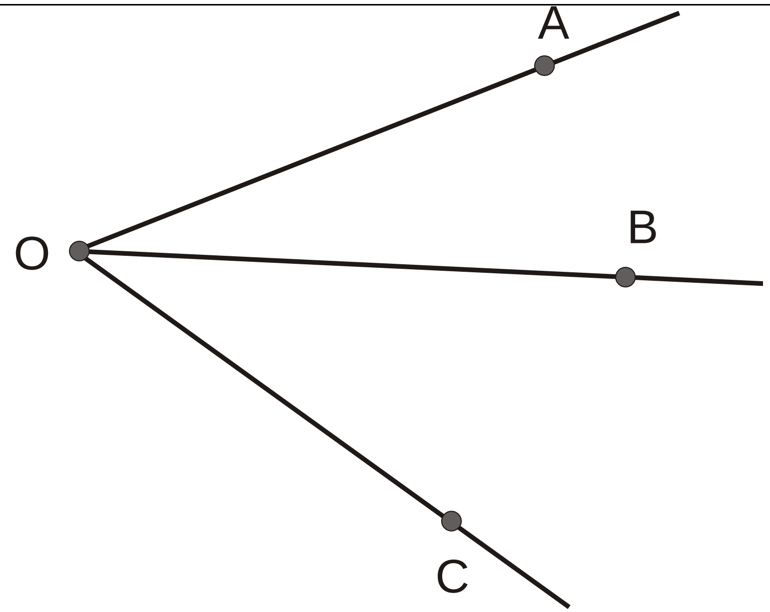
Un angolo è *ottuso* se ha ampiezza maggiore di un angolo retto.

Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.

Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

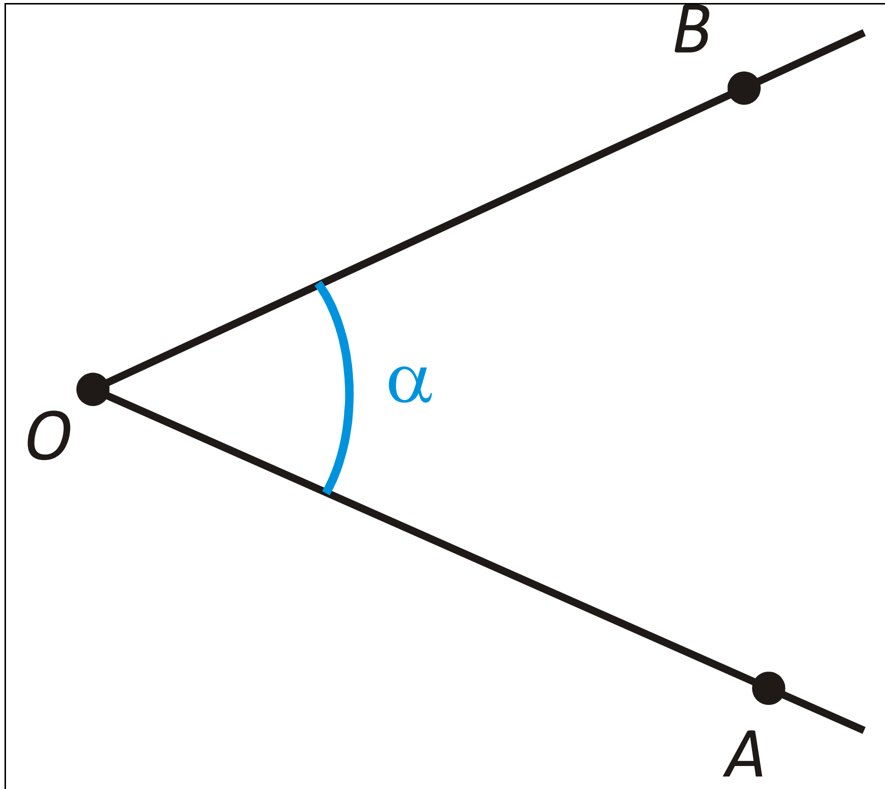
Due angoli si dicono *esplementari* se la loro somma è un angolo giro.

Angoli notevoli - 3

Due angoli si dicono *opposti al vertice* se i prolungamenti di uno corrispondono ai lati dell'altro, cioè semirette opposte. Due angoli opposti al vertice sono congruenti, cioè hanno la stessa misura.	
Due angoli sono *consecutivi* se hanno in comune il vertice e un lato. [definizione_angoli_opposti_vertic.cdr,wmf; definizione_angoli_consecutivi.cdr,wmf]	

Angoli non orientati

Facciamo riferimento alla definizione cinematica di angoli e consideriamo l'angolo α formato delle due semirette $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$



Si può pensare indifferentemente che l'angolo α sia:

- quello generato da $\overrightarrow{OB}$ (inizialmente coincidente con $\overrightarrow{OA}$) ruotando in senso antiorario;
- quello generato da $\overrightarrow{OA}$ (inizialmente coincidente con $\overrightarrow{OB}$) ruotando in senso orario

Per questo si usa dire che quelli definiti finora sono angoli non orientati. Un angolo non orientato ha sempre una misura positiva.

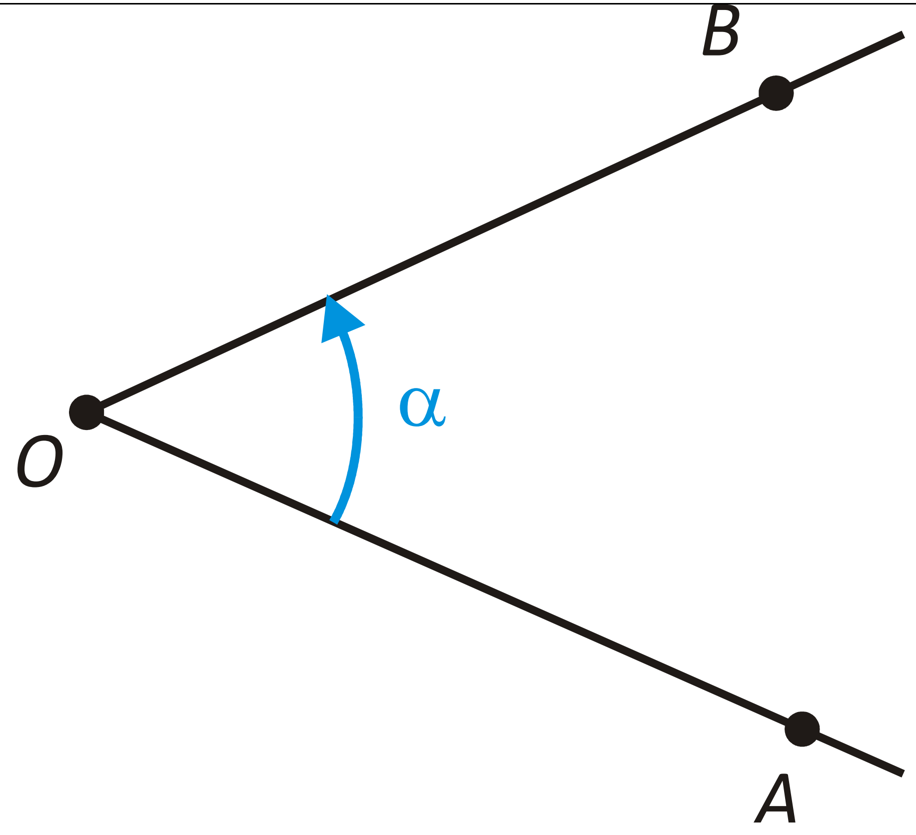
`[definizione_angolo_non_orientato.cdr;wmf]`

