Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DIET - Università di Pavia

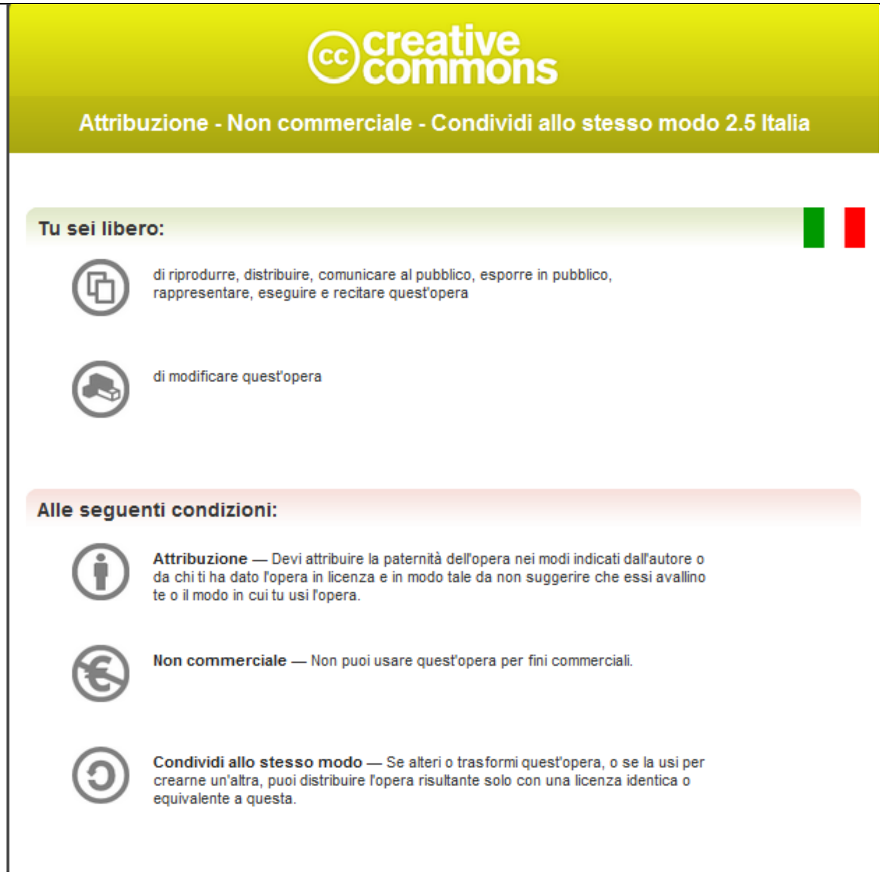
email: vittorio.casella@unipv.it

Elementi di trigonometria

Licenza

La presentazione che segue è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Pagine da tenere in considerazione

TOC AA 2011-2012

Illustrate a lezione: 14-42, 47-48

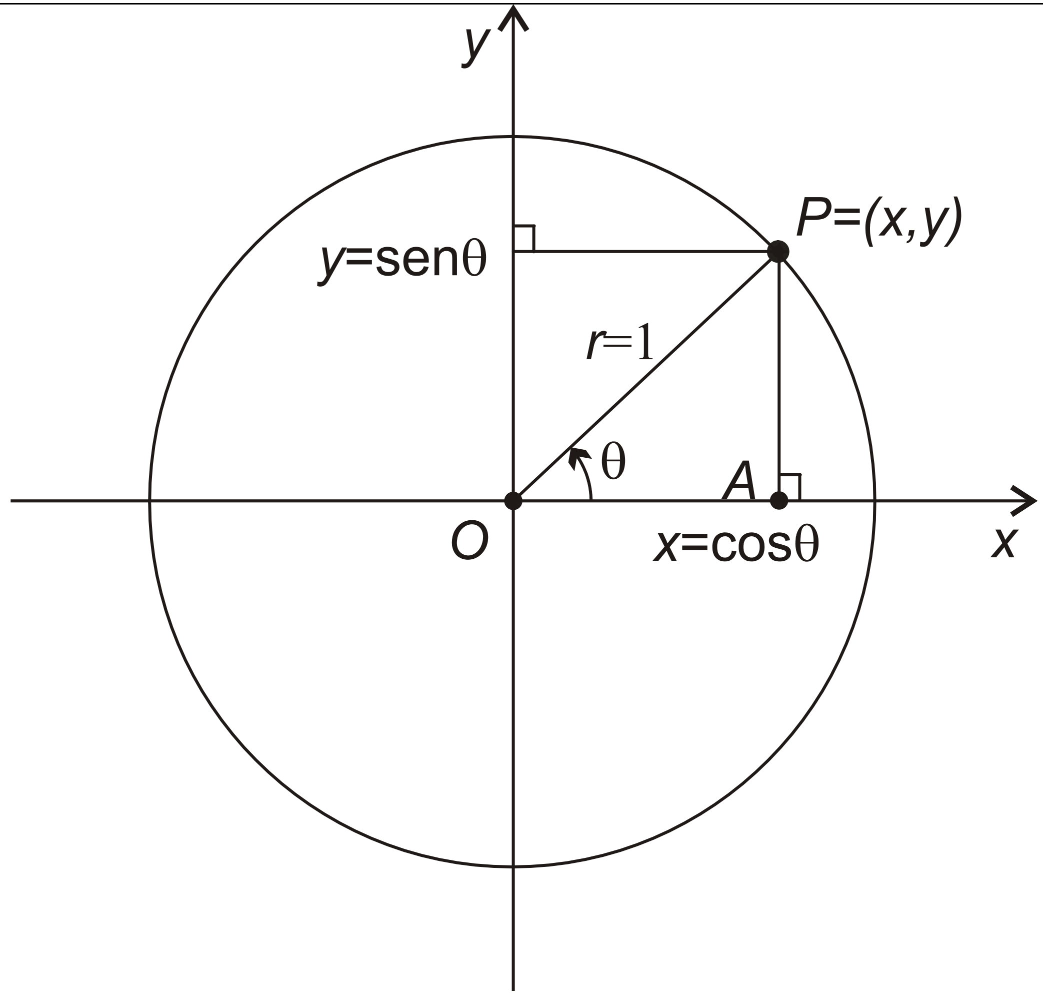
Da conoscere comunque: 4-13, 43-45

Definizione delle funzioni trigonometriche seno e coseno

Consideriamo una coppia di assi cartesiani ortogonali O,x,y , una circonferenza unitaria avente centro in O e un punto P che si trova sulla circonferenza.

Il segmento $\overrightarrow{OP}$ forma un angolo antiorario con il semiasse positivo delle x.

Il punto P ha coordinate x,y .



[definizione_funzioni_seno_coseno.cdr]

[definizione_funzioni_seno_coseno.wmf]

Definizione delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 2

Per definizione si ha

cos : x

sin : y

Tale definizione spiega la periodicità delle funzioni trigonometriche

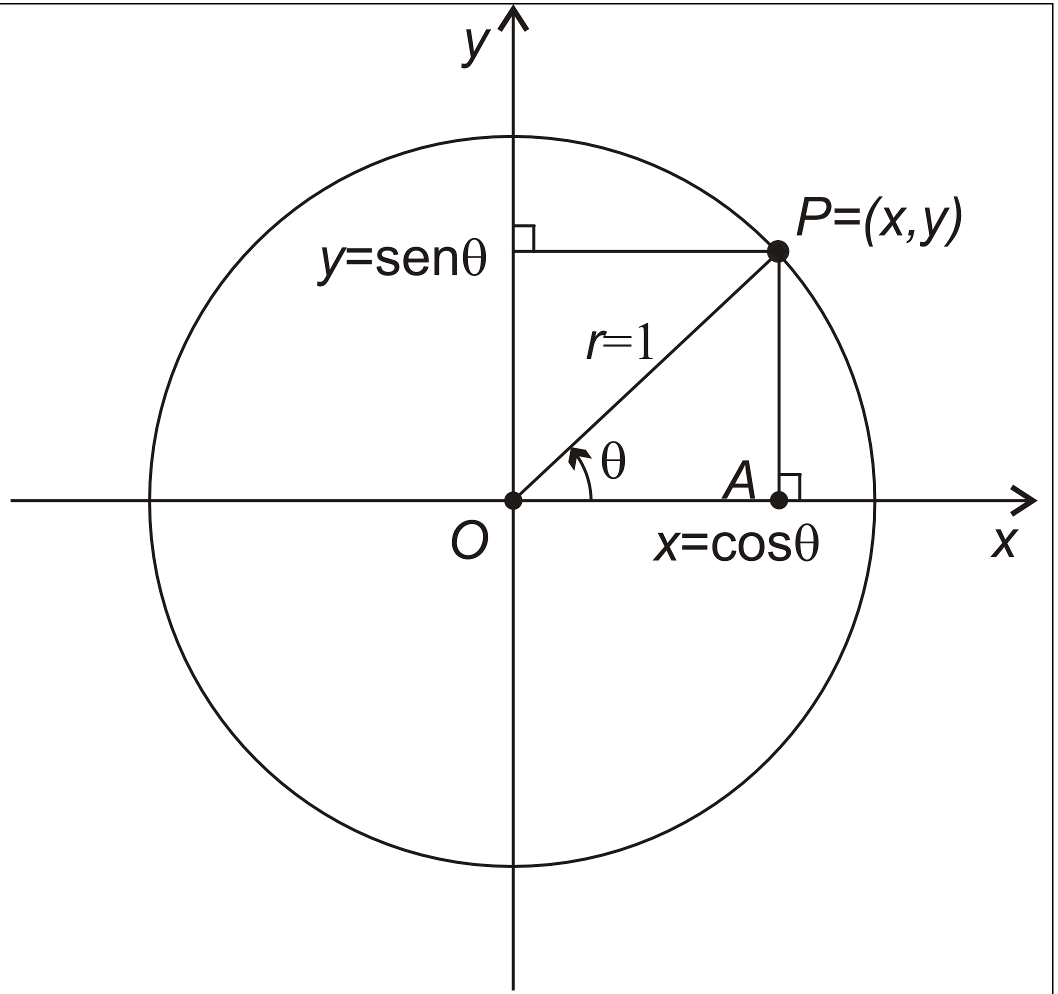
cos 2n cos n $\mathbb{Z}$

sin 2n sin

E anche il fatto che valgano i limiti

1 cos 1

1 sin 1



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 1

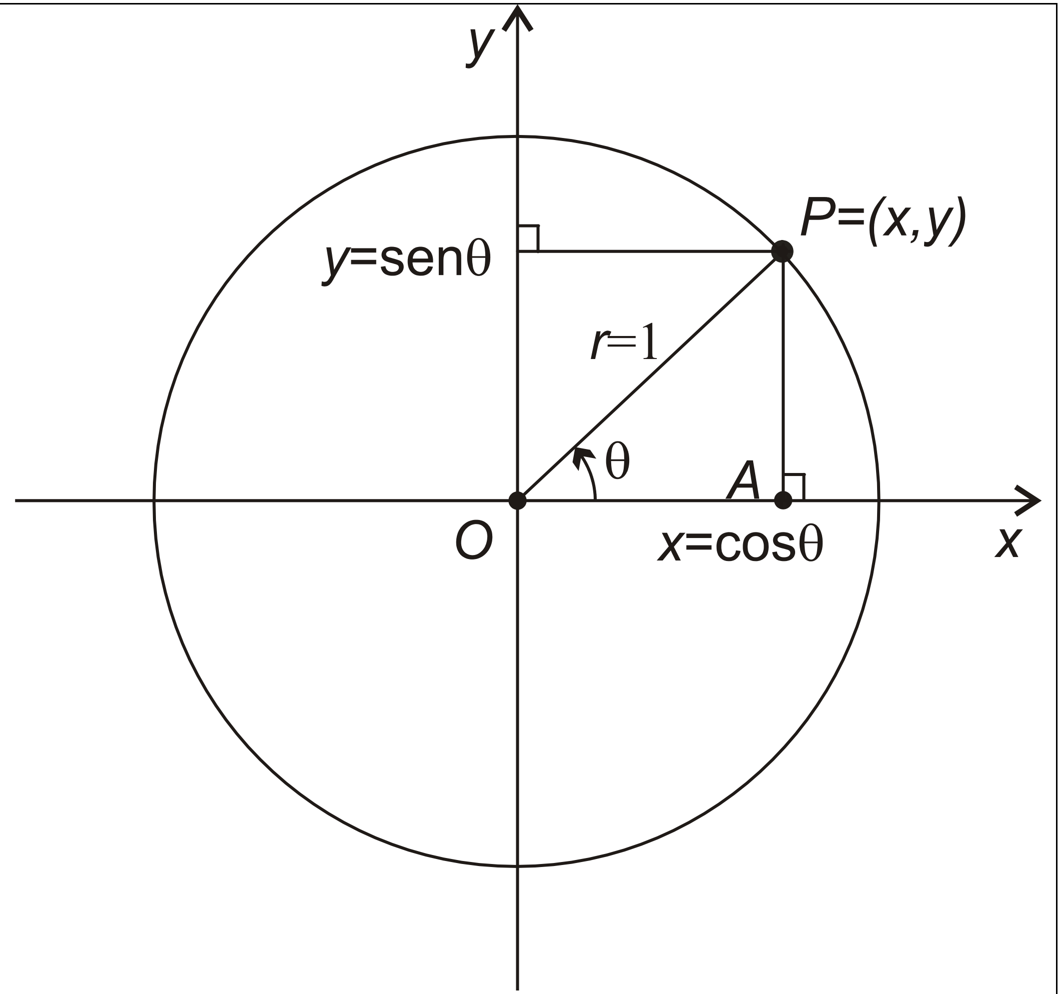
L'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo O,P,A consente di dimostrare la nota relazione

$$\sin^2 \qquad \cos^2 \qquad 1$$

Altre proprietà che si possono desumere dal disegno

$$\cos(\quad) \quad \cos(\ )$$

$$\sin(\quad) \quad \sin(\ )$$



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 2

Altre proprietà

cos(2) cos( )

sin(2) sin( )

