Vittorio Casella

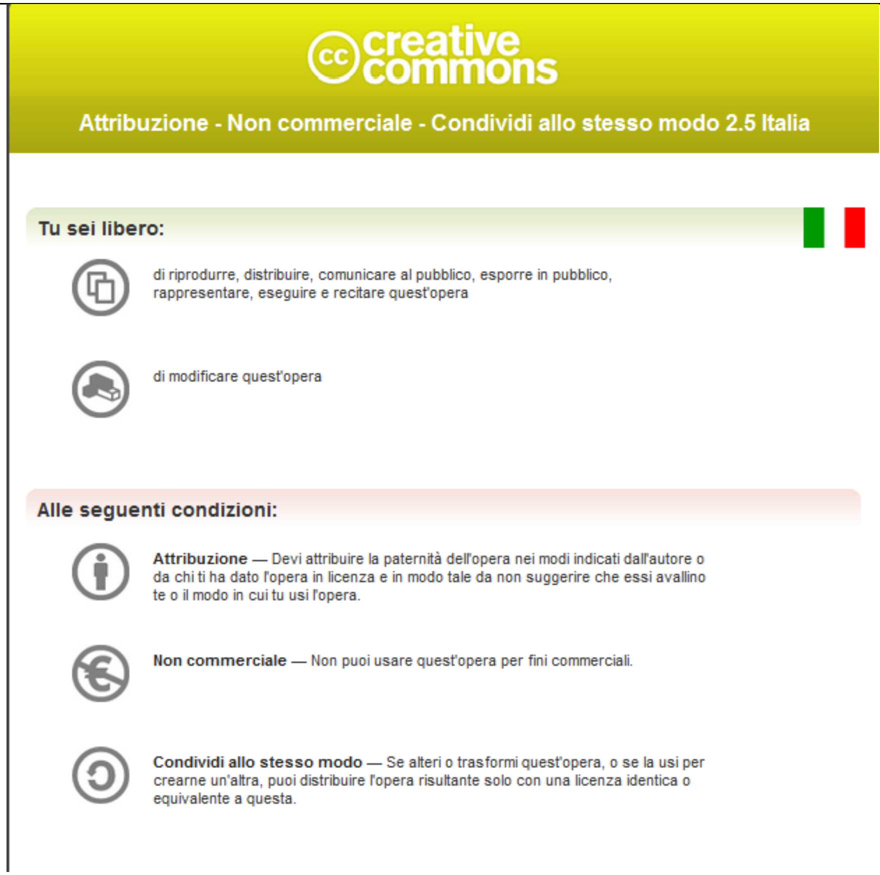
Laboratorio di Geomatica - DIET - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Trasformazioni di coordinate nello spazio. Parte 1