Angoli orientati

La definizione cinematica è alla base della definizione degli angoli orientati. Per considerare angoli orientati è necessario

- fissare una semiretta origine ($\overrightarrow{OA}$ nel nostro caso)
- fissare convenzionalmente il verso di rotazione corrispondente agli angoli positivi (nelle dispense è adottato il verso antiorario, che costituisce la scelta maggiormente diffusa)

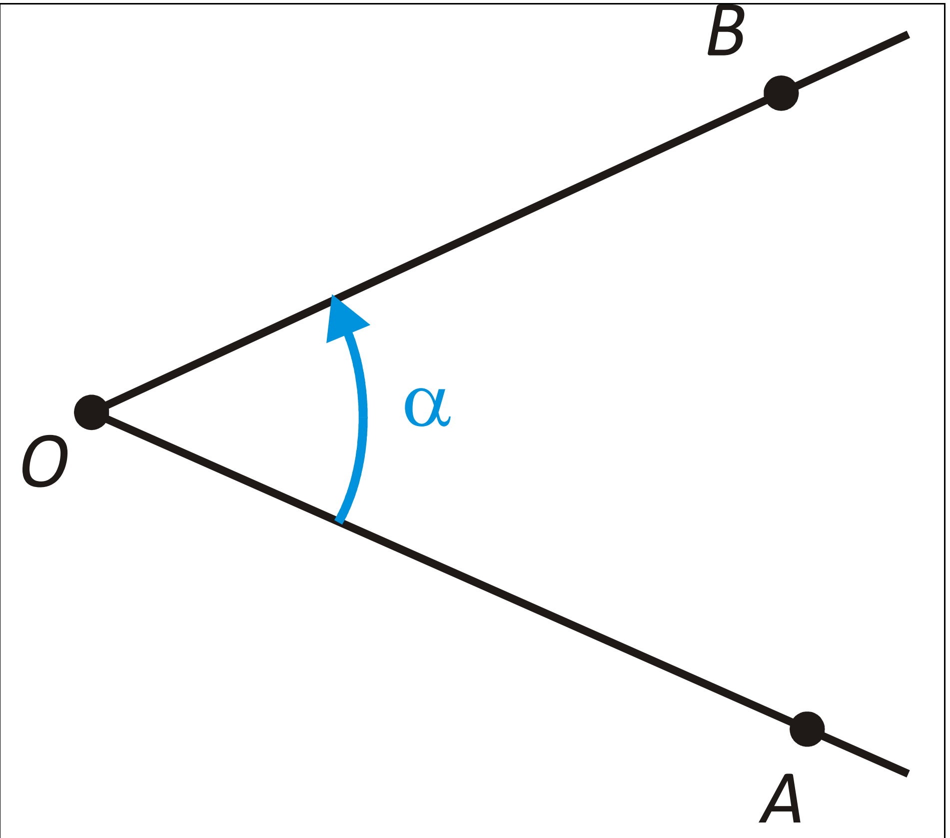
[definizione_angolo_orientato2.cdr;wmf]



Angoli orientati - 2

Si dice che l'angolo α formato da $\overrightarrow{OB}$ è positivo se la semiretta è ruotata in senso antiorario rispetto alla semiretta origine $\overrightarrow{OA}$
E' negativo nel caso contrario

[definizione_angolo_orientato2.cdr;wmf]



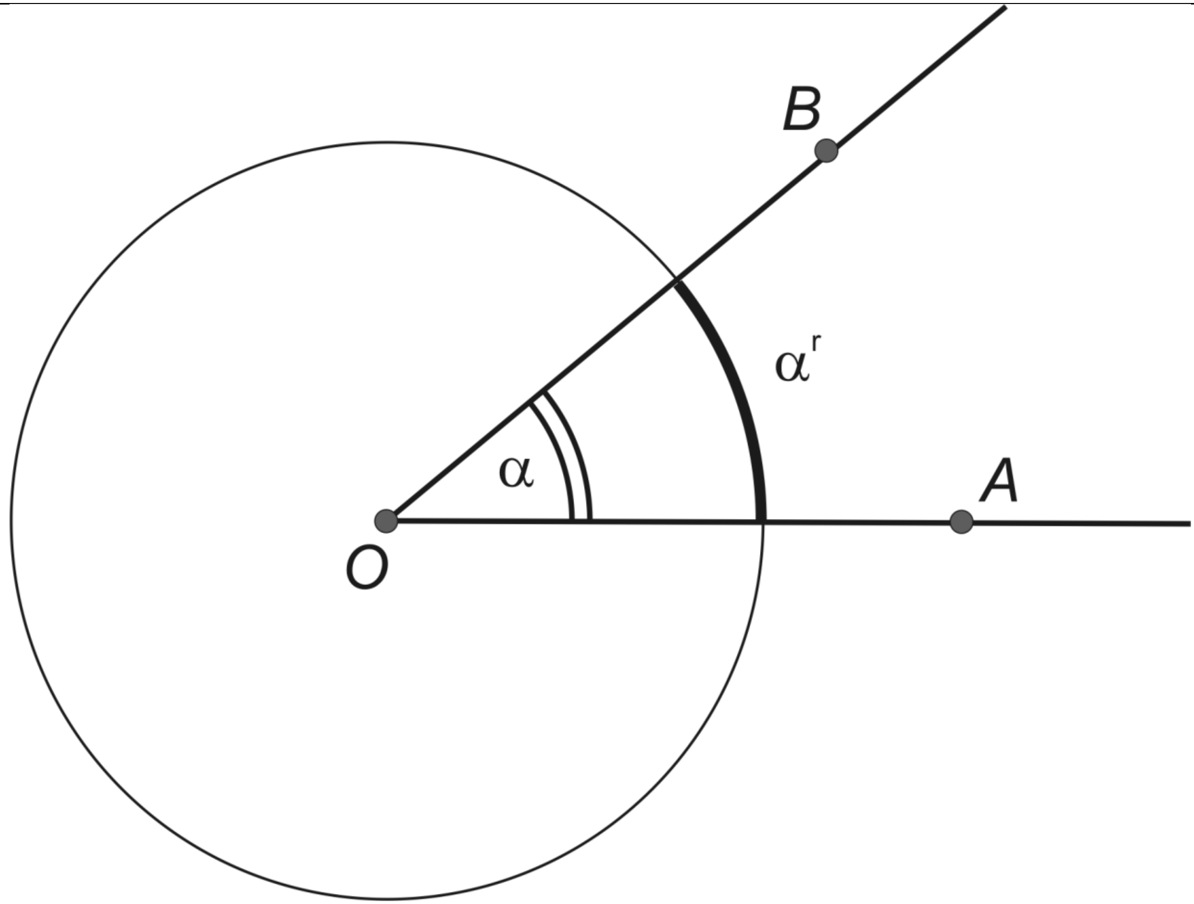
Gli angoli orientati sono usati in Topografia: letture al cerchio, angolo formato da due segmenti, ecc.