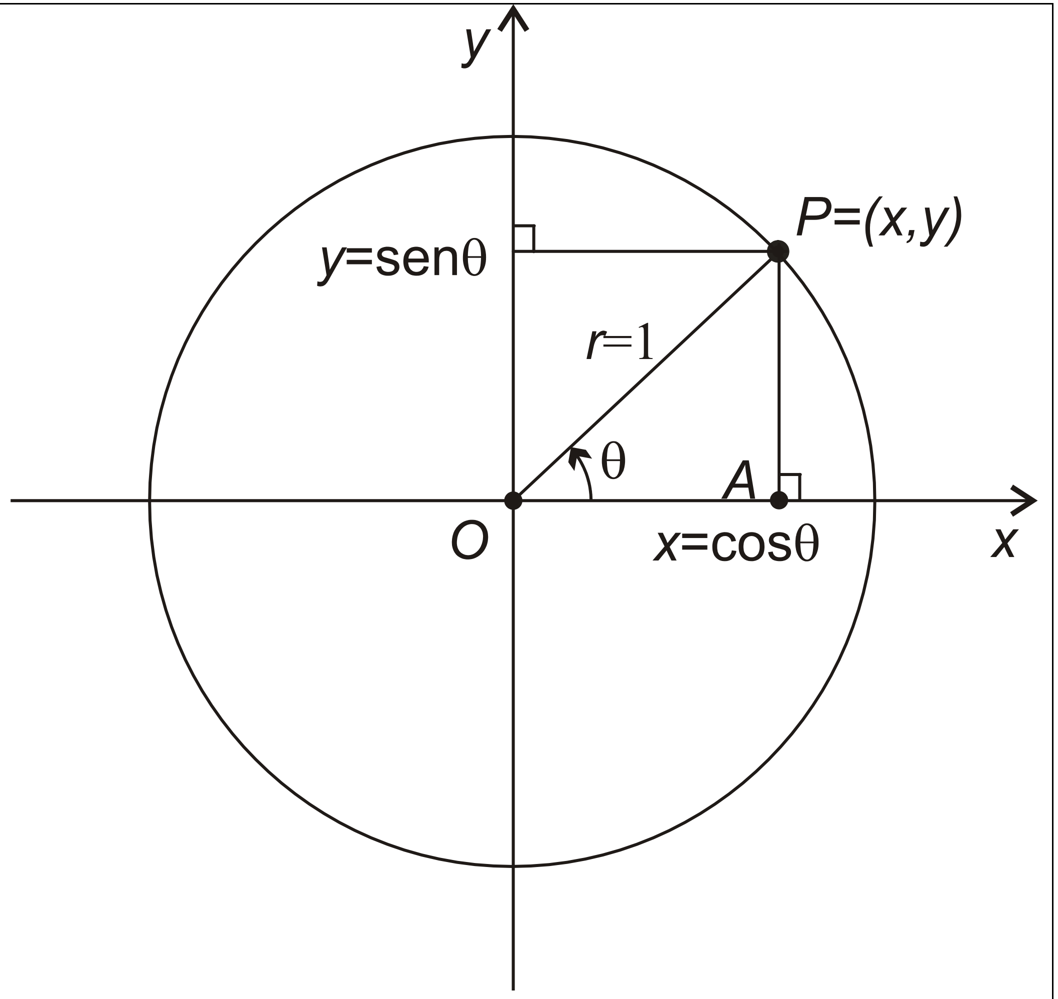
cos( ) cos( )

sin( ) sin( )

cos( ) cos( )

sin( ) sin( )

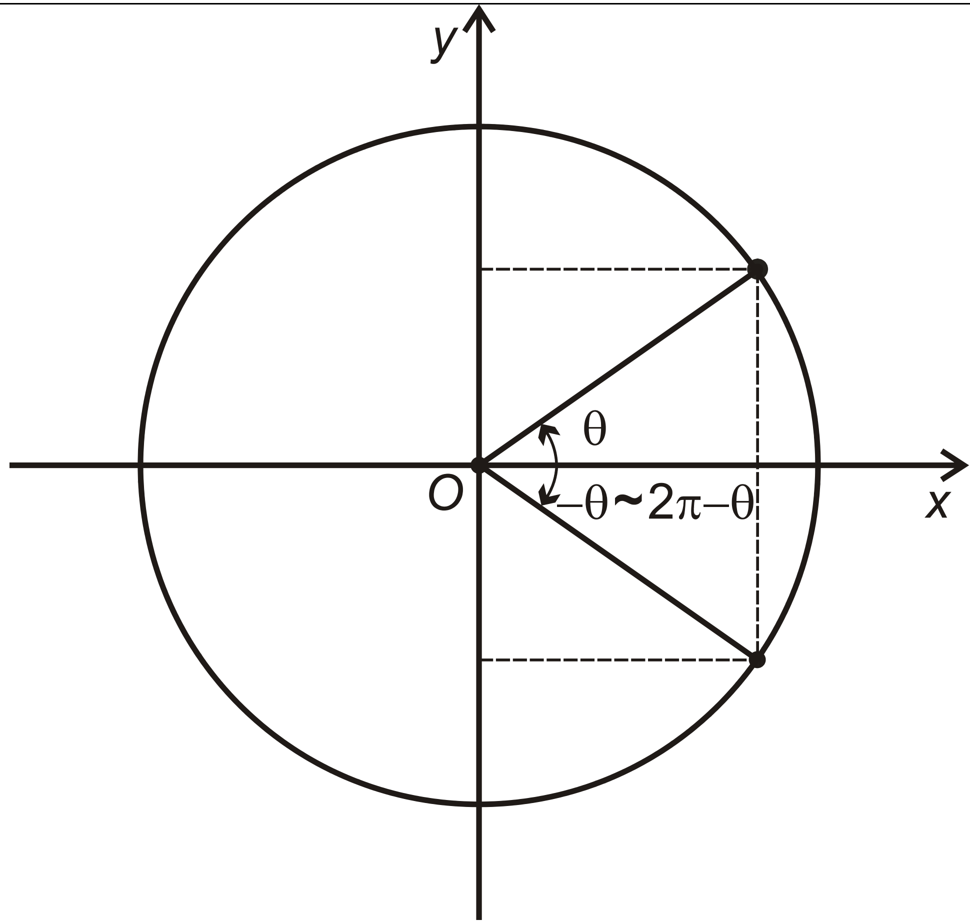
Vengono illustrate in seguito.



Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 3

cos(2   )   cos( )

sin(2   )   sin( )



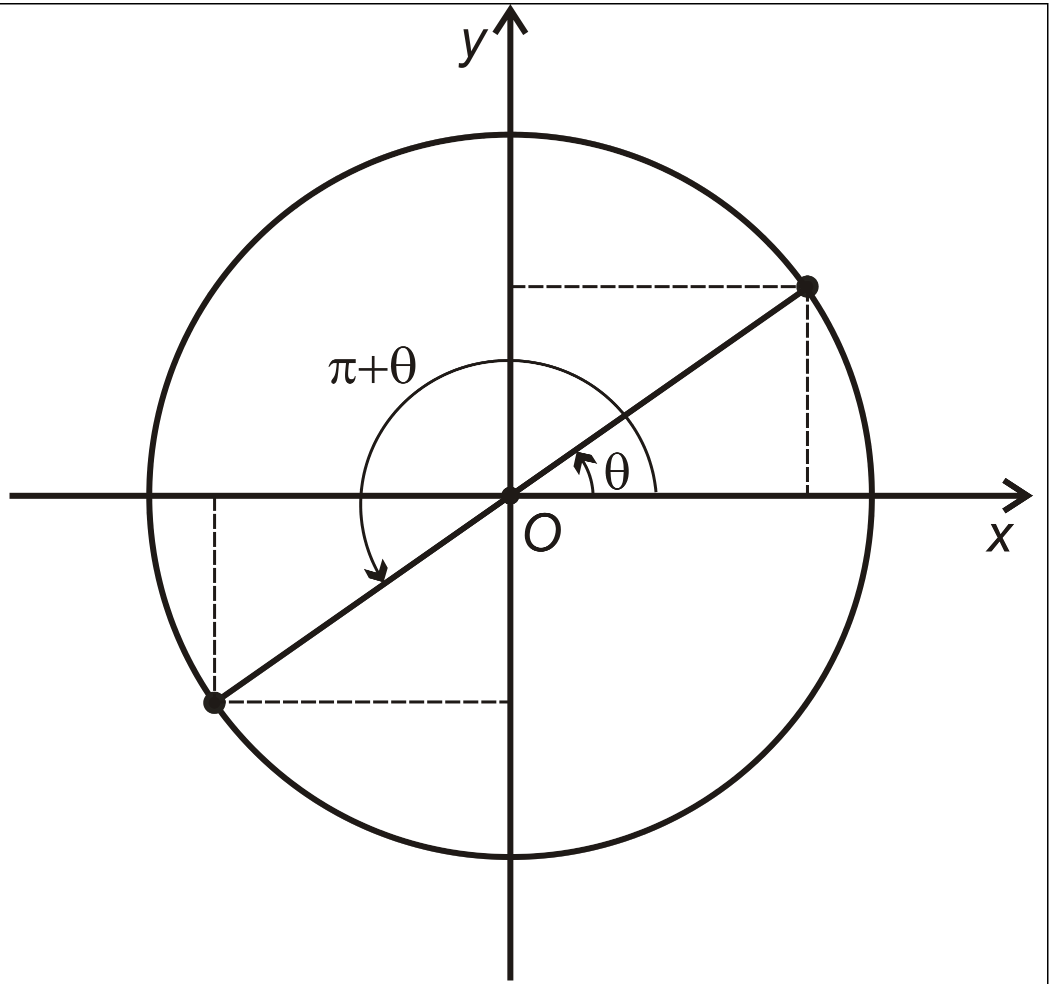
[seno_coseno_teta_2pi_meno_teta.cdr]

[seno_coseno_teta_2pi_meno_teta.wmf]

Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 4

cos(   )   cos( )

sin(   )   sin( )

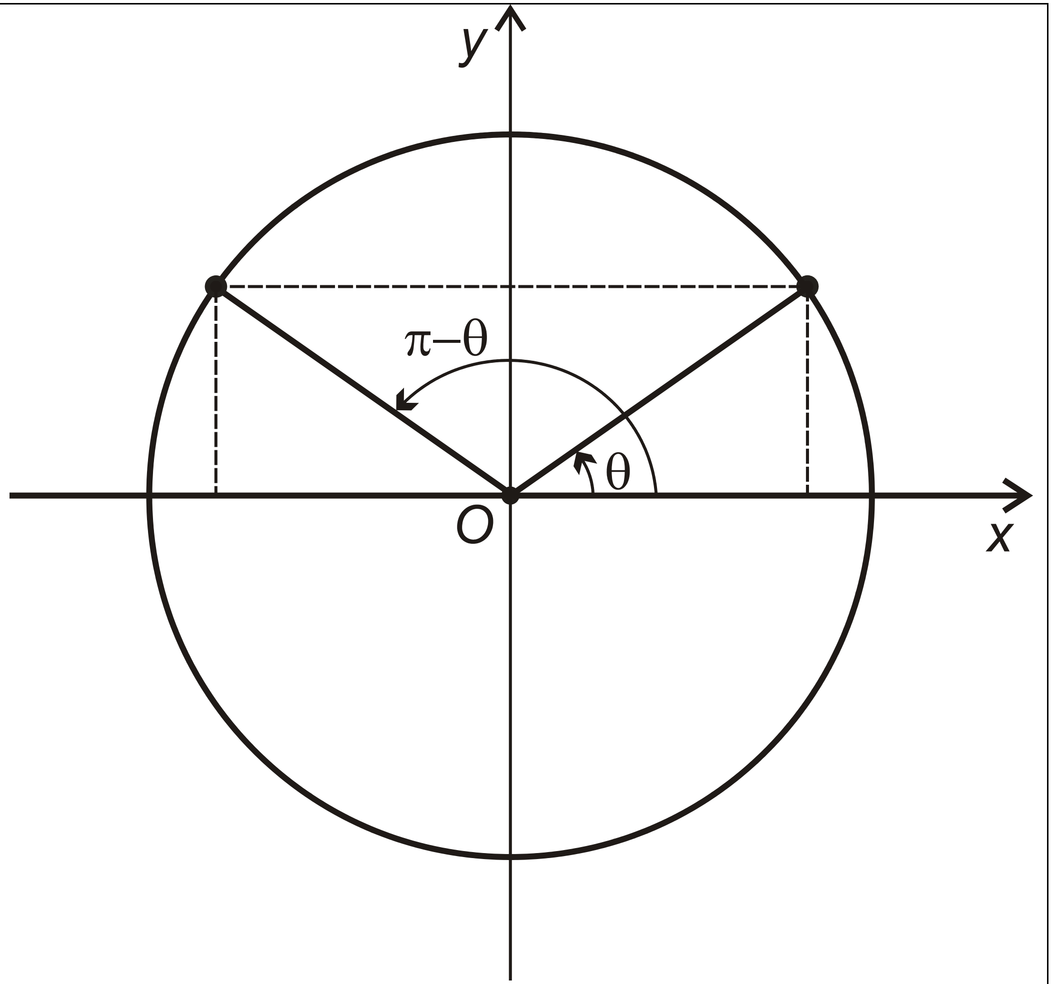


[seno_coseno_teta_pi_piu_teta.cdr; seno_coseno_teta_pi_piu_teta.wmf]