Licenza

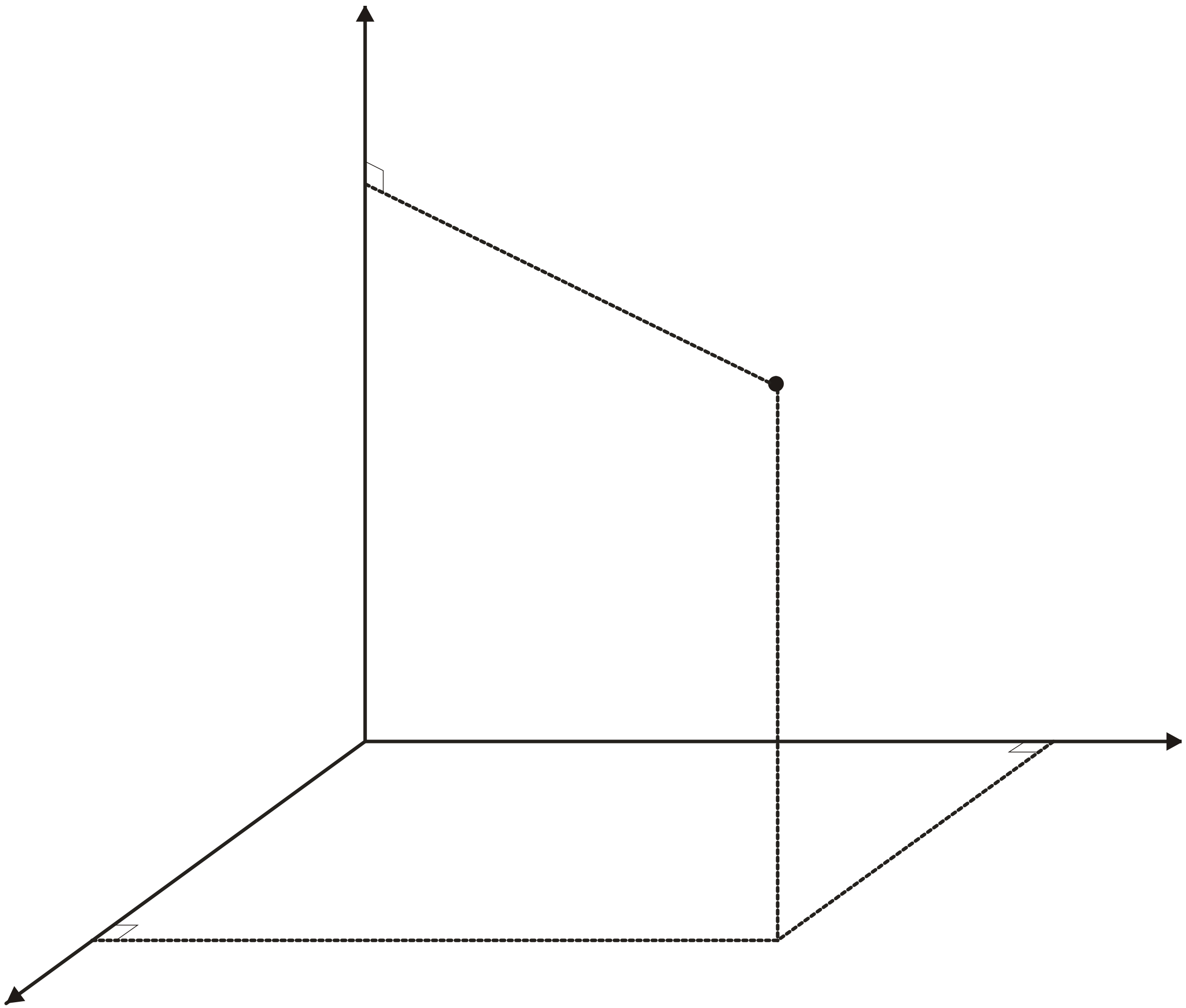
Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Sommario

1 - Introduzione e notazioni

Assi cartesiani 3D



Notazioni – SR coinvolti

Due sistemi di riferimento

(O,x,y,z)

(N,u,v,w)

Indichiamo un SR come una terna

Primo elemento: punto che rappresenta l'origine

Secondo, terzo e quarto elemento: nomi degli assi coordinati

Notazioni – coordinate dei punti

Le coordinate possono essere indicate individualmente

$$\left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

oppure si può usare un vettore tridimensionale

$$\mathbf{x}_P = \left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

NB Si usa la x con due significati diversi; la x non grassettata è una componente; la **x** in grassetto indica l'insieme delle coordinate di un punto

Coordinate di un punto P rispetto al SR (O, x, y, z)