Gli angoli orientati sono anche usati nelle coordinate polari.

Angoli radianti - Definizione

Si tratta una metodologia decimale di misura degli angoli basata sulla lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria circoscritta all'angolo.

Dato l'angolo α, formato dalle semirette $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, la sua misura in radianti, α^r, è pari alla lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria circoscritta all'angolo.



[definizione_angolo_radianti.cdr; definizione_angolo_radianti.wmf]

Esempio: $\alpha^r = 1.3456289$

Angoli radianti – Proprietà - 1

Poiché la circonferenza unitaria è lunga 2π, ricordando che $\pi = 3.14159265358979\ldots$ si ha

Angolo retto: $\pi/2 = 1.57079632679490\ldots$

Angolo giro: $2\pi = 6.28318530717959\ldots$

Angoli radianti – Proprietà - 2

I radianti sono gli unici tipi di angoli riconosciuti da tutti i sistemi di calcolo. I linguaggi di programmazione in genere sanno gestire solo questo tipo di dati angolari e, dovendo elaborare dati espressi in altre unità, è necessario convertirli.

Anche il programma Excel, per esempio, conosce solo gli angoli radianti.

Quando si approssimano le funzioni trigonometriche con sviluppi in serie, che coinvolgono le derivate, è necessario misurare gli angoli in radianti (vedi oltre)

Le altre unità di misura angolari decimali possono essere viste come riscalamenti dei radianti: misurano la stessa grandezza, nello stesso modo, ma con una differente unità di misura.

Angoli sessadecimali

Si tratta della versione decimale dei sessagesimali (definiti in seguito)

Angolo retto: 90^d

Angolo giro: 360^d

Le frazioni sono decimali, indicate con un numero dopo la virgola.

Esempio: $26^d.763973$.

Uso. Gli angoli sessadecimali erano usati negli strumenti topografici, ma oggi sono stati quasi completamente sostituiti dai centesimali. Sono utili come prodotto intermedio nelle conversioni.

Angoli centesimali

Angolo retto: 100^g

Angolo giro: 400^g

Le frazioni sono decimali, indicate con un numero dopo la virgola.

Esempio: $345^g.763973$.

Uso. Attualmente la grande maggioranza degli strumenti topografici usa angoli centesimali.

Angoli sessagesimali

Angolo retto: 90°

Angolo giro: 360°

Le frazioni di grado non sono decimali, ma sono costituite dai *primi* e dai *secondi*.

Un grado è costituito da 60 primi.

Un primo consta di 60 secondi; di conseguenza un grado corrisponde a 3600 secondi.

Le frazioni di secondo sono decimali.

Un angolo sessagesimale si indica ad esempio come 45°27'19''.89983.

Usati per esprimere le coordinate geografiche di un punto, cioè latitudine e longitudine.

Utili per: coordinate geografiche dei vertici trigonometrici e dei vertici GPS; cultura generale.

Sintesi

Unità	Angolo retto	Angolo giro	Esempio	Decimale
radianti	$\pi/2$	2π	0.78877140487	sì
sessadecimali	90	360	45.1932725	sì
centesimali	100	400	50.2147472	sì
sessagesimali	90	360	45°11'35".781	no

L'aritmetica degli angoli

Dati due angoli consecutivi A e B, l'intuizione ci suggerisce che cosa siano $A+B$ e $A/2$. L'intuizione si suggerisce anche che la misura degli angoli sia *additiva*

$$\begin{aligned} &\text{mis}(A+B)=\text{mis}(A)+\text{mis}(B) \\ &\text{mis}(A/2)=\text{mis}(A)/2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Indichiamo con α e β le misure di A e B