Proprietà delle funzioni trigonometriche seno e coseno - 5

cos(   )   cos( )

sin(   )   sin( )



[seno_coseno_teta_e_pi_meno_teta.cdr]

[seno_coseno_teta_e_pi_meno_teta.wmf]

Casi notevoli per le funzioni seno e coseno

$\cos(\;/6)\quad \sqrt{3}/2$

$\sin(\;/6)\quad 1/2$

$\cos(\;/4)\quad \sqrt{2}/2$

$\sin(\;/4)\quad \sqrt{2}/2$

$\cos(\;/6)\quad 1/2$

$\sin(\;/6)\quad \sqrt{3}/2$

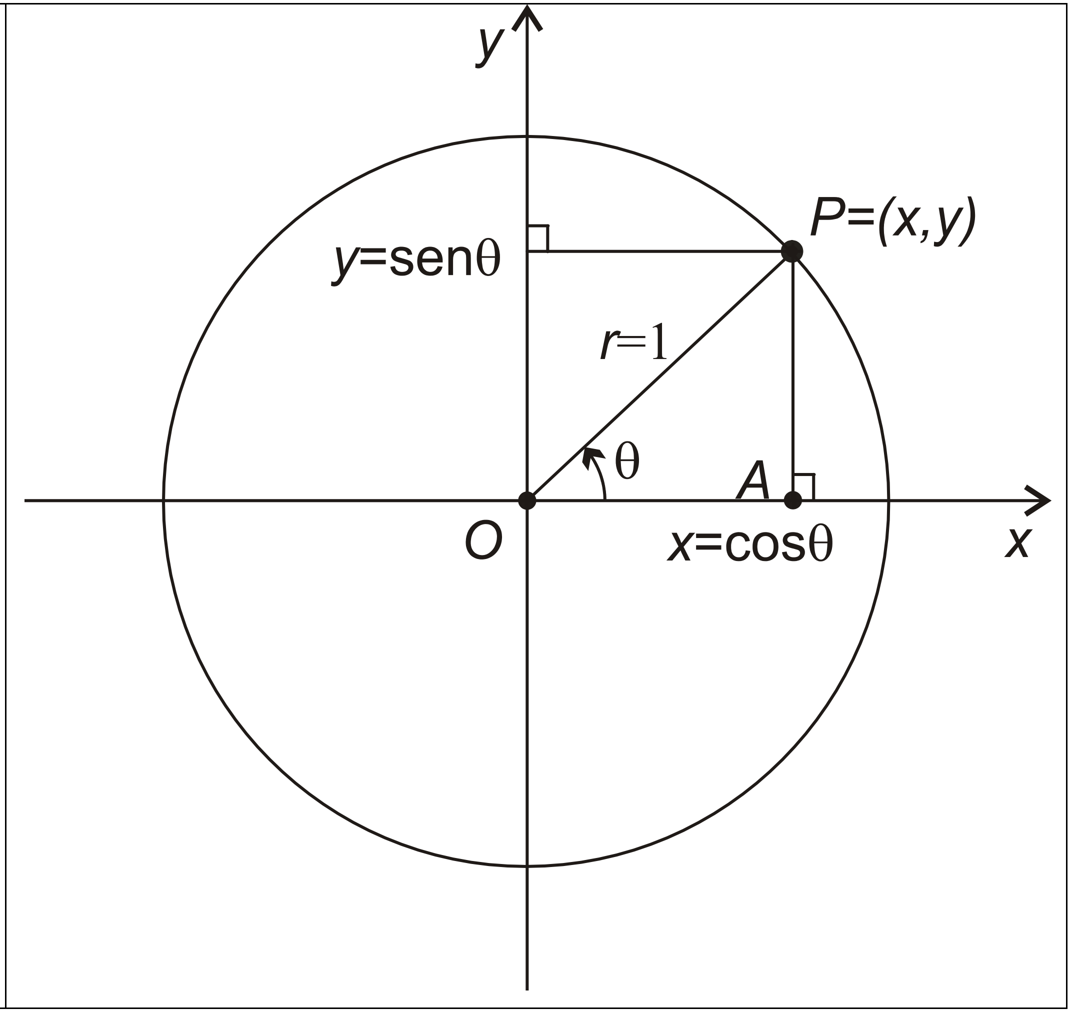
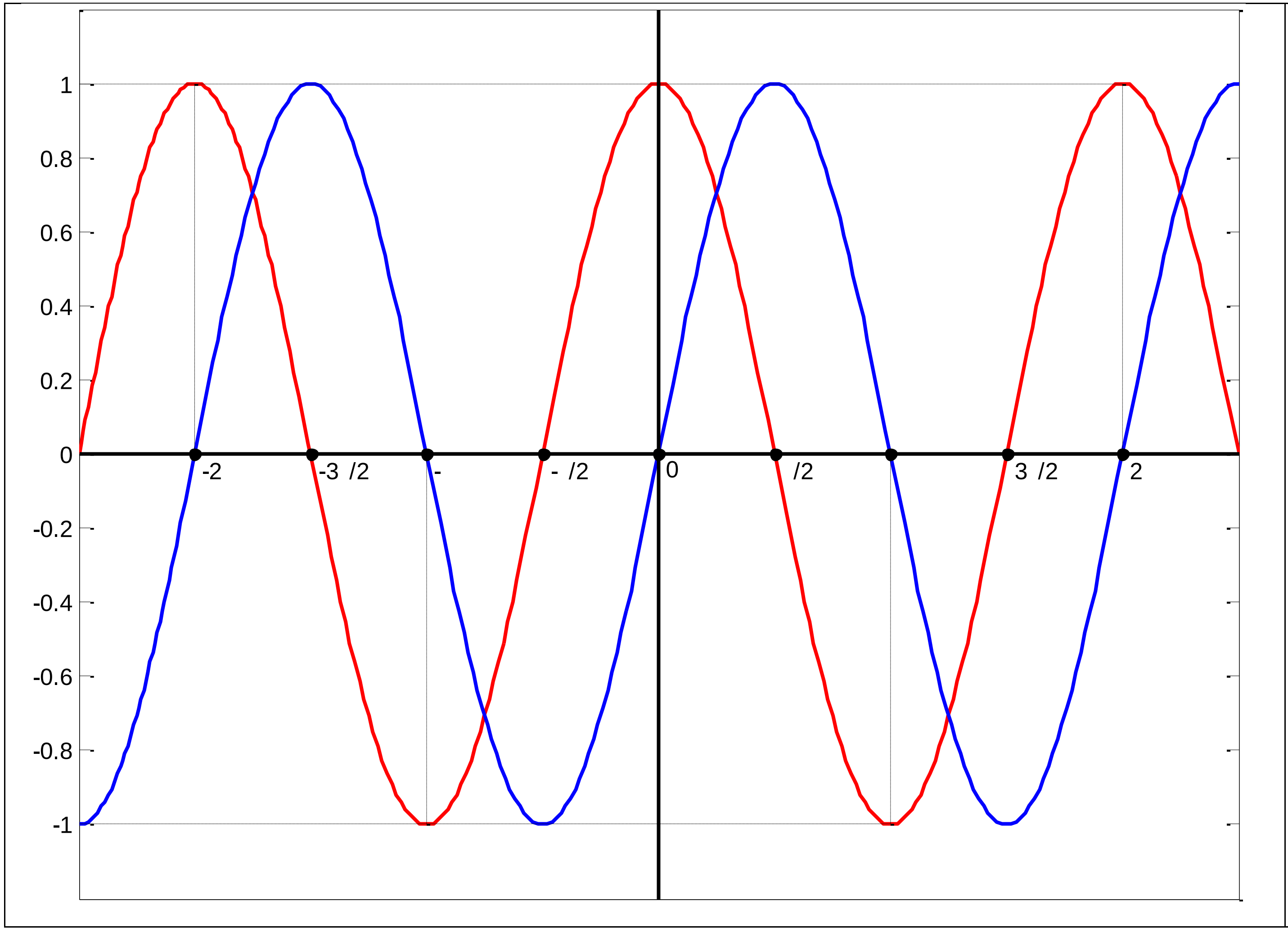


Grafico di seno e coseno

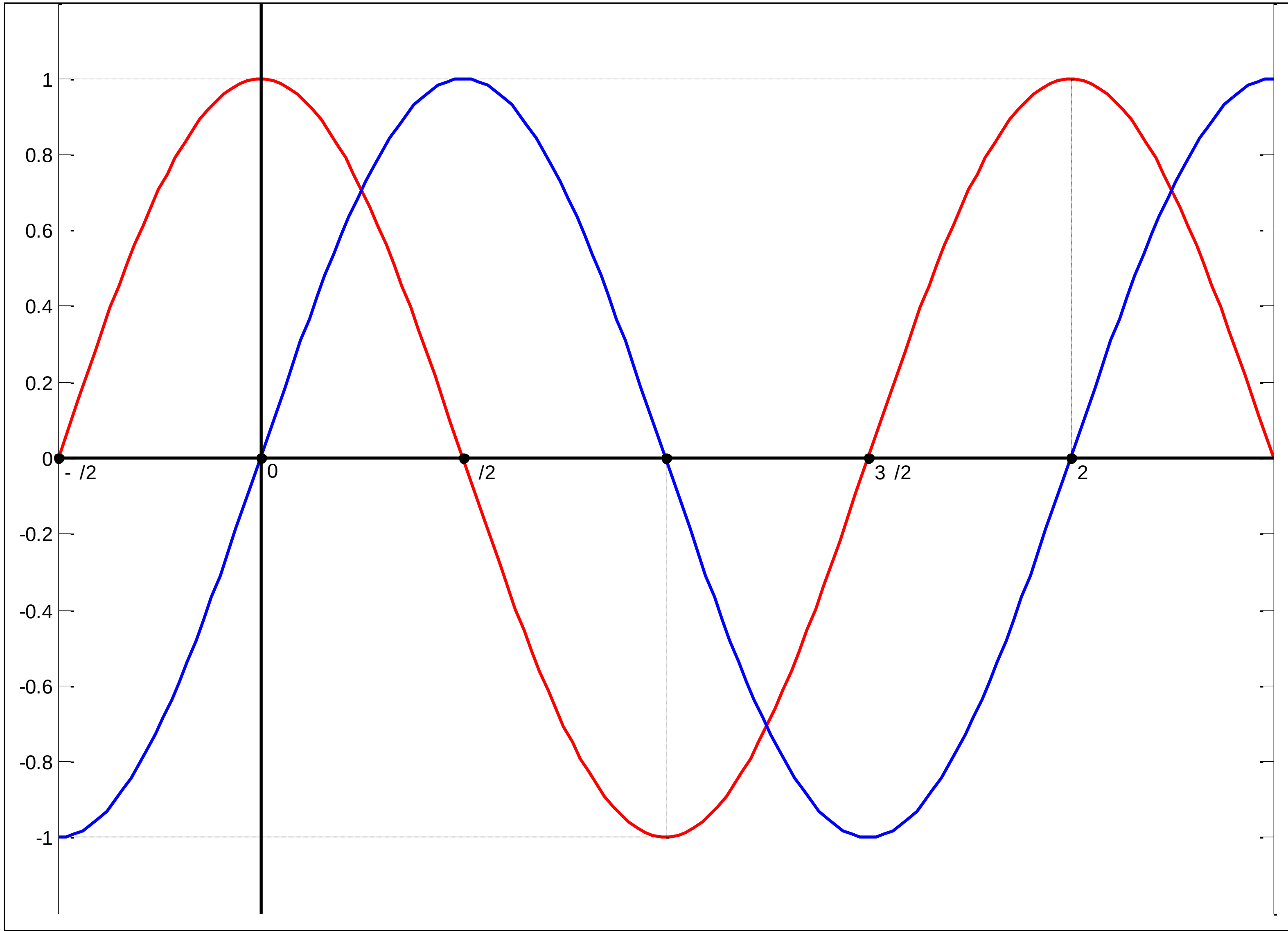


Blu - sin

Rosso - cos

[grafico_seno_coseno_4pi[m, emf]]

Grafico di seno e coseno - 2



Blu - sin

Rosso - cos

[grafico_seno_coseno_2pi.m; grafico_seno_coseno_2pi.emf]

Inversione delle funzioni

Data una funzione

$$f : I \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$$

indichiamo con $f(I)$ il suo codominio, cioè l'insieme dei valori di $\mathbb{R}$ che sono immagine di qualche punto $x \quad I$.

Dato $k \quad \mathbb{R}$, ci possiamo chiedere se esista e sia unico il punto

$$x_0 \quad I \quad \text{tc} \quad f(x_0) \quad k$$

Per l'esistenza, deve valere evidentemente

$$k \quad f(I)$$

L'unicità dipende dalla funzione considerata. Se

$$k \quad f(I) \qquad\quad !x_0$$

si può dire che f è invertibile ed esiste

$$f^{\;1} : f(I) \quad \mathbb{R}$$

Seguono esempi.