$$\text{mis}(A)=\alpha$$

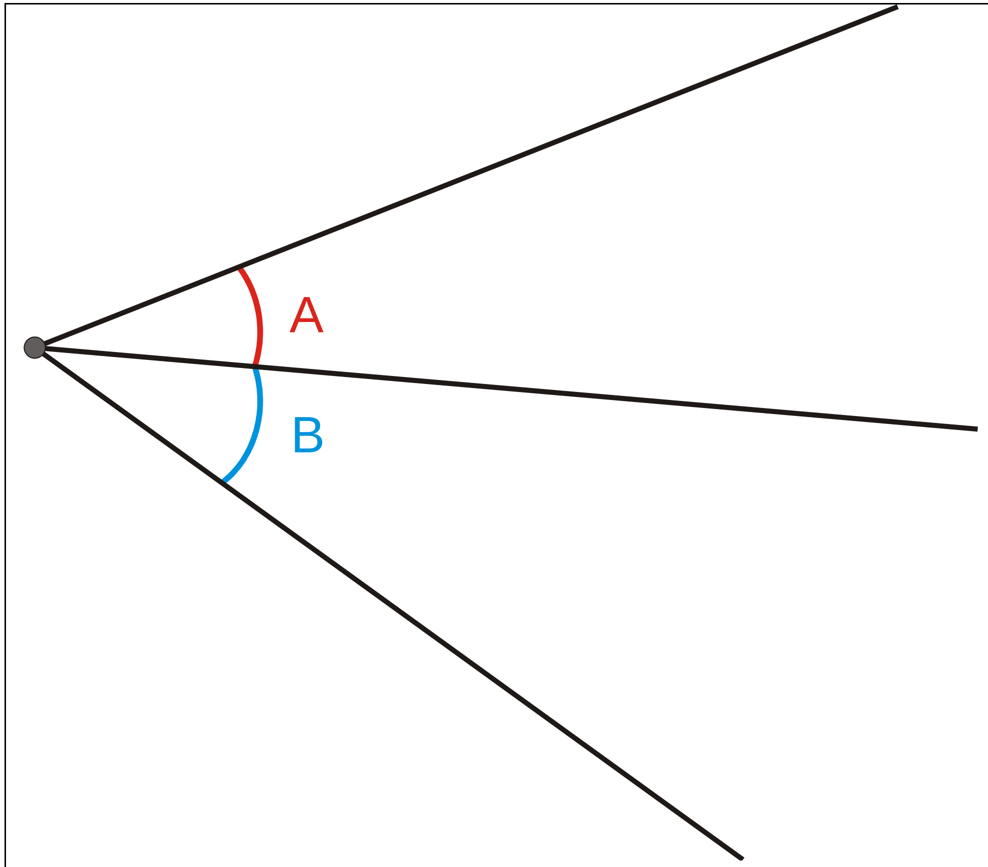
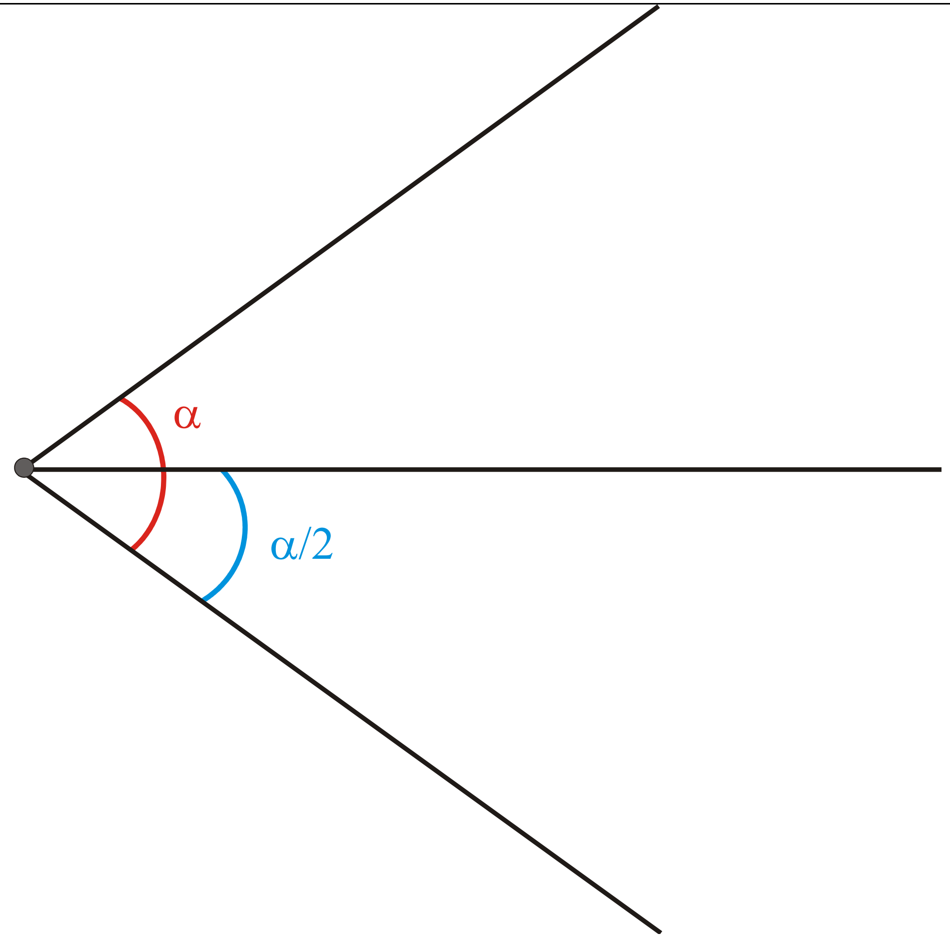
$$\text{mis}(B)=\beta$$

Per l'addività (1) si deve avere

$$\text{mis}(A+B)=\alpha+\beta$$

$$\text{mis}(A/2)=\alpha/2$$

L'aritmetica degli angoli – 2

	
$\text{mis}(A+B)=\alpha+\beta$ [somma_angoli.cdr, wmf]	$\text{mis}(A/2)=\alpha/2$ [bisecazione_angolo.cdr, wmf]

L'aritmetica degli angoli - 3

Per le tre unità di misura dette decimali (sessadecimali, centesimali e radianti) le quantità α e β sono numeri reali e somma e divisione sono quelle dei numeri reali

$$\text{mis}(A) = \alpha = 50.88$$

$$\text{mis}(B) = \beta = 25.39$$

$$\text{mis}(A + B) = \alpha + \beta = \quad \text{(somma fra reali)}$$

$$= 76.27$$

$$\text{mis}(A/2) = \alpha / 2 = \quad \text{(divisione fra reali)}$$

$$= 25.44$$

L'aritmetica degli angoli - 4

Per i gradi sessagesimali le quantità α e β sono numeri (o più propriamente terne di numeri (g,p,s)) che si possono sommare e moltiplicare, ma non secondo le regole della aritmetica dei numeri

La metà dell'angolo 45°

$$45°/2 = \cancel{22.50} \quad \text{NO!}$$
$$= 22°30'$$

La somma degli angoli che misurano $1°40'$ e $1°50'$

$$1°40' + 1°50' = \cancel{2°90'} \quad \text{NO!}$$
$$= 3°30'$$

Esiste una aritmetica dei sessagesimali le cui regole di base si possono semplicemente ricavare ricordando la definizione di tali angoli.

L'aritmetica degli angoli- 5

Gli angoli sessagesimali non sono l'unico esempio di aritmetica non decimale. Anche il tempo ha una aritmetica non decimale. Esempio.

Un pilota di F1 compie il 22° giro in un tempo $t_1 = 1'29''.856$ e il giro 23° in un tempo $t_2 = 1'31''.346$. In quanto tempo ha percorso i due giri?

La risposta è ovviamente $t = t_1 + t_2$ (additività), ma il calcolo numerico deve essere effettuato secondo le regole di un'aritmetica che non è quella dei reali

$$t = 3'\,1''.202$$

Nomi anglosassoni

Nella letteratura anglosassone alle unità angolari sono associati degli acronimi

sessagesimali: DMS (Degrees, Minutes, Seconds)

sessadecimali: DEG (Degrees)

centesimali: GRAD (Gradiants) o anche GONS

radianti: RAD (Radiants)

La conoscenza di tali acronimi può essere utile perché spesso anche la manualistica in italiano, le calcolatrici tascabili e i software di gestione degli strumenti topografici li adottano.

Sottomultipli

Esistono anche altre unità, sottomultiple di quelle considerate.

Milligon: la millesima parte dell'angolo centesimale, indicati dalla sigla MGON; per convertire a gons, dividere per 1000.

Archi di primo, ARCMIN, pari a un primo sessagesimale; per convertire a gradi dividere per 60.

Archi di secondo, ARCSEC, pari a un secondo sessagesimale; per convertire a gradi dividere per 3600.

Millesimi di archi di secondo, MAS, pari a un millesimo di secondo sessagesimale; per convertire a gradi dividere per 3 600 000

$$1\,\mathrm{MAS} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{arcsec} = \frac{1}{1000}\frac{1}{3600}\,\mathrm{deg}$$

Conversioni fra formati angolari decimali

Le conversioni fra i formati decimali sono agevoli e comportano il calcolo di semplici proporzioni. Le relazioni fra la misura sessadecimale α^d, centesimale α^g, e in radianti α^r di uno stesso angolo sono date da

$$\frac{\alpha^d}{180} = \frac{\alpha^g}{200} = \frac{\alpha^r}{\pi}$$

Se ad esempio si ha

$$\alpha^d = 167.775921$$

$$\alpha^r = \alpha^d \frac{\pi}{180} = 2.92824223$$

Più complesso è il caso della conversione fra uno qualunque dei formati decimali e il formato sessagesimale. Essa viene eseguita in due passi: dal formato iniziale a DEG e da DEG a DMS; cose analoghe valgono per la conversione nell'altro senso.

Conversione da DMS a DEG

Studiamo la conversione da DMS e DEG, in andata e ritorno.

Come esempio del primo caso, consideriamo

$$\alpha^\circ = 96^\circ 20' 41''.47$$

Un numero sessagesimale deve essere pensato come una terna di numeri

$$\alpha^\circ = (g, p, s) = \qquad \left[\alpha^\circ = (96, 20, 41.47)\right]$$

Un numero di primi *p* corrisponde a una frazione di grado pari a $p/60$ e un numero di secondi *s* corrisponde a una frazione di grado pari a $s/3600$. Si può allora concludere

$$\alpha^d = g + p/60 + s/3600 \qquad \left[\begin{aligned} \alpha^d &= 96 + 0.333333 + 0.011519 \\ &= 96.344853 \text{ deg} \end{aligned}\right]$$

Conversione da DEG a DMS

Consideriamo ora $\beta^d = 136.418203$ e cerchiamo di convertirlo a DMS; ciò equivale ad esplicitare i tre numeri $(g,p,s) = \beta^\circ$.

Useremo la *funzione parte intera* int() il cui comportamento è, per esempio

$$\mathrm{int}(167.783452) = 167$$

$$\mathrm{int}(-12.34) = -12$$

Nel linguaggio Matlab tale funzione è chiamata FIX.

Evidentemente vale

$$g = \mathrm{int}(\beta^d) \qquad [g = 136]$$

Vi è un primo resto

$$r_1 = \beta^d - g \qquad [r_1 = 0.418203]$$

Conversione da DEG a DMS- 2

Il resto r_1 è misurato in unità gradi e lo si può convertire in unità primi moltiplicando per 60. Indichiamo tale quantità con

$$r_2 = r_1 \times 60 \qquad [r_2 = 25.09218]$$

La parte intera di tale quantità coincide con p

$$p = \text{int}(r_2) \qquad [\text{p=int}(25.09218) = 25]$$

Vi è un ulteriore resto

$$r_3 = r_2 - p \qquad [r_3 = 0.09218]$$

che è misurato in unità primi e può essere convertito in unità secondi moltiplicando per 60. Si ha

$$s = r_3 \times 60 \qquad [s = 5.53]$$

In sintesi

$$\beta^\circ = 136^\circ 25' 05''.53$$

Esercizi

La tabella seguente indica le misure di alcuni angoli in tutte le unità considerate. Essa offre la possibilità di esercitarsi nella varie conversioni.

Suggerimenti

- Usare in input tutte le cifre decimali indicate: i risultati devono coincidere almeno fino alla penultima cifra decimale.
- Per il valore di π usare quello fornito dalla calcolatrice, senza troncamenti.

Esercizi - 2

DMS	VDMS	DEG	GRAD	RAD
285°11'40".70	285.114070	285.194638	316.882932	4.97758545
345°25'2".19	345.250219	345.417274	383.796971	6.02866872
236°3'59".95	236.035995	236.066652	262.296280	4.12014033
12°51'22".33	12.512233	12.856204	14.284671	0.22438309
305°41'11".58	305.411158	305.686550	339.651722	5.33523678

NB: trascurare la seconda colonna, VDMS, inserita solo per controllo

```
[esercizi_conversione_angoli.m]
[esercizi_conversioni_angolari.xls]
```

Problema sullo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche

Sviluppo in serie di Taylor della funzione seno, al primo ordine, in un intorno di $x = 0$. Usiamo per ora i radianti. Valutiamo la funzione approssimata in

$$x^r = 0.0030 \qquad (2)$$

Piccolo richiamo di teoria

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right) + o(x)$$

Per la funzione seno

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)\,x + o(x)$$

Esplicitando

$$\sin(x) = x + o(x) \qquad (3)$$

Valutiamo in (2); si ha evidentemente, al primo ordine

$$y_1 = \sin(x^r) \overset{1^0}{=} 0.0030$$

Problema sullo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche - 2

Per valutare la bontà dell'approssimazione, calcoliamo in modo esatto $\sin(x^r)$

$$y_2 = \sin(x^r) = 0.0029999955 \quad \text{valore esatto}$$

Poiché x^r è piccolo, l'approssimazione di Taylor al primo ordine è molto buona e la differenza vale

$$|y_1 - y_2| \sim 5 \ 10^{-9}$$

Problema sullo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche - 3

Ripetiamo il tutto misurando gli angoli in centesimali

$$x^g = x^r \frac{200}{\pi} = 0.1910$$

Ripercorriamo i passi essenziali

Per la funzione seno

$$\sin(x^g) = \sin(0^g) + \cos(0^g)\, x^g + o(x)$$

Esplicitando

$$\sin(x^g) = x^g + o(x)$$

Valutiamo in (2); si ha evidentemente, al primo ordine

$$y_3 = \sin(x^g) \overset{1^0}{=} 0.1910$$

Il valore approssimato y_3 è enormemente lontano da y_2. Abbiamo commesso evidentemente un errore. Quale?