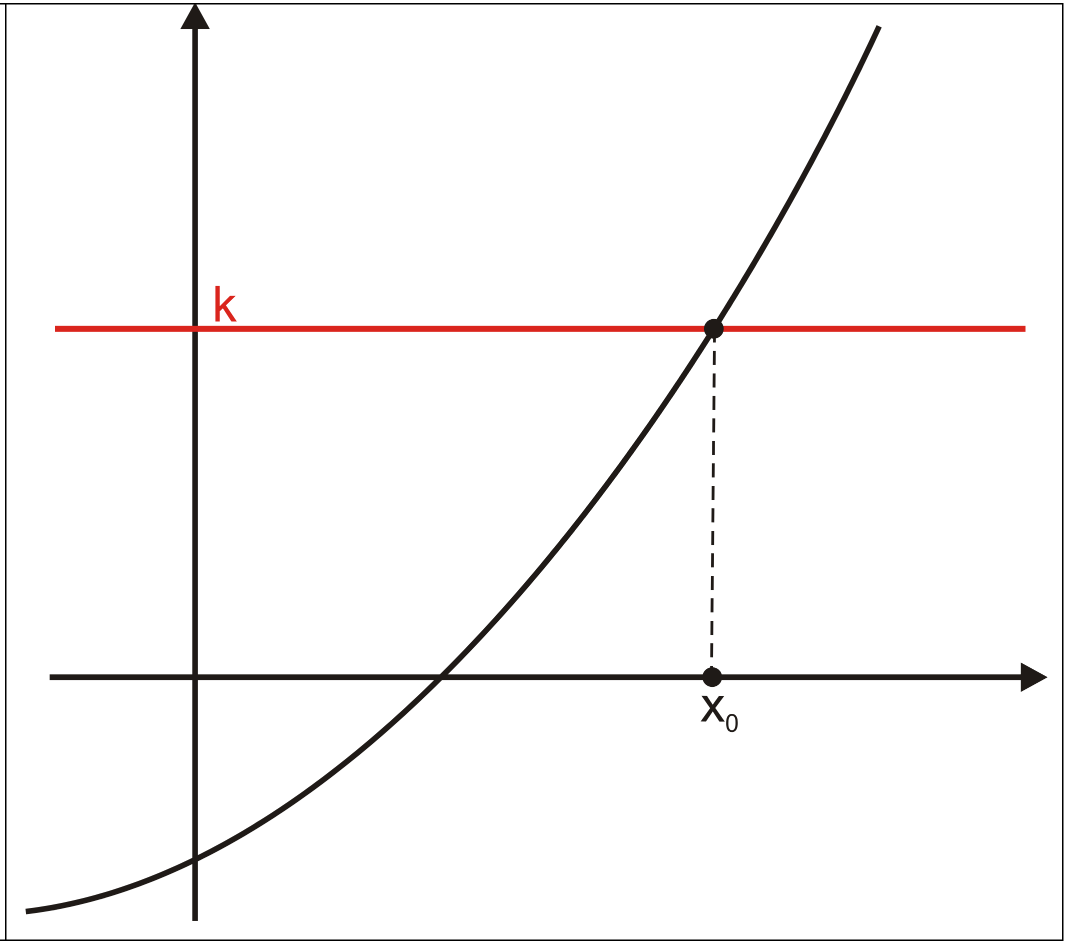
Inversione delle funzioni - 2

Per una funzione come quella indicata, si può dire che, per ogni k reale, x_0 esiste ed è unico.

$$k \quad \mathbb{R} \qquad !x_0$$

Dunque è definita

$$f^{\ 1} : \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$$



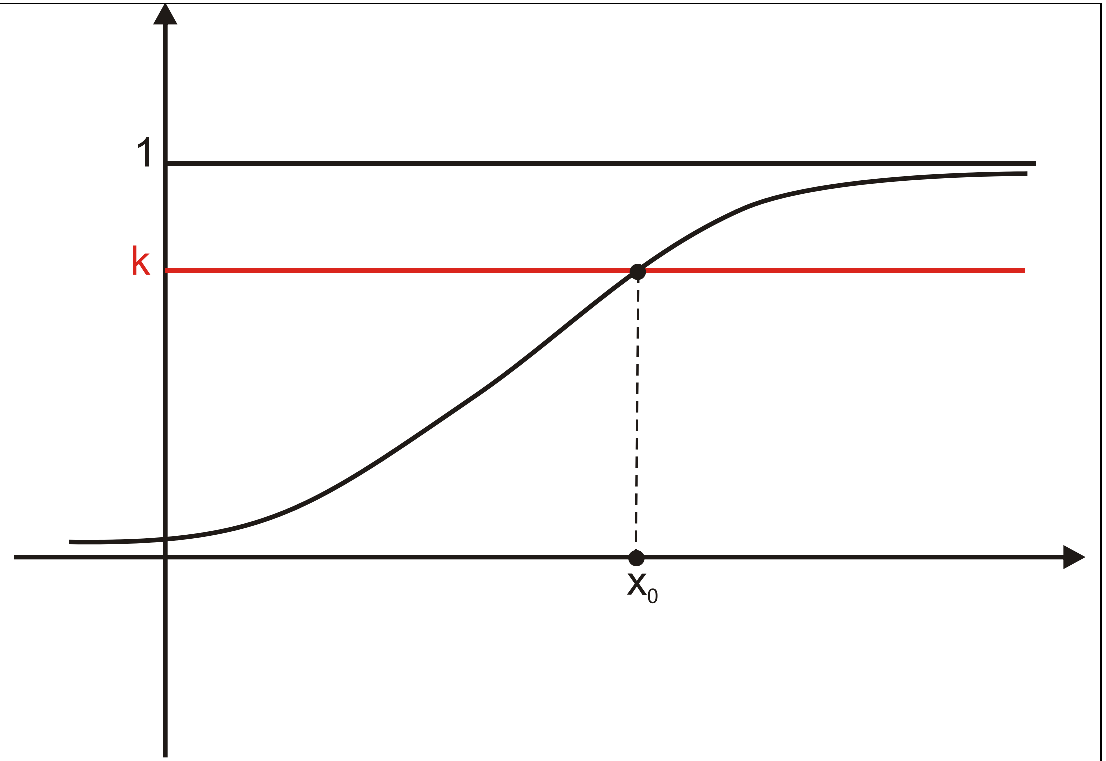
[funzione_inversa_1.cdr; funzione_inversa_1.wmf]

Inversione delle funzioni - 3

Per una funzione come quella indicata, si può dire che x_0 esiste ed è unico per i soli k [0,1]

Dunque è definita

$$f^{\ 1}:[0,1] \qquad \mathbb{R}$$



[funzione_inversa_2.cdr; funzione_inversa_2.wmf]

Inversione delle funzioni - 4

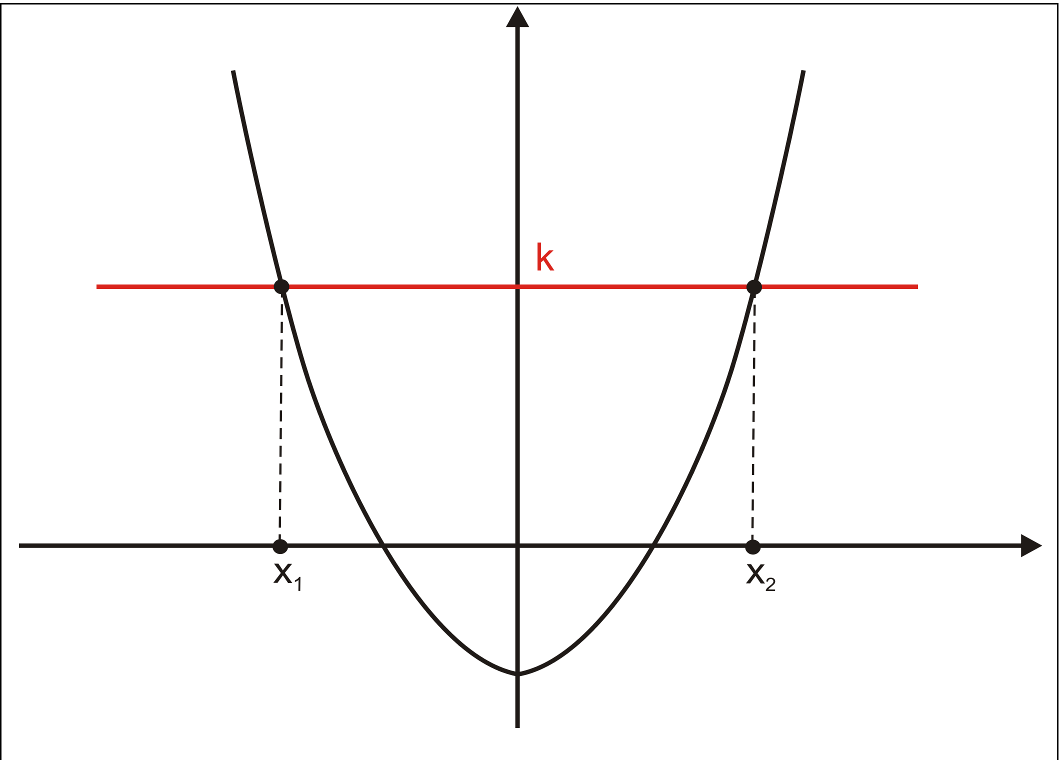
Per una funzione come quella indicata, x_0 non è unico, salvo che in un caso.

La funzione considerata può essere resa invertibile limitandone il dominio. Se si considera

$$f : [0, \quad [\quad \mathbb{R}$$

Allora x_0 è unico $\quad k$ ed esiste l'inversa

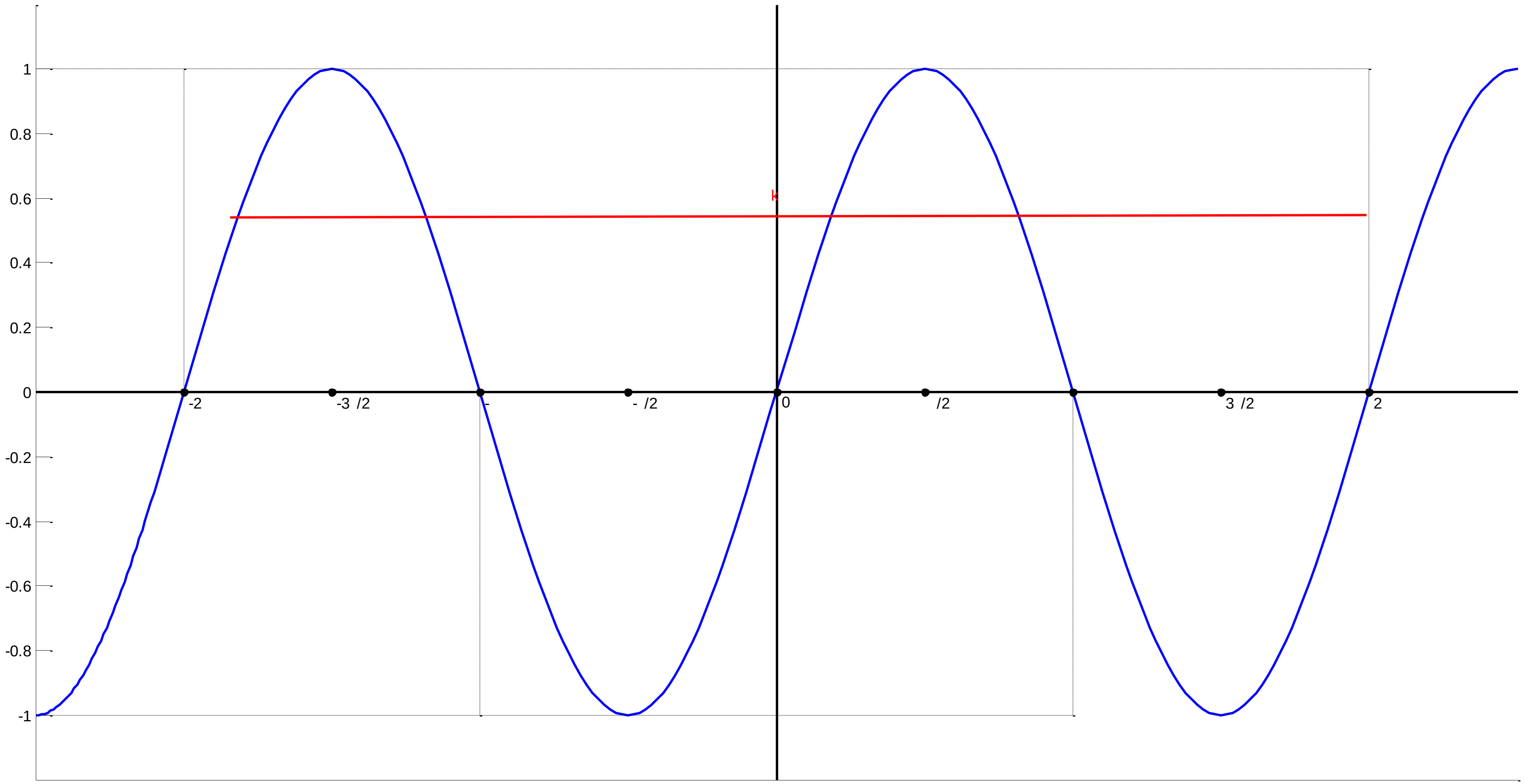
$$f^{\ 1} : f(I) \quad \mathbb{R}$$



[funzione_inversa_3.cdr; funzione_inversa_3.wmf]

Inversione di seno e coseno

Consideriamo a titolo di esempio la funzione seno: cose analoghe valgono per il coseno.



[inversione_seno[m, emf]]

Inversione di seno e coseno - 2

Evidentemente per ogni k nell'intervallo [1,1], vi sono infiniti x_0. La funzione diventa invertibile se ne restringiamo il dominio. Di norma si considera

$$\sin:[\quad /2,\ /2]\qquad \mathbb{R}$$

che è invertibile. La funzione inversa di sin è in generale indicata con arcsin; in sintesi

$$\arcsin:[\ \ 1,1]\qquad [\quad /2,\ /2]$$

Ciò significa che, qualunque sia il k su cui si calcola arcsin, il valore restituito sta nell'intervallo $[\quad /2,\ /2]$.

Cautele necessarie nell'inversione delle funzioni trigonometriche

La periodicità delle funzioni trigonometriche e la conseguente restrizione del loro dominio hanno effetti di cui non si è sempre consapevoli.