Calcolo differenziale con le funzioni trigonometriche

Gli angoli radianti hanno una ulteriore, essenziale, proprietà, sulla quale i testi si dilungano poco, inspiegabilmente.

Sono ben noti i risultati riguardanti la derivata delle funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \cos(x) \\ \frac{d}{dx}\cos(x) &= -\sin(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Le relazioni sono vere solo se l'argomento x è in unità radianti.

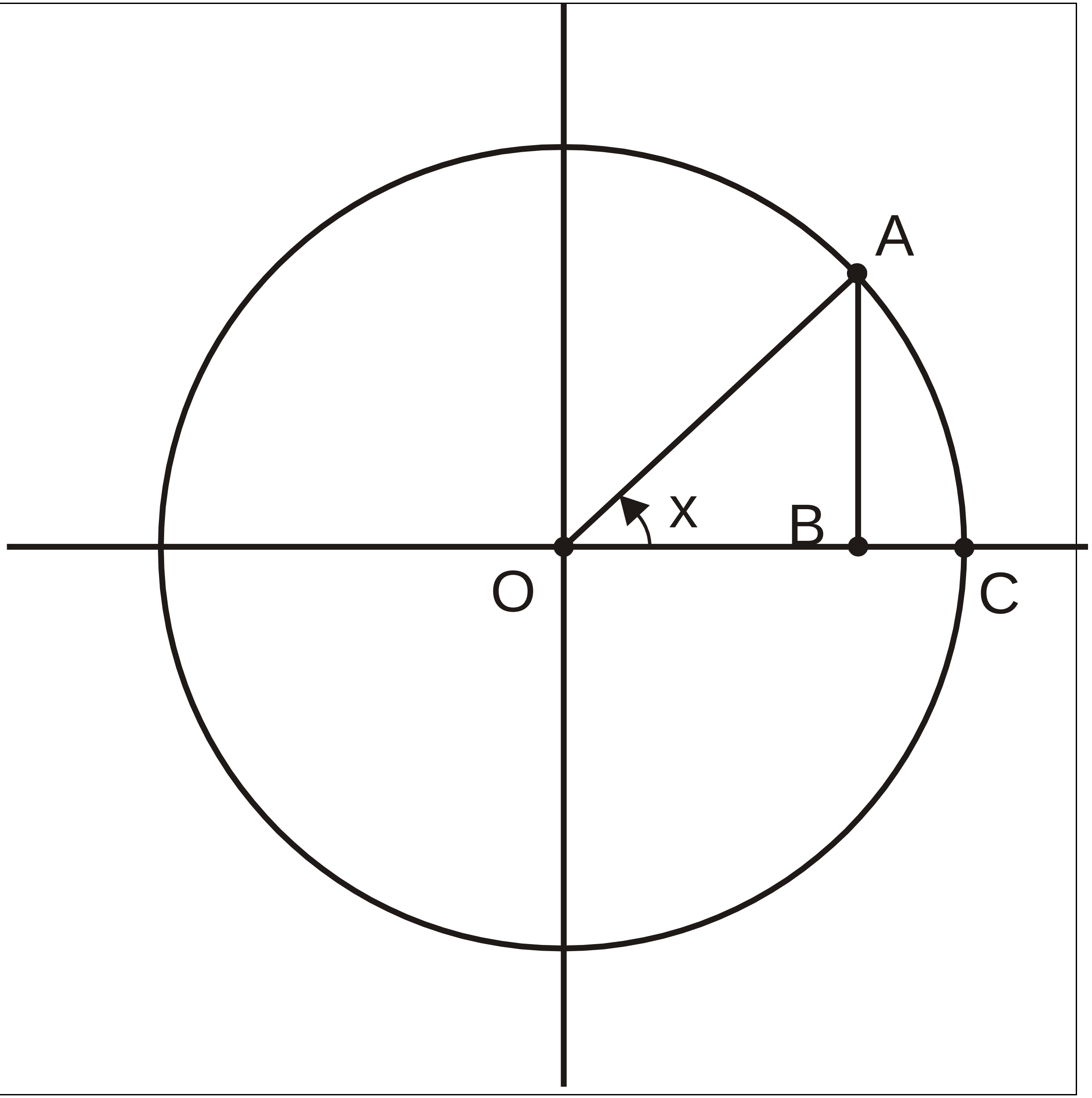
Calcolo differenziale con le funzioni trigonometriche – 2

Non è immediato dimostrare che le (4) valgono solo con i radianti. Nei testi di analisi in genere le (4) sono dimostrate facendo ricordo a considerazioni geometriche che sottintendono l'uso dei radianti, in quanto si identifica la quantità x con la lunghezza dell'arco di circonferenza.

[definizione_funzione_seno.cdr,wmf]

ESEMPIO e CITAZIONE

Spostare lettera B



Calcolo differenziale con le funzioni trigonometriche – 3

Noi porteremo due argomenti.

Anzitutto evidenzieremo che esistono diverse funzioni seno, quella per i radianti, quella per i centesimali, ecc. A partire da questa considerazione arriveremo alle formule (6) che generalizzano le (4) quando gli angoli sono misurati in una qualunque unità di misura decimale.

Inoltre ragioneremo sull'interpretazione geometrica dello sviluppo in serie di Taylor della funzione seno, evidenziando ancora una volta come la (3) sia sensata solo se x è in radianti.

Infine torneremo alla sviluppo in serie con i GRAD e, usando, le (6), otterremo risultati sensati.

Calcolo differenziale con le funzioni trigonometriche – 3

Se si usano altre unità decimali, per esempio GRAD, l'angolo non coincide con la lunghezza dell'arco, ma con un suo multiplo

$$x^G = x^r \frac{200}{\pi} = \frac{x^r}{k} \qquad (5)$$

con

$$k = \frac{\pi}{200}$$

Dalla (5) si ricava banalmente

$$x^r = k\, x^G$$

Esistono molte funzioni seno

Indichiamo con sin la funzione che calcola il seno di un angolo misurato in radianti.