Facciamo un esempio ragionando in sessagesimali

$$225$$

$$k \quad \sin(\quad) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$_2 \quad \arcsin(k) \qquad 45$$

Attenzione: non c'è errore perché entrambi gli angoli, e $_2$, hanno lo stesso seno. Ma la composizione in successione della funzione seno e della sua inversa non restituisce l'angolo originario

$$\arcsin(\sin(\quad))$$

Definizione della tangente

Per definizione, la tangente di un angolo è

$$\tan \quad \frac{\sin}{\cos}$$

E' definita anche la cotangente

$$\text{ctan} \quad \frac{\cos}{\sin}$$

Rappresentazione delle tangente con il cerchio goniometrico

Per definizione si ha

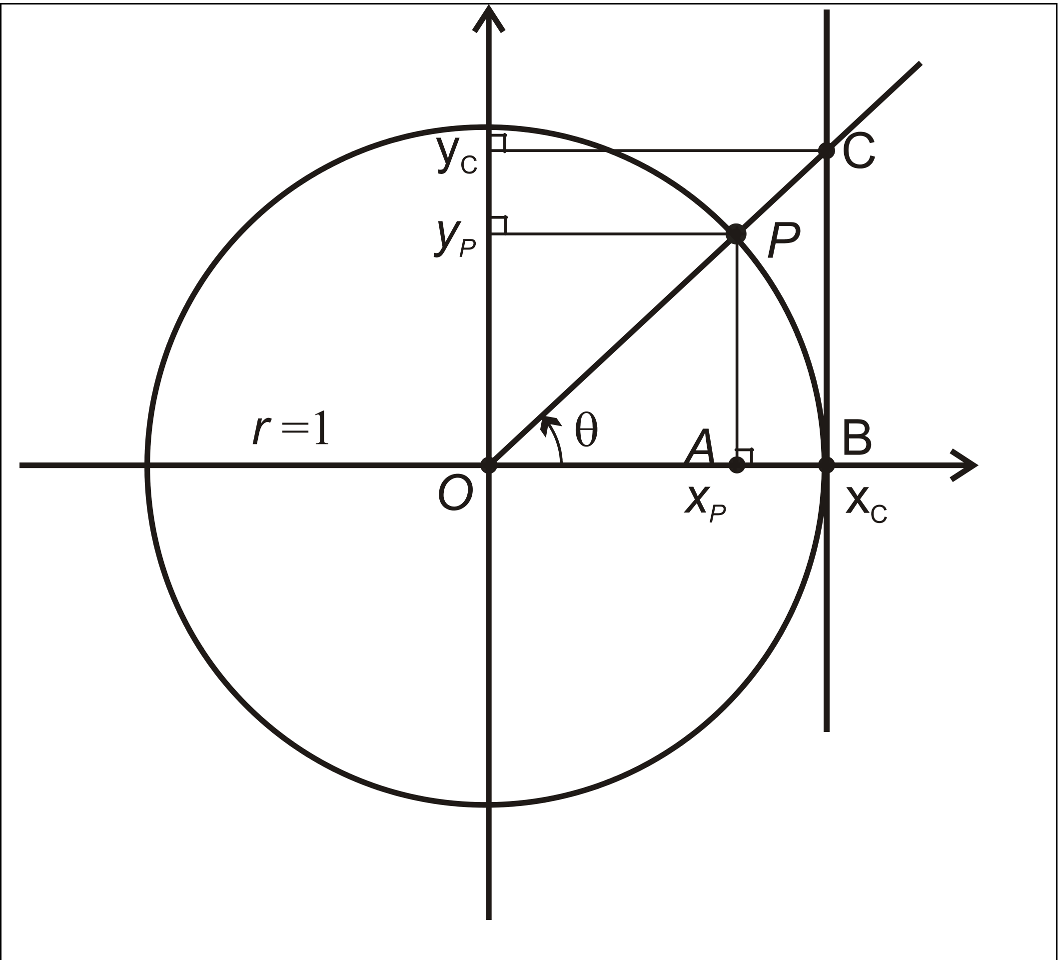
$$\tan \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$$

Per la similitudine dei triangoli OAP e OBC si ha

$$\tan \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}}$$

Essendo $\overline{OB}$ 1 si può concludere

$$\tan \qquad \overline{BC}$$



Ragionando sul disegno si capisce la periodicità della tangente, il segno che la funzione ha nei vari quadranti, il comportamento asintotico.

[definizione_funzione_tangente: cdr, wmf]

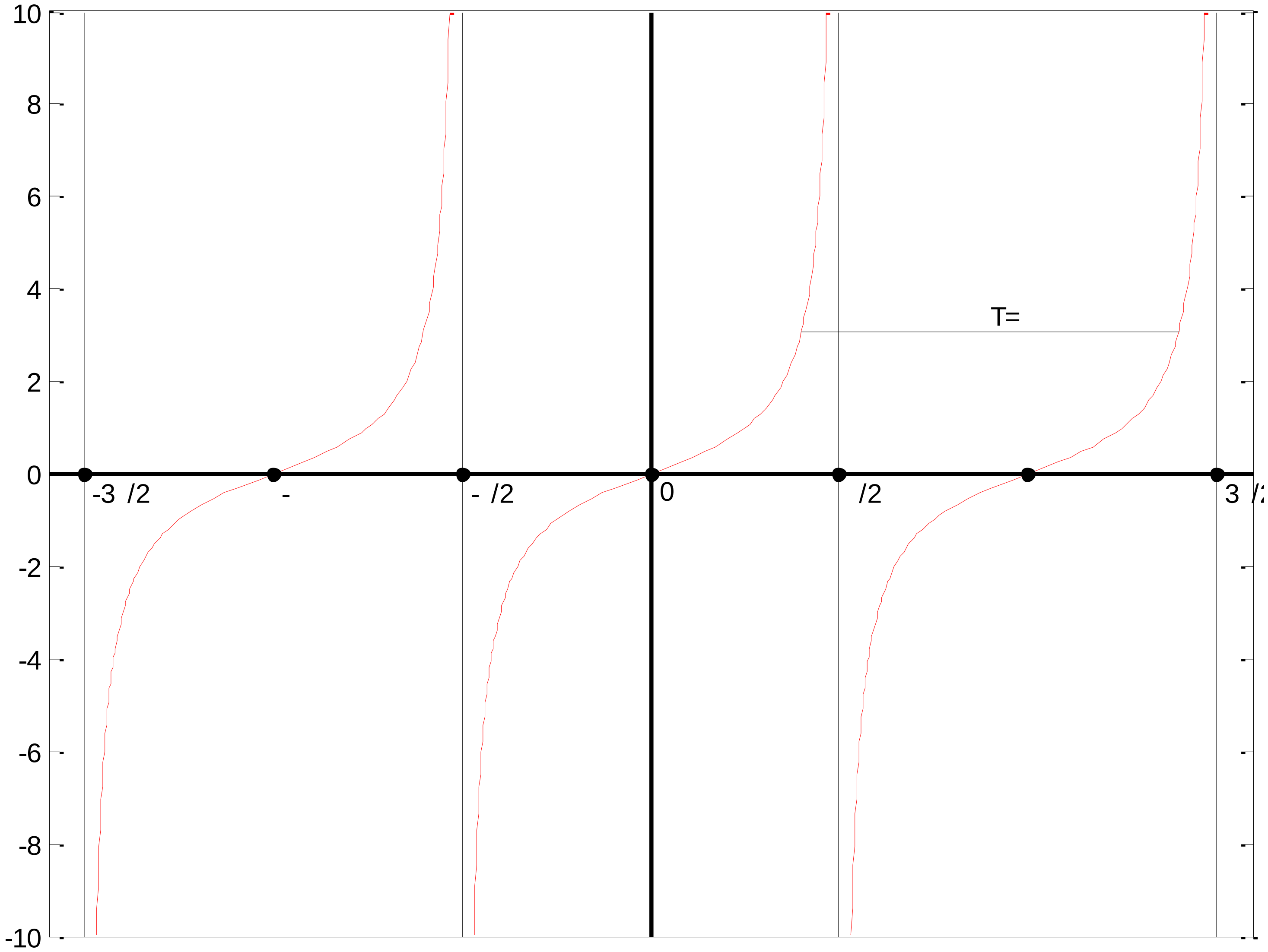
Proprietà della tangente

Ricordando le proprietà di simmetria di seno e coseno si ricavano quelle della tangente

tan(2) tan( )	cos(2) cos( ) sin(2) sin( )
tan( ) tan( )	cos( ) cos( ) sin( ) sin( )
tan( ) tan( )	cos( ) cos( ) sin( ) sin( )

La più importante à la seconda che evidenzia come la periodicità della tangente sia

Grafico della tangente



Da notare gli asintoti.

Inversione della funzione tangente

Se si restringe il dominio nel modo seguente

$\tan : [\quad /2, \quad /2] \quad \mathbb{R}$

la funzione può essere invertita. Anche in questo caso bisogna fare attenzione alla non chiusura dell'andata e ritorno, da intendersi

$\arctan(\tan(\quad))$

Esempi sulla inversione della tangente

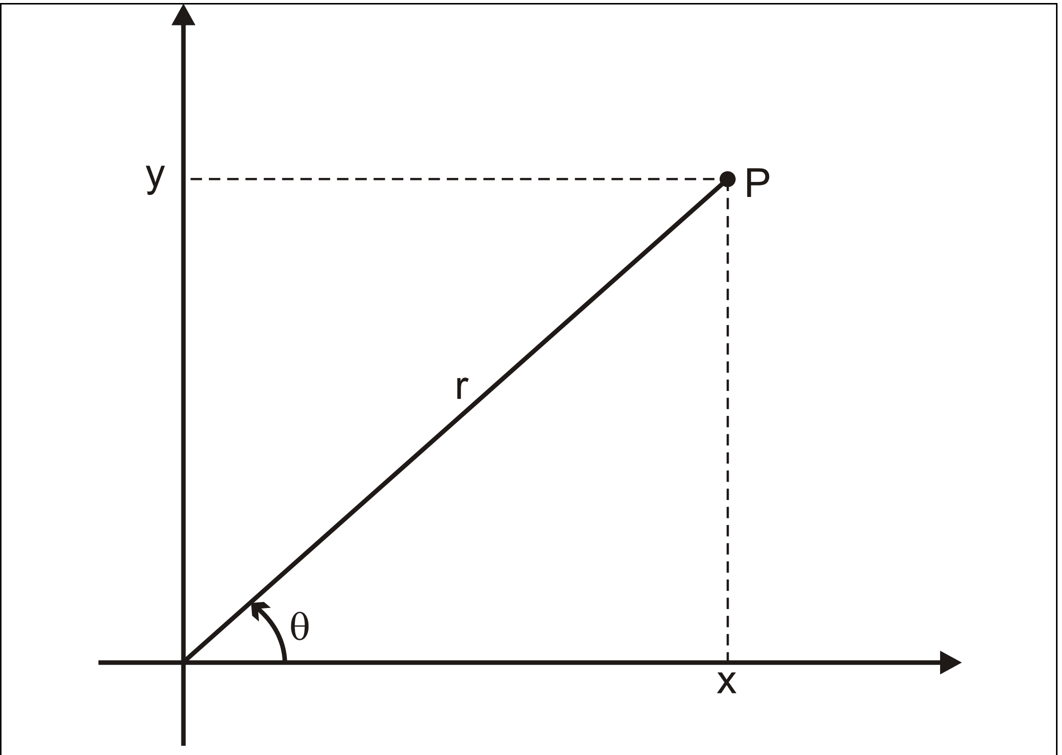
Angoli in sessagesimali

$$
\begin{array}{lllllllll}
{}_1 & 45 & t_1 & \tan({}_1) & 1 & {}_1 & \arctan(t_1) & 45 & {}_1 \\
{}_2 & 135 & t_2 & \tan({}_2) & 1 & {}_2 & \arctan(t_2) & 45 & {}_2 \\
{}_3 & 225 & t_3 & \tan({}_3) & 1 & {}_3 & \arctan(t_3) & 45 & {}_3 \\
{}_4 & 315 & t_4 & \tan({}_4) & 1 & {}_4 & \arctan(t_4) & 45 & {}_4
\end{array}
$$

In sintesi, non è vero in generale che

$$\arctan(\tan(\quad))$$

Coordinate cartesiane e polari

Consideriamo un punto *P* del piano e le sue coordinate cartesiane (x, y). La posizione di *P* può essere anche caratterizzata in termini di coordinate polari r, , dove r indica la distanza dall'origine, mentre è l'angolo antiorario formato dal segmento $\overline{OP}$ con il semiasse positivo delle ascisse.	

L'angolo appartiene all'intervallo [0,2] oppure, in altre formulazioni, all'intervallo [,]. è detto *anomalia*.