Indichiamo con sing la funzione che calcola il seno di un angolo misurato in centesimali.

Le due funzioni coincidono? La risposta è no.

Anzitutto il dominio della prima è, limitandosi al primo giro, $[0,2\pi]$ e il dominio della seconda è [0,400].

Inoltre se coincidessero si dovrebbe avere

$$\text{sing}(100) = 1$$

mentre si ha (provare con Excel o Matlab, o una calcolatrice)

$$\sin(100) = -0.5064$$

Le due funzioni sono diverse dunque, ma hanno una chiara relazione.

Esistono molte funzioni seno - 2

Consideriamo un angolo misurato in GRAD, x^G e l'equivalente angolo in radianti, $x^r = k\,x^G$. Le due funzioni sing e sin devono prendere lo stesso valore sui due angoli equivalenti

$$\text{sing}(x^G) = \sin\left(x^r\right) = \sin\left(x^G\,k\right)$$

$$\text{cosg}(x^G) = \cos\left(x^r\right) = \cos\left(x^G\,k\right)$$

Possiamo ricavare

$$\frac{d}{dx^G}\text{sing}(x^G) = \frac{d}{dx^G}\left(\sin\left(x^G\,k\right)\right) = \cos\left(x^G\,k\right)k = \text{cosg}\left(x^G\right)k$$

Le derivate per le funzioni trigonometriche aventi come argomenti multipli dei radianti

Si ha insomma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{sing}(x) &= k\operatorname{cosg}(x) \\ \frac{d}{dx}\operatorname{cosg}(x) &= -k\operatorname{sing}(x) \end{aligned} \tag{6}$$

Dove, ricordiamo

$$k = \frac{\pi}{200} = 0.0157$$

Considerazioni analoghe potrebbero essere svolte per le funzioni trigonometriche degli angoli sessadecimali.

Sviluppi in serie avendo come argomento i centesimali

Si capisce ora come deve essere modificato lo sviluppo alla pag. 36

$$x^G = x^r \frac{200}{\pi} = x^r \frac{1}{k} = 0.1910 \qquad (7)$$

Per la funzione seno (in centesimali)

$$\text{sing}(x^G) = \text{sing}(0^G) + k\,\text{cosg}(0^G)\,x^G + o(x^G)$$

Esplicitando

$$\text{sing}(x^G) = k\,x^G + o(x^G)$$

Ricordando la (7) si ha

$$\text{sing}(x^G) \stackrel{1^0}{=} y_4 = k\,x^G = k\,x^r \frac{1}{k} = x^r = 0.0030$$

Ora il risultato è corretto.

Interpretazione geometrica dello sviluppo in serie

Sviluppiamo sin(x) in radianti in un intorno di 0

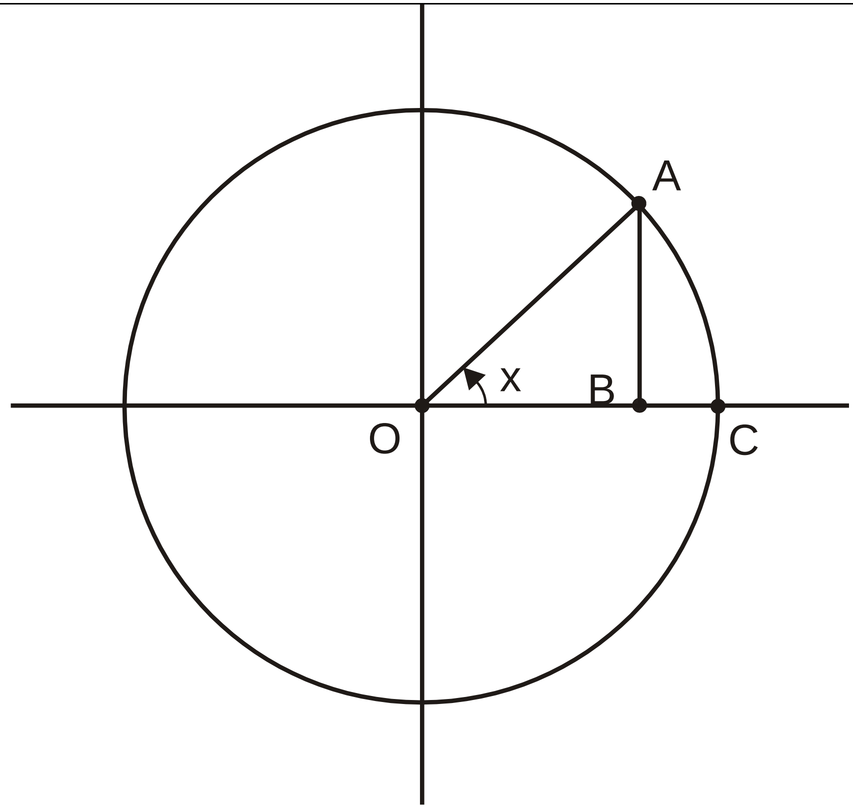
$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)\,x + o(x^2) \quad (8)$$

da cui

$$\sin(x) = x + o(x) \quad (9)$$

Interpretazione: per valori di x piccoli, sin(x) coincide con x. L'interpretazione geometrica è che il segmento verticale $\overline{OA} = \sin(x)$ tende a coincidere con la lunghezza dell'arco di cerchio AC, che coincide con l'angolo x solo se la misura è in radianti.

[definizione_funzione_seno.cdr,wmf]



Conclusioni

Quando si devono calcolare le derivate delle funzioni trigonometriche (propagazione della varianza, approssimazioni, sviluppi di Taylor, Minimi Quadrati), tutte le grandezze angolari devono essere espresse in radianti.

Somma e sottrazione di angoli sessagesimali

Non una trattazione esaustiva, ma alcuni esempi significativi e sufficienti per risolvere i casi pratici che potrebbero presentarsi.

- Somma
- Sottrazione con un prestito
- Sottrazione con due prestiti
- Differenza con risultato negativo
- Somma di un numero negativo e uno positivo

Somma di angoli sessagesimali - 1

Per semplicità di scrittura indichiamo gli angoli come terne di numeri (g,p,s).

Considereremo degli s interi per semplicità, ma senza perdita di generalità.