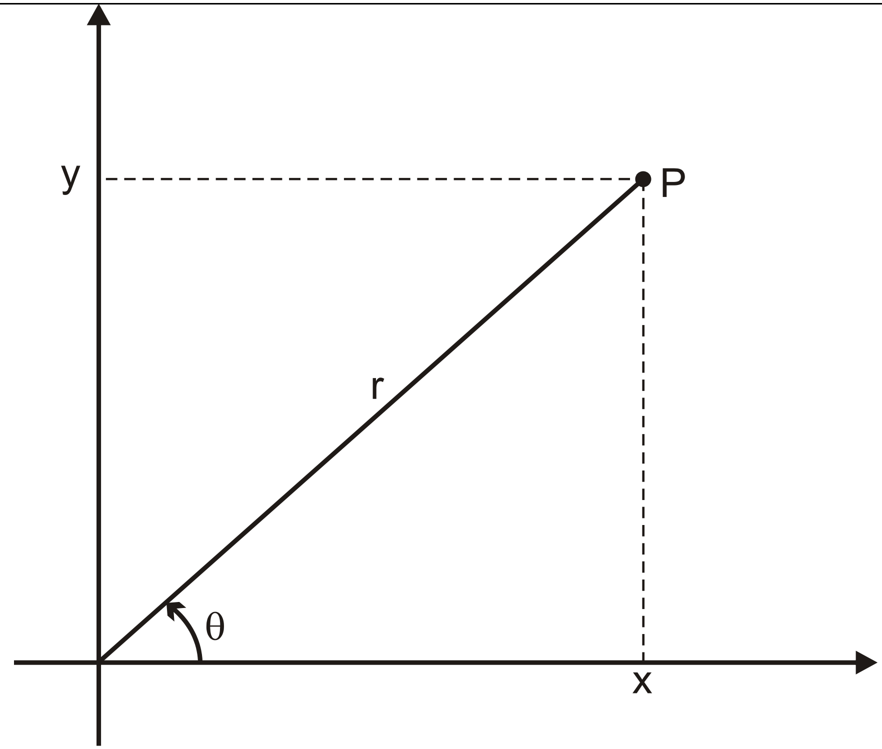
Come è possibile calcolare le cartesiane dalle polari e viceversa?

[definizione_coordinate_polari.cdr; definizione_coordinate_polari.wmf]

Da polari a cartesiane

Dal disegno, facilmente

$$\begin{aligned} x &\quad r\cos \\ y &\quad r\sin \end{aligned} \qquad (1)$$



Da cartesiane a polari – 1

Partiamo dalle precedenti relazioni

$$\begin{matrix} x & r\cos \\ y & r\sin \end{matrix} \qquad (2)$$

Quadrando e sommando si ottiene

$$\begin{aligned} x^2 \quad y^2 \quad & r^2\cos^2 \qquad r^2\sin^2 \qquad r^2 \;\; \cos^2 \qquad \sin^2 \\ & r^2 \end{aligned}$$

da cui

$$r \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \qquad (3)$$

Da cartesiane a polari – 2

Ripartiamo dalle

$$x \quad r\cos$$

$$y \quad r\sin$$

Dividendo membro a membro, la seconda per la prima (sotto la condizione $x \quad 0$), si ottiene

$$\frac{y}{x} \quad \frac{r\sin}{r\cos} \quad \tan \tag{4}$$

Da questa molti ricavano

$$\arctan\frac{y}{x}$$

ma ciò è scorretto.

Per precisione: l'angolo $\arctan\ y/x$ ha la stessa tangente di , ma in generale non coincide con . Il motivo è la solita non chiusura dell'applicazione consecutiva di arctan e tan, già esemplificata.

Da cartesiane a polari – 3

Facciamo ancora esempi, ricordando che la chiusura della funzione composta arctan(tan( )) dipende dai quadranti	P	x,y $r,$				$\arctan(\frac{y}{x})$	?	
	P_1	$1,1$ $\sqrt{2},45$	$_1$	45	$_1$	$\arctan(\frac{1}{1})$	45	$_1$
	P_2	$1,1$ $\sqrt{2},135$	$_2$	135	$_2$	$\arctan(\frac{1}{1})$	45	$_2$
	P_3	$1,\ 1$ $\sqrt{2},225$	$_3$	225	$_3$	$\arctan(\frac{1}{1})$	45	$_3$
	P_4	$1,\ 1$ $\sqrt{2},315$	$_4$	315	$_4$	$\arctan(\frac{1}{1})$	45	$_4$

Da cartesiane a polari – 4

Conclusioni: nei quadranti 2, 3 e 4 si ha

arctan(tan( ))

ma non è difficile trovare la relazione che lega e .

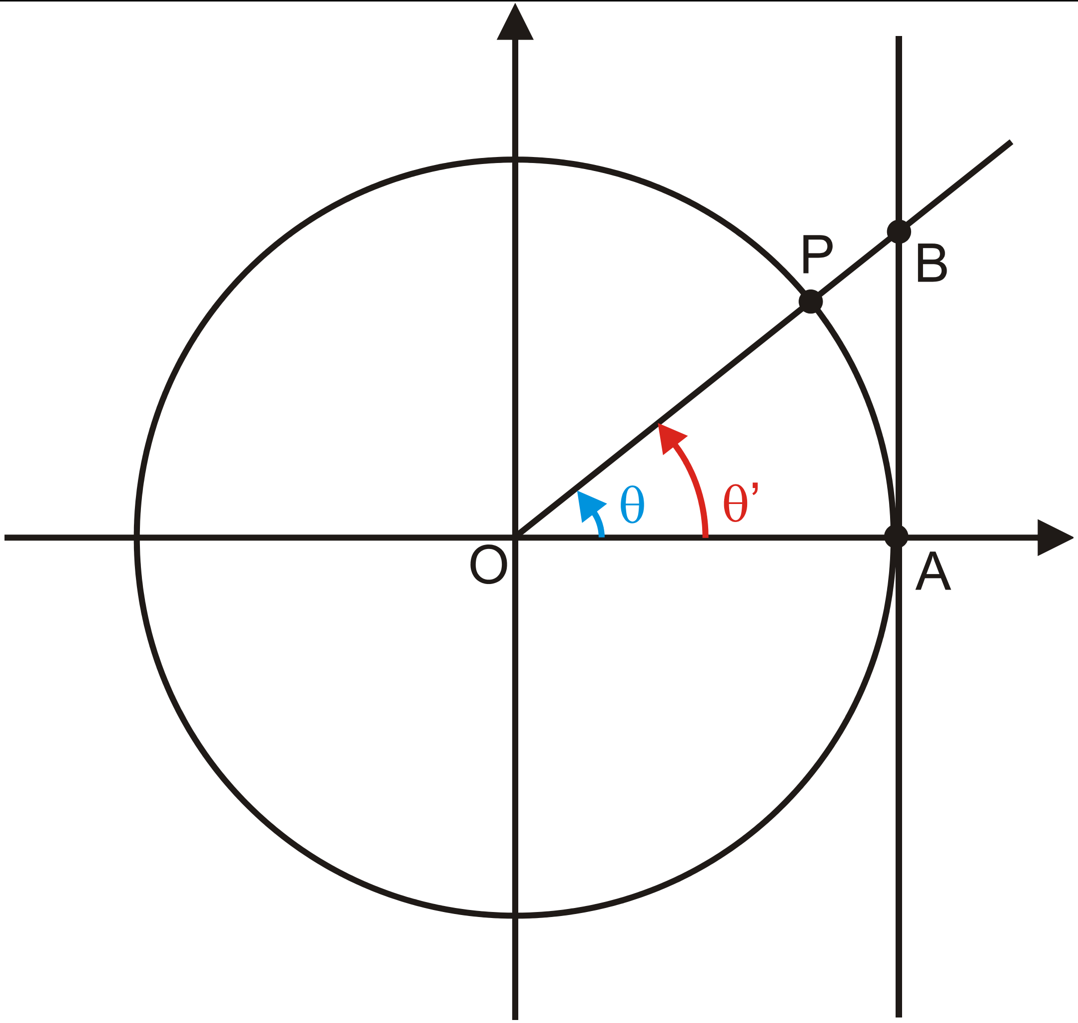
Analizziamo il risultato delle esemplificazioni in ogni singolo quadrante. Nelle esemplificazioni:

: anomalia del punto considerato

: risultato del calcolo di arctan$(\frac{y}{x})$

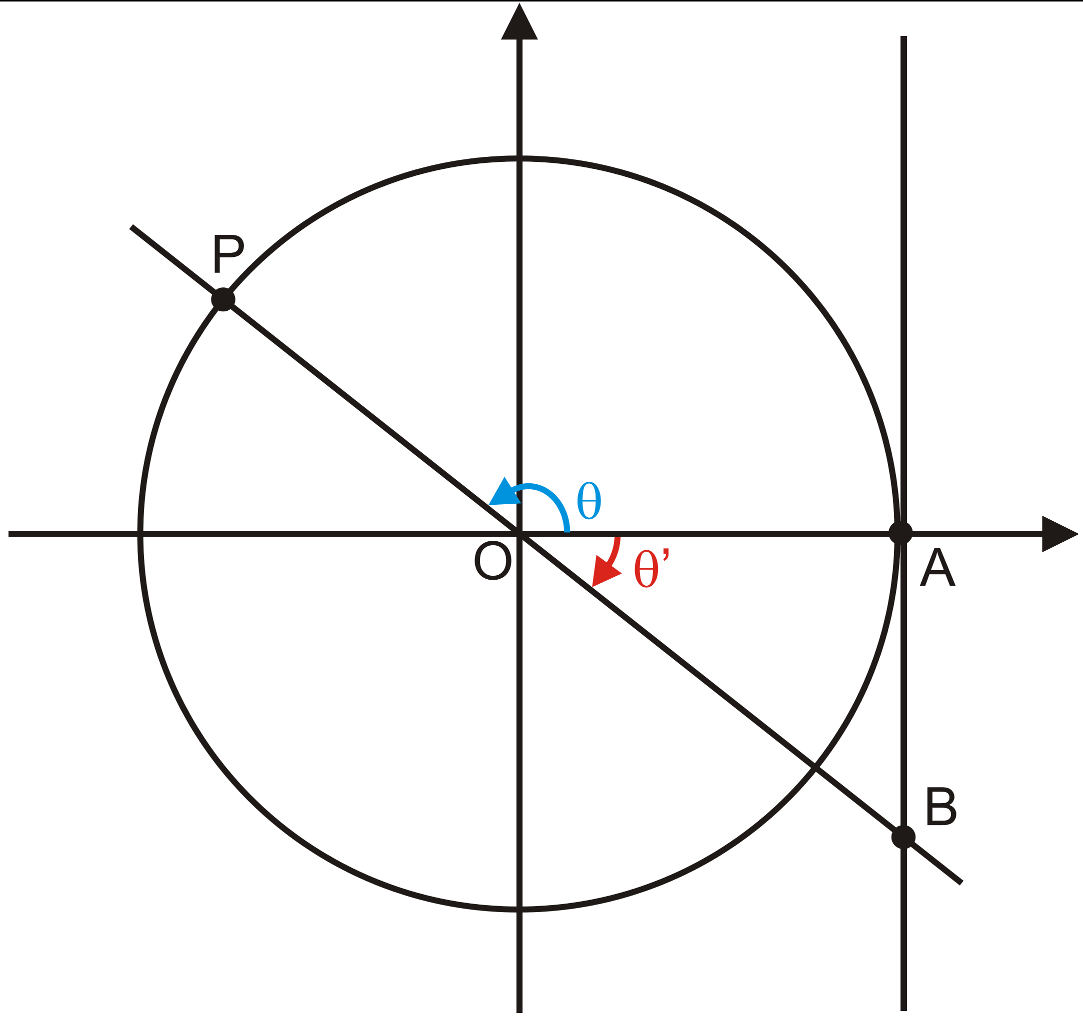
Da cartesiane a polari – 5

Nel primo quadrante



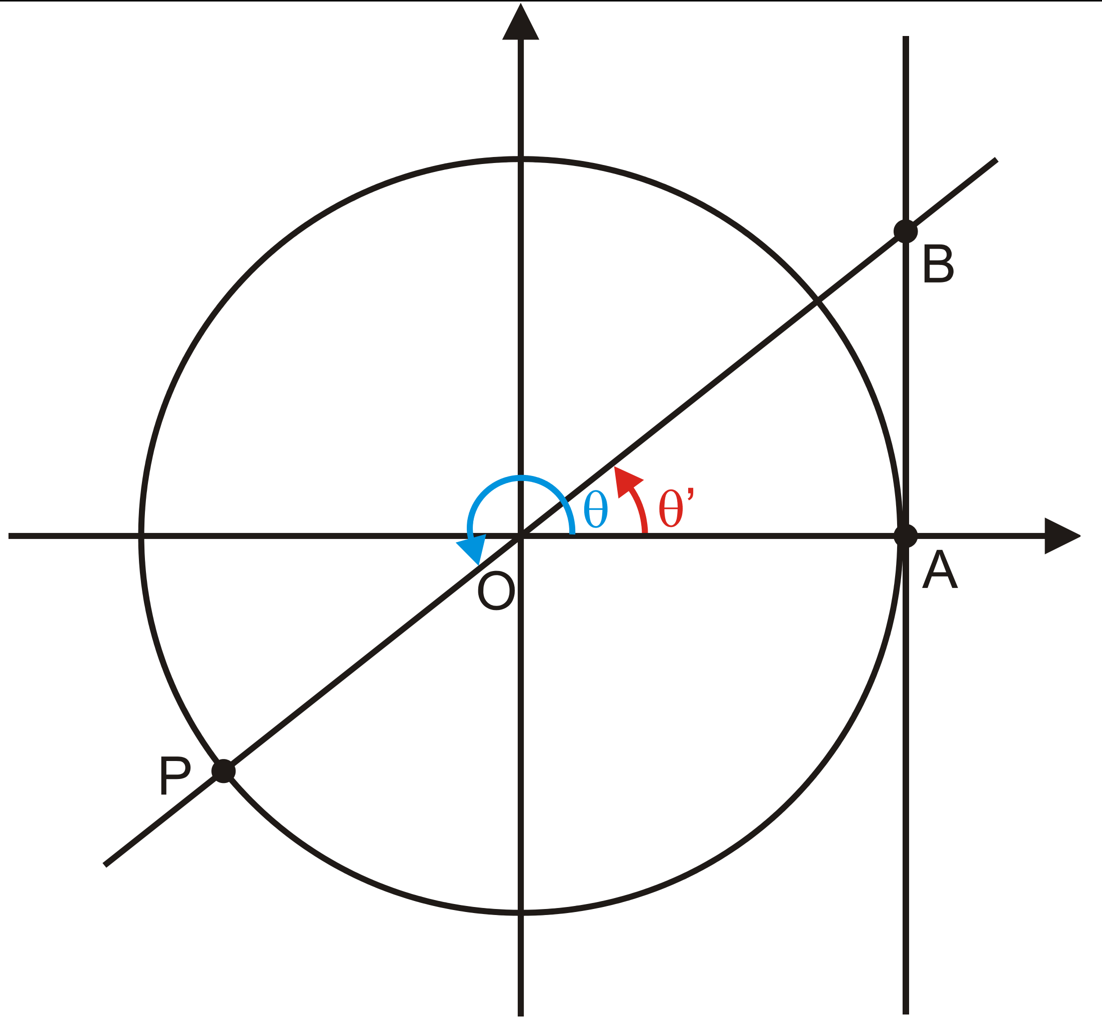
Da cartesiane a polari – 6

Nel secondo quadrante



Da cartesiane a polari – 7

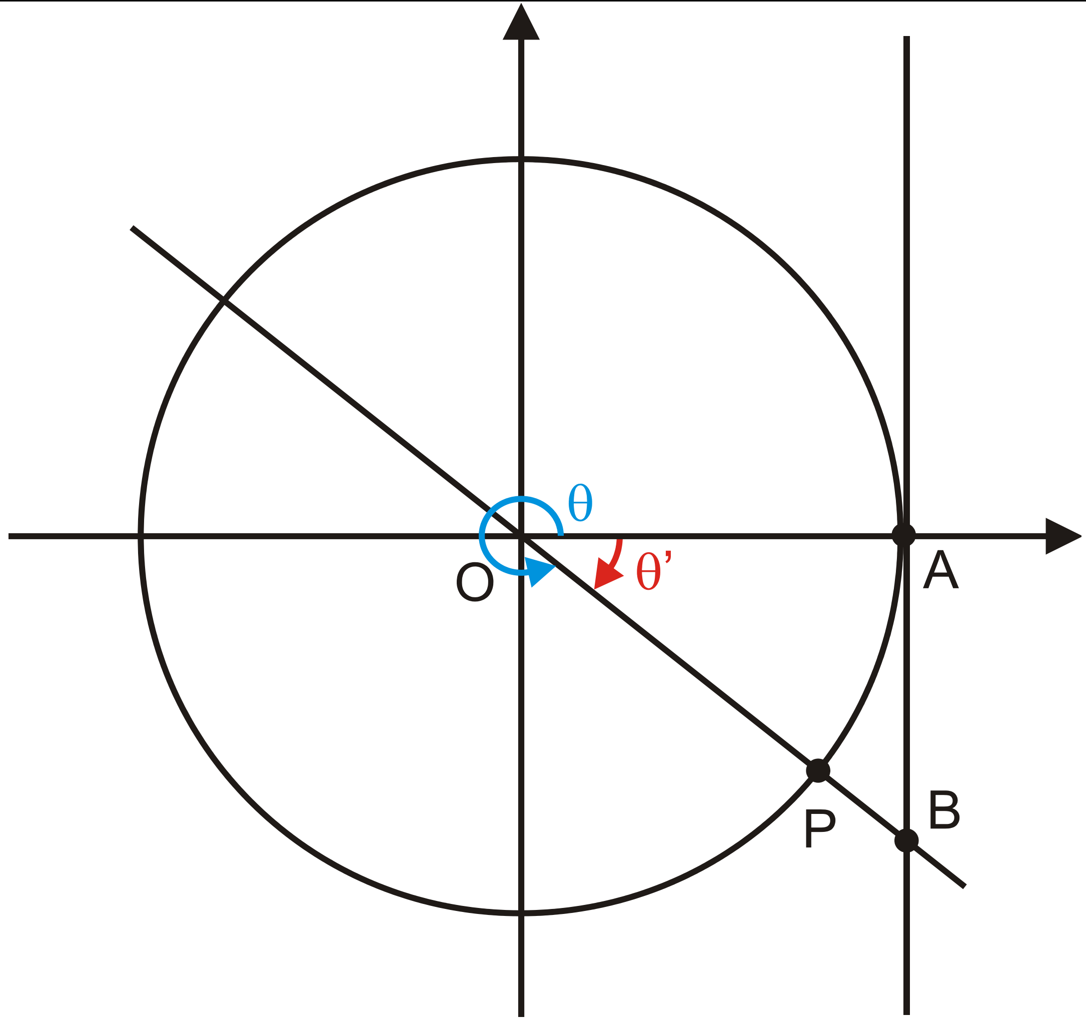
Nel terzo quadrante



Da cartesiane a polari – 8

Nel terzo quadrante

2



Da cartesiane a polari – 9

Riassumiamo. Considerato un angolo ausiliario

$$\arctan(\frac{y}{x})$$

si ha

$$
(x,y) \quad
\begin{array}{lll}
' & & 1° \text{ quadrante} \\
' & & 2° \text{ quadrante} \\
' & & 3° \text{ quadrante} \\
' & 2 & 4° \text{ quadrante}
\end{array}
$$

Da cartesiane a polari – 10

Traduciamo le condizioni di appartenenza ai quadranti in condizioni sulle coordinate. Notare che i quadranti 2 e 3 vengono unificati

$$\arctan(\frac{y}{x})$$

$$' \qquad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

$$(x, y) \qquad ' \qquad x \quad 0$$

$$' \;\; 2 \qquad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

Restano da gestire i casi in cui $x \quad 0$. In tali casi P si trova sull'asse delle ordinate; se si trova sul semiasse positivo vale $/2$. Diversamente vale $3 \; /2$.

Da cartesiane a polari – 11

Traduciamo le condizioni di appartenenza ai quadranti in condizioni sulle coordinate.

$$\arctan(\frac{y}{x})$$

$$' \quad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

$$\frac{}{2} \quad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

$$(x,y) \quad ' \quad x \quad 0$$

$$\frac{3}{2} \quad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

$$' \; 2 \quad x \quad 0 \quad y \quad 0$$

Esercizi svolti – 1

Consideriamo il punto P avente coordinate polari $(r, \quad) \quad 3.6, 2.8$; angoli in radianti. Troviamo le coordinate cartesiane di P

$$x \quad r\cos \quad 3.39$$

$$y \quad r\sin \quad 1.21$$

Consideriamo ora il punto Q di coordinate $\quad 2.45, \quad 4.78$ e cerchiamo le coordinate polari

$$r \quad \sqrt{x^2 \quad y^2} \quad 5.37$$

Per l'anomalia

$$\text{atan}\ \ y/x \quad 1.0972$$

Il punto si trova nel 3° quadrante dunque

$$4.2387$$

Esercizi

x	y	r	teta
-3.550	5.360	6.429	2.15578
3.552	-8.036	8.786	5.12864
-7.793	-4.020	8.769	3.61778
-4.410	-5.309	6.902	4.01924
5.173	-5.890	7.839	5.43301

Convertire da polari a cartesiane; angoli in radianti.

`[esercizi_polari2cartesiane.m]`

Esercizi – 2

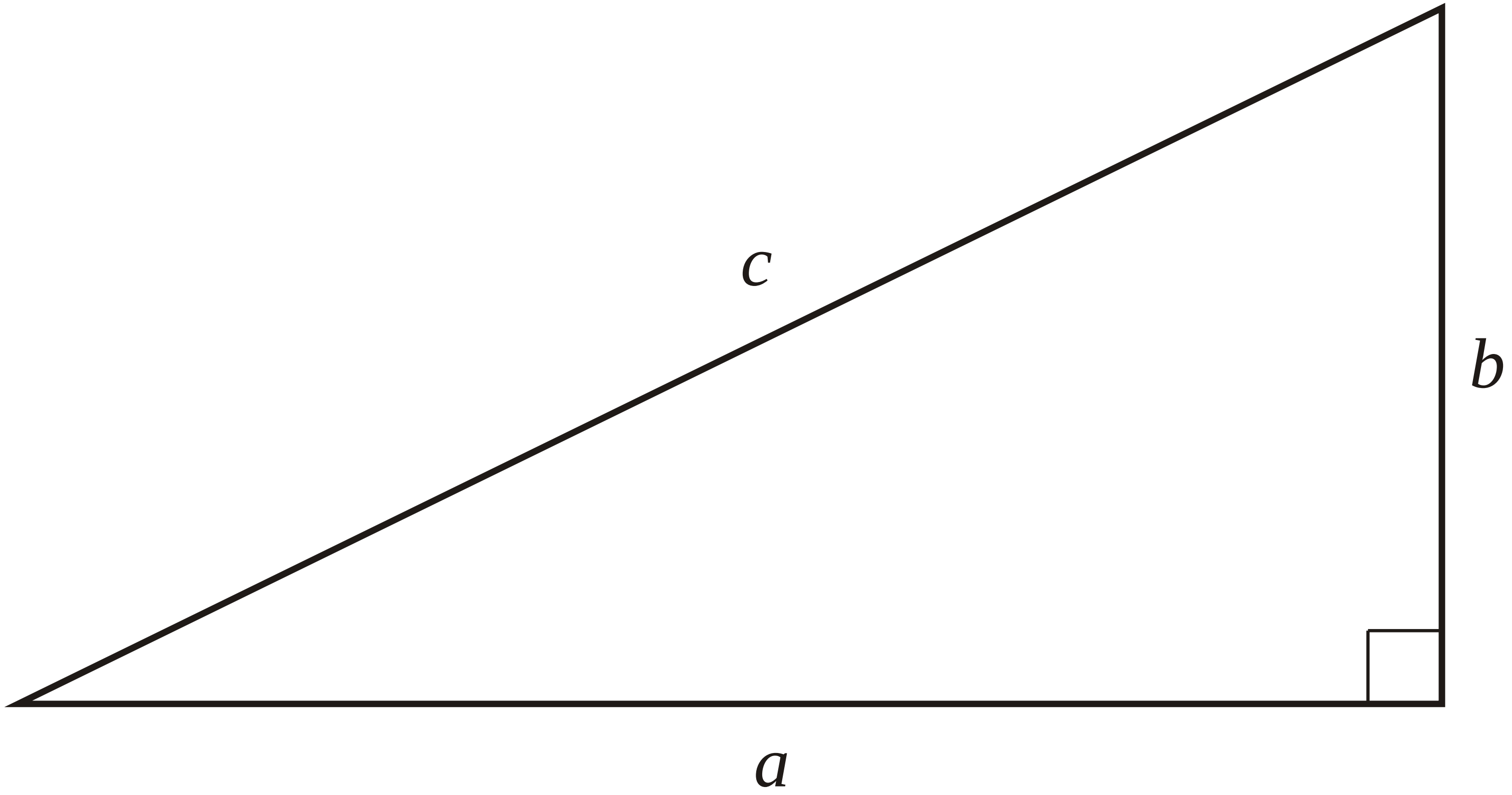
x	y	r	teta
5.579	1.625	5.811	0.28343
-8.671	-2.301	8.971	3.40098
-4.629	4.643	6.556	2.35468
3.756	6.656	7.643	1.05704
-5.488	1.962	5.828	2.79825

Convertire da cartesiane a polari; angoli in radianti.

`[esercizi_cartesiane2polari.m]`

Teoremi sui triangoli rettangoli

I teoremi sui triangoli servono a risolvere i triangoli, cioè a calcolare alcuni elementi incogniti (lati e/o angoli) in funzione di altri noti. Per i triangoli rettangoli valgono risultati particolarmente forti.



[triangolo rettangolo.wmf]

Teoremi sui triangoli rettangoli - 2

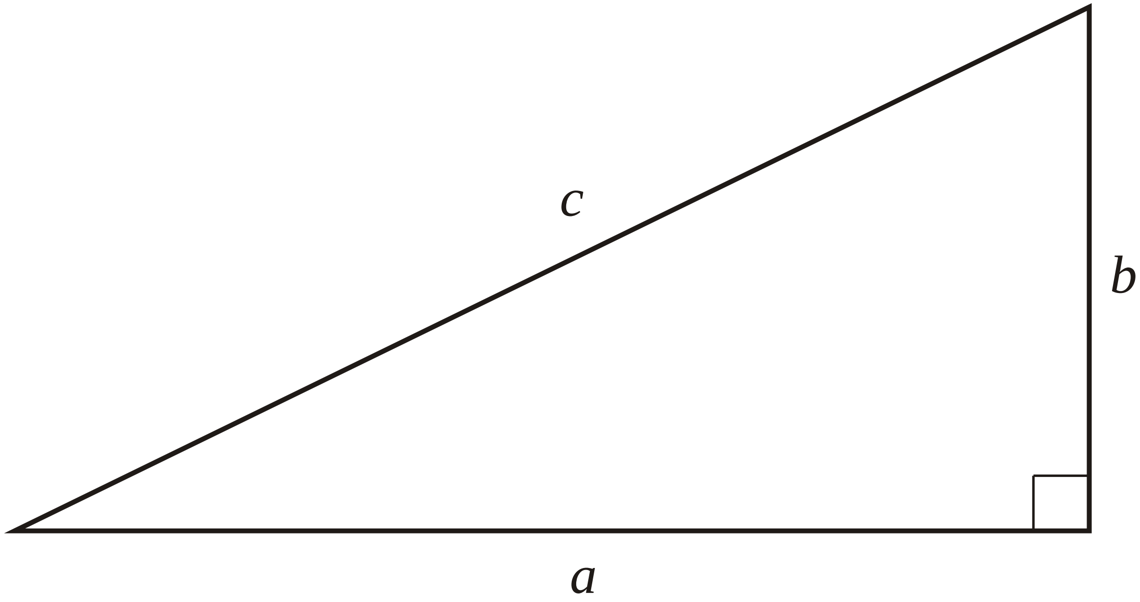
Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto (al cateto che si vuole calcolare).

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenuta per il coseno dell'angolo adiacente (al cateto che si vuole calcolare).

Formalmente

$a \quad c\,\mathrm{sin} \qquad\qquad b \quad c\,\mathrm{cos}$

$\quad\; c\,\mathrm{cos} \qquad\qquad\quad\; c\,\mathrm{sin}$



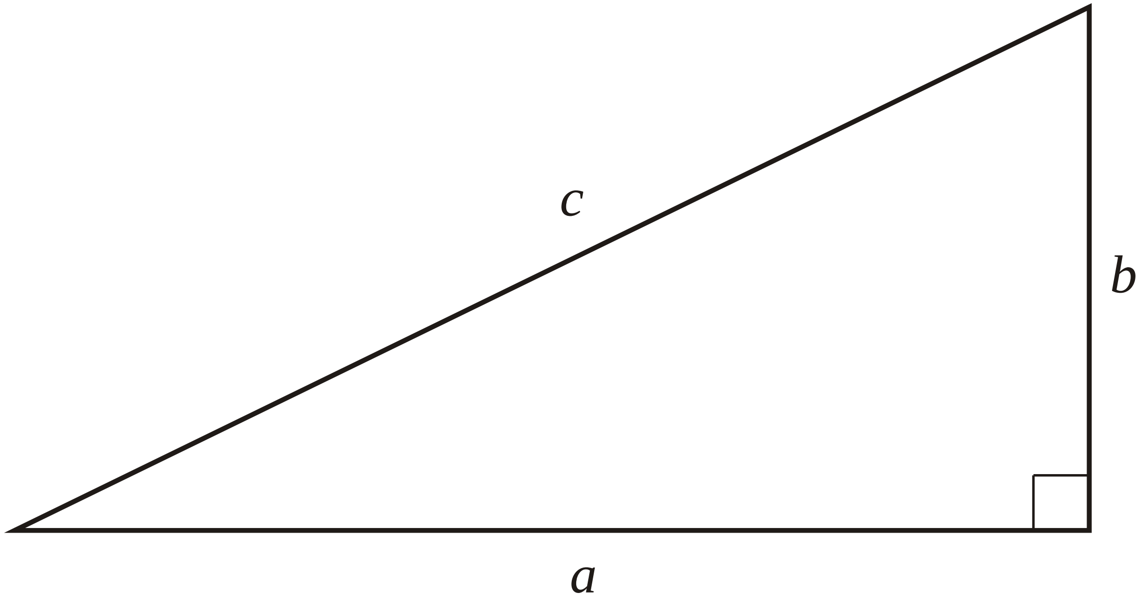
Teoremi sui triangoli rettangoli - 3

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all’altro cateto per la tangente dell’angolo opposto (al cateto che si vuole calcolare).

Teorema. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all’altro cateto per la cotangente dell’angolo adiacente (al cateto che si vuole calcolare).

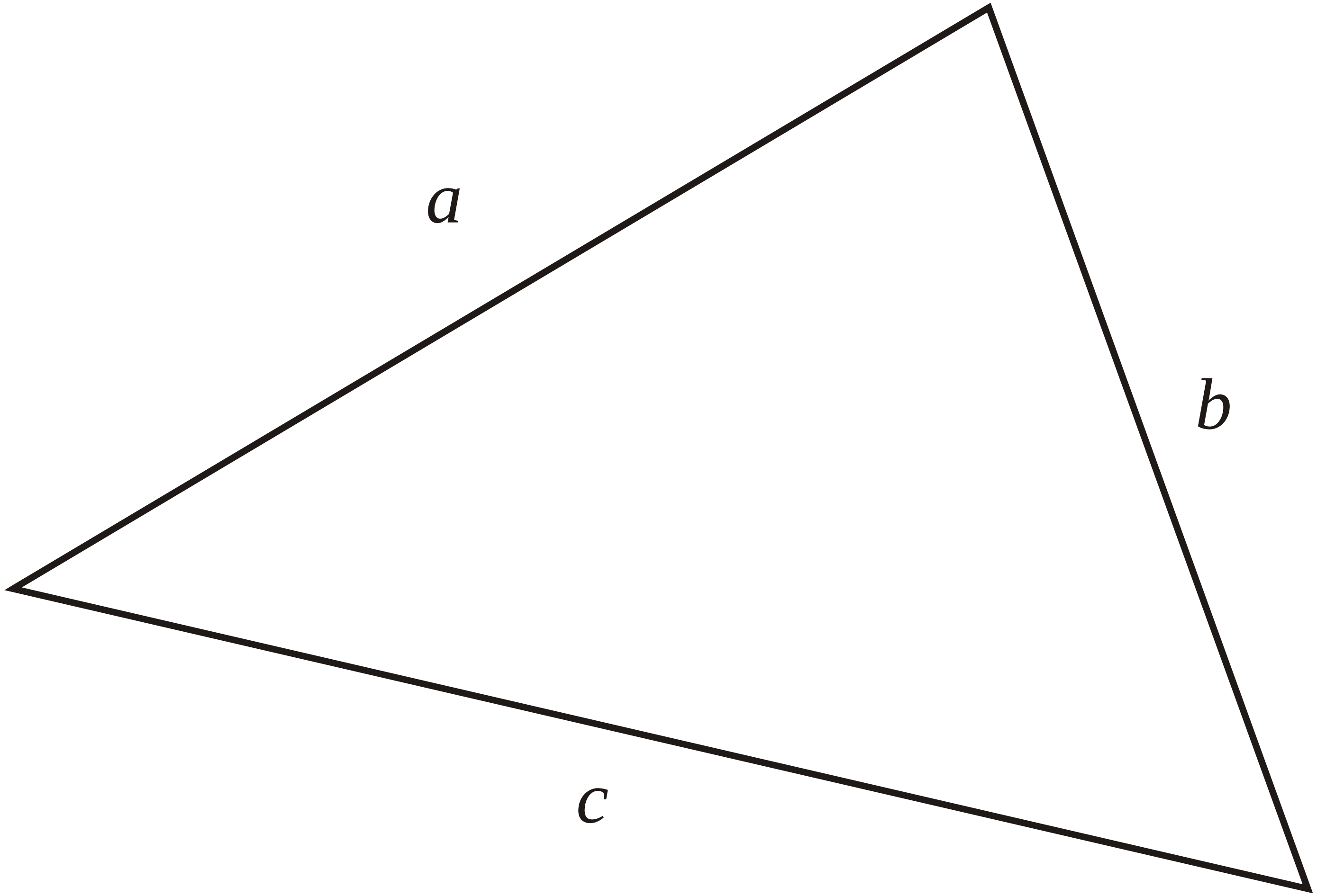
$a \quad b\tan$ $\qquad$ $b \quad a\tan$

$\quad\; b\cot$ $\qquad$ $\quad\; a\cot$



Teoremi sui triangoli qualunque

Anche per i triangoli qualunque vi sono teoremi utili.

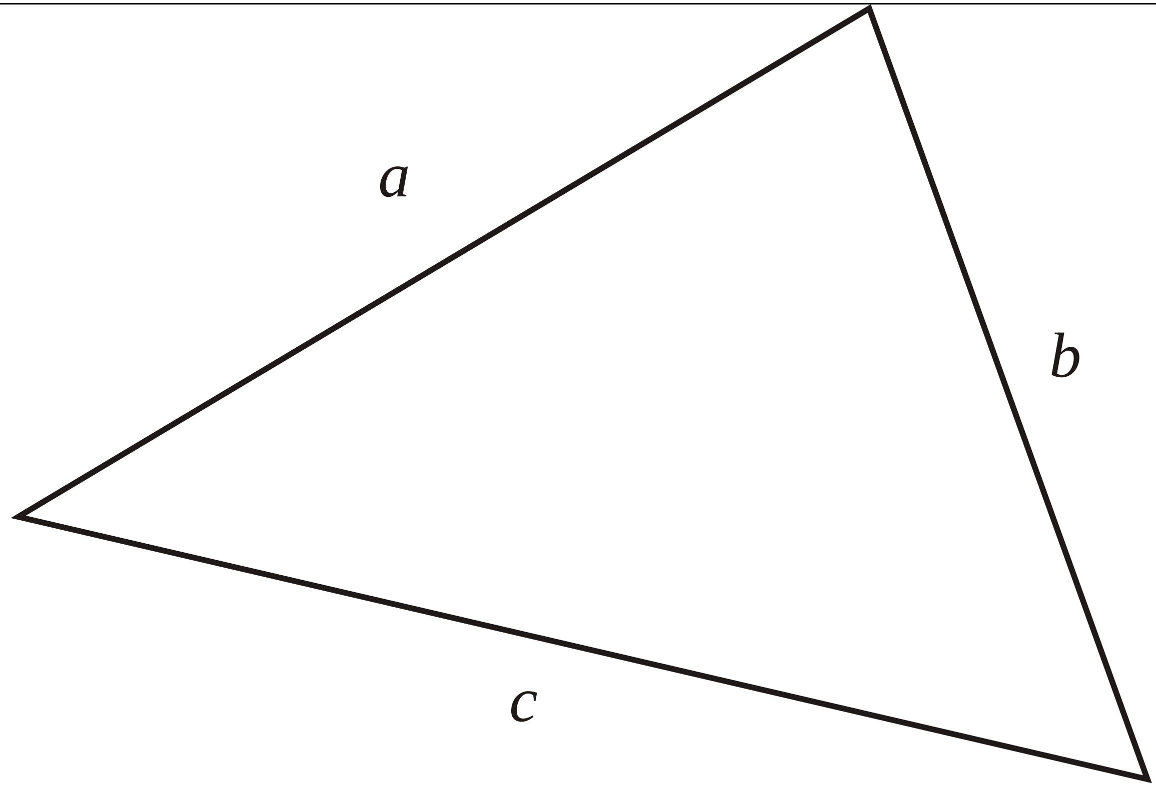


Teoremi sui triangoli qualunque - 2

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin} \quad \frac{b}{\sin} \quad \frac{c}{\sin}$$

Il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante.

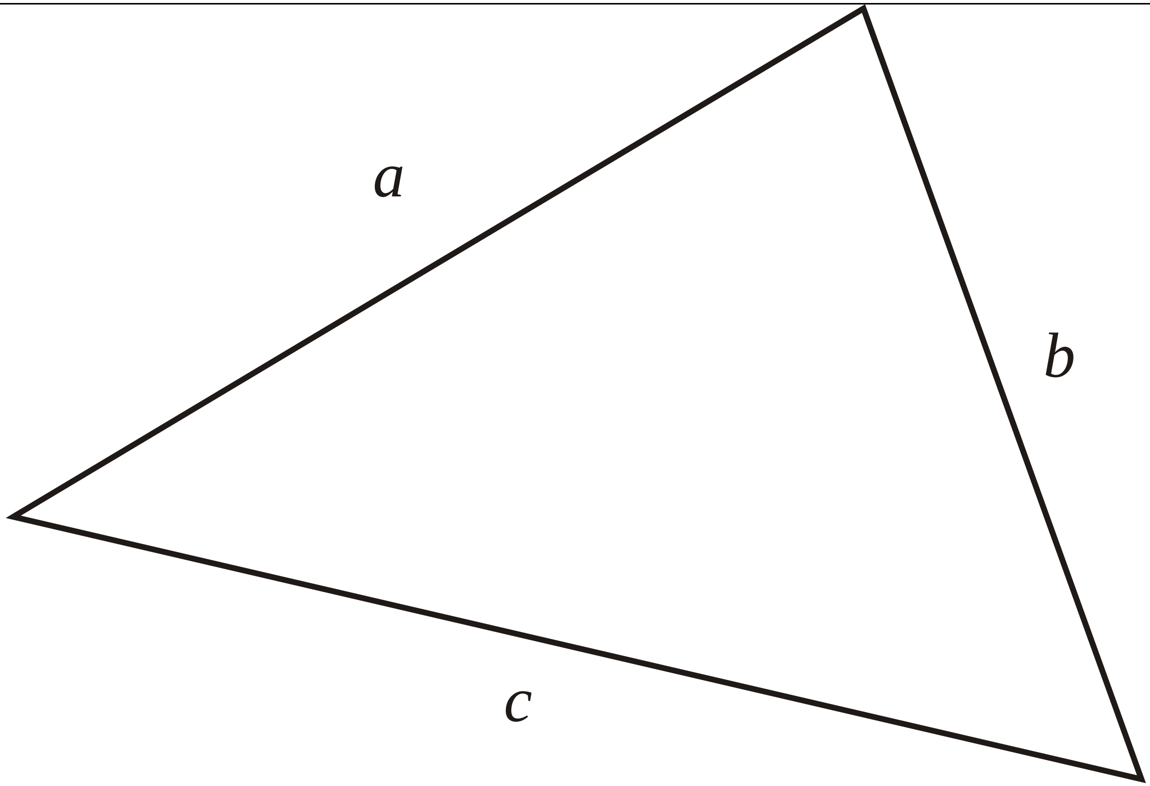


Teoremi sui triangoli qualunque - 3

Teorema del coseno

$$c^2 \quad a^2 \quad b^2 \quad 2ab\cos$$

Il teorema costituisce una generalizzazione del teorema di Pitagora, al quale si riduce se il triangolo è retto, cioè $\quad /2$ e $\cos \quad 0$.



Nota bene. Il teorema può essere applicato a ciascuno dei lati del triangolo e non certo solo a c. A sinistra: un lato qualunque; a destra: gli altri due lati e l'angolo da essi formato.