Consideriamo anzitutto la somma di due angoli positivi

$$\begin{array}{cccc} 45 & 48 & 39 & + \\ 72 & 51 & 54 & = \end{array}$$

Dobbiamo trovare i tre valori (g,p,s) che rappresentano la somma dei due numeri. Si parte da destra: la somma dei secondi vale 93, che corrisponde a 33 secondi e 1 primo, da trattare come *riporto*.

$$\begin{array}{cccc} 45 & 48 & 39 & + \\ 72 & 51 & 54 & = \\ & & 33 & \end{array}$$

Somma di angoli sessagesimali - 2

La somma dei primi vale 99 a cui bisogna aggiungere il riporto di 1; 100 primi devono essere pensati come la somma di 1 grado e 40 primi; il grado deve essere riportato

45	48	39	+
72	51	54	=
	40	33	

Infine la somma dei gradi e del riporto permette di concludere

45	48	39	+
72	51	54	=
118	40	33	

Differenza di angoli sessagesimali: un prestito - 1

Consideriamo ora la differenza fra due angoli positivi in cui il secondo è minore del primo

$$\begin{array}{cccc} 45 & 27 & 33 & - \\ 30 & 13 & 48 & = \end{array}$$

Bisogna partire da destra. Il minuendo ha meno secondi del sottraendo, 33 contro 48. E' allora necessario *chiedere in prestito* un primo: il numero di secondi del minuendo diventa pertanto 93

$$\begin{array}{cccc} 45 & 27 & 33 & - \\ 30 & 13 & 48 & = \\ & & 45 & \end{array}$$

Differenza di angoli sessagesimali: un prestito - 2

La differenza fra i primi va fatta tenendo conto del prestito

45	27	33	$-$
30	13	48	$=$
	13	45	

Infine la differenza fra i gradi

45	27	33	$-$
30	13	48	$=$
15	13	45	

Differenza di angoli sessagesimali: un prestito - 3

E' possibile fare la verifica sommando seconda e terza riga e verificando che il risultato coincida con la prima

30	13	48	$+$
15	13	45	$=$
45	27	33	

OK

Differenza di angoli sessagesimali: due prestiti - 1

Consideriamo un caso in cui sono necessari due prestiti.

$$\begin{array}{llll} 45 & 27 & 33 & - \\ 30 & 38 & 53 & = \\ 14 & 48 & 40 & \end{array}$$

Partiamo da destra. E' necessario prendere a prestito un primo

$$\begin{array}{llll} 45 & 26 & 93 & \\ 45 & \cancel{27} & \cancel{33} & - \\ 30 & 38 & 53 & = \\ & & 40 & \end{array}$$

Differenza di angoli sessagesimali: due prestiti - 2

Bisogna ora prendere a prestito un grado da aggiungere ai primi

44	86	93	
$\cancel{45}$	$\cancel{27}$	$\cancel{33}$	$-$
30	38	53	$=$
14	48	40	

Sommiamo le ultime due righe per verifica

30	38	53	$+$
14	48	40	$=$
45	27	33	

Differenza di angoli sessagesimali con il risultato negativo

Se il minuendo è minore del sottraendo come ad esempio

$$\begin{array}{llll} 12 & 27 & 08 & - \\ 15 & 19 & 31 & = \end{array}$$

ci si può ricondurre al caso precedente ricordando

$$\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$$

$$\begin{array}{llll} 15 & 19 & 31 & - \\ 12 & 27 & 08 & = \\ 2 & 52 & 23 & \end{array}$$

Dunque il risultato è

$$- \quad 2 \quad 52 \quad 23$$

Somma fra un numero negativo e una positivo

La somma fra un numero negativo e una positivo fa vista come sottrazione.

Esempio

$$
\begin{array}{ccccc}
- & 6 & 15 & 11 & + \\
 & 12 & 27 & 08 & =
\end{array}
$$

Dove il segno – della prima riga riguarda tutta la terna, equivale a

$$
\begin{array}{cccc}
12 & 27 & 08 & - \\
6 & 15 & 11 & \\
6 & 11 & 57 &
\end{array}
$$

Esempio 1

Le operazioni presentate di seguito devono essere viste al momento come esercizi, semplicemente. Una volta affrontati gli argomenti dei sistemi di riferimento geodetici, gli studenti capiranno che gli esempi presentati sono di particolare interesse.

Longitudine del meridiano centrale del fuso Ovest rispetto a Greenhich

$$\begin{array}{ccc c} 9 & 0 & 0 & - \\ 12 & 27 & 08.4 & = \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Il risultato è uguale all’opposto dell’operazione

$$\begin{array}{ccc c} 12 & 27 & 08.4 & - \\ 9 & 0 & 0 & = \\ 3 & 27 & 08.4 & \end{array}$$

Esempio 1 - 2

Risultato

– 3 27 08.4

Esempio 2

$$\begin{array}{cccc} 15 & 0 & 0 & - \\ 12 & 27 & 08.4 & = \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Si deve prendere a prestito un grado

$$\begin{array}{cccc} 14 & 59 & 60 & \\ \cancel{15} & \cancel{0} & \cancel{0} & - \\ 12 & 27 & 08.4 & = \\ 2 & 32 & 51.6 & \end{array}$$

Esempio 2 – 2

In questo caso è molto interessante anche la verifica

12	27	08.4	+
2	32	51.6	=

La somma dei secondi dà 60, da pensarsi come 1 primo + 0 secondi

	1		
12	27	08.4	+
2	32	51.6	=
		0	

La somma dei primi dà 60, da pensarsi come 1 grado + 0 primi

1	1		
12	27	08.4	+
2	32	51.6	=
15	0	0	

Esempio 3

Conversione delle longitudini da MM a Greenhich. Partiamo dalla longitudine del vertice IGM 059047

$$
\begin{array}{lrrrl}
- & 3 & 18 & 13.053 & + \\
 & 12 & 27 & 08.4 & =
\end{array}
$$

Equivale a

$$
\begin{array}{rrrl}
12 & 27 & 08.4 & - \\
3 & 18 & 13.053 & = \\
9 & 9 & 55.347 &
\end{array}
$$

Esempio 4

Conversione delle longitudini da Greenwich a MM. Partiamo dalla longitudine del vertice IGM 059047

$$10 \quad 22 \quad 39.362 \quad -$$

$$12 \quad 27 \quad 08.4 \quad =$$

Il risultato è uguale all'opposto del risultato dell'operazione

$$12 \quad 27 \quad 08.4 \quad -$$

$$10 \quad 22 \quad 39.362 \quad =$$

$$2 \quad 4 \quad 29.038$$

Risultato

$$- \quad 2 \quad 4 \quad 29.038$$