$$\mathbf{x}_P = \left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

Coordinate di un punto P rispetto al SR $\left(N, u, v, w\right)$

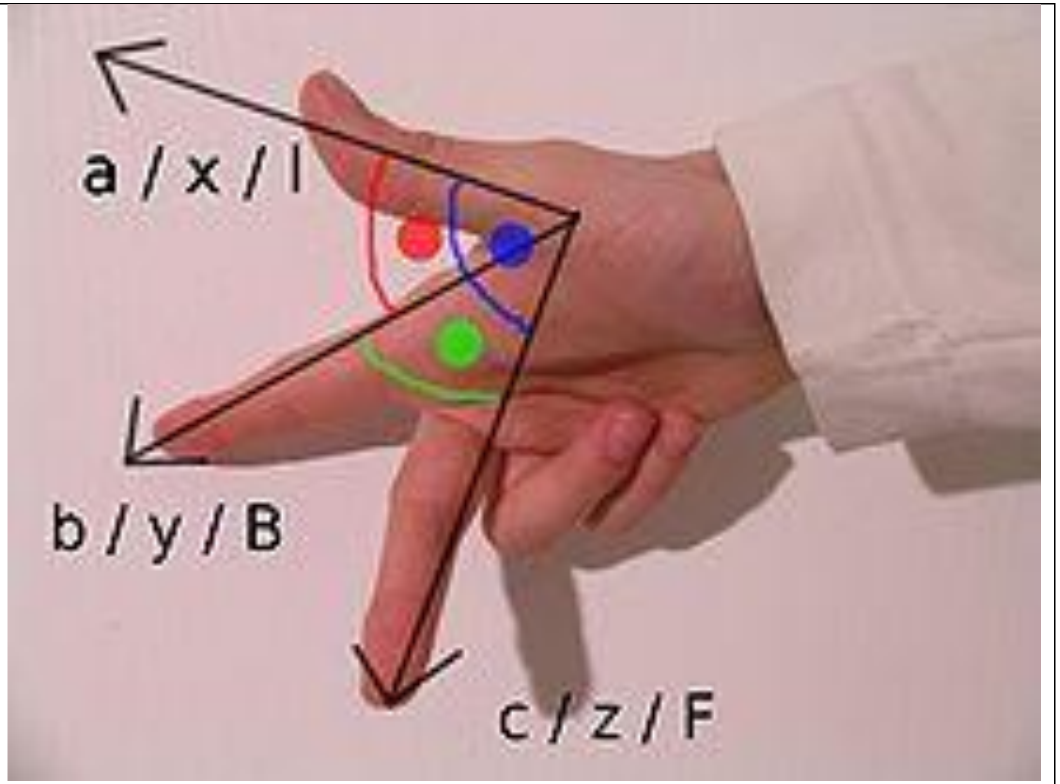
$$\mathbf{u}_P = \left(u_P, v_P, w_P\right)^t$$

Il segno di trasposto ricorda che i vettori sono da considerare *matrici colonna*

2 - SR destrorsi e sinistrorsi nello spazio

SR destrorsi e sinistrorsi nello spazio

L'insieme infinito dei SR ortogonali che si possono creare nello spazio può essere in due sotto-insiemi disgiunti dei SR destrorsi e sinistrorsi.



(O,x,y,z) è **destrorso** se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano destra, aperti in modo da essere ortogonali

(O,x,y,z) è **sinistrorso** se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano destra, aperti in modo da essere ortogonali

3 - Generalizzazione al caso 3D delle trasformazioni di coordinate elementari

Generalizziamo al caso 3D

Consideriamo le trasformazioni di coordinate elementari già trattate e generalizziamole al caso 3D

- traslazione
- cambiamento di scala
- rotazione

3.1 - Traslazione e cambiamento di scala

La traslazione

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{u}_P + \mathbf{T} \qquad \text{diretta}$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{x}_P - \mathbf{T} \qquad \text{indiretta}$$

E' ancora l'equazione della traslazione purché si ricordi che i vettori coinvolti sono 3D

Numero dei parametri: 3

Il cambio di scala

In notazione vettoriale si ha, per la trasformazione diretta e indiretta

$$\mathbf{x}_P = \lambda \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \lambda^{-1} \mathbf{x}_P$$

Vettori 3D

Numero dei parametri: 1

Il cambio di scala anisotropo

Si introduce la matrice

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & & \\ & \lambda_y & \\ & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

e si può scrivere

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{x}_P$$

3.2 - La rotazione attorno all'asse x

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a x

- (N,u,v,w) inizialmente coincideva con (O,x,y,z)
- Successivamente gli assi v e w sono stati ruotati di un angolo ω in senso antiorario attorno all'asse $x \equiv u$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_x(\omega)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

Proprietà della matrice

Ricordiamo anzitutto che vale, per la ortogonalità della matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P &= \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P &= \mathbf{R}_x^t(\omega)\mathbf{x}_P \end{aligned} \qquad (1)$$

Esplicitiamo gli elementi della matrice

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo ora che, se la rotazione avviene attorno all'asse $x \equiv u$, per ogni punto P si ha che le componenti x e u coincidono

$$x_P = u_P$$

La prima riga

Esplicitiamo la prima riga della prima equazione delle (1), cioè

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P$$

che è

$$x_P = r_{11}\,u_P + r_{12}\,v_P + r_{13}\,w_P$$

Da cui risulta che la prima riga è

$$r_{11} = 1$$

$$r_{12} = 0$$

$$r_{13} = 0$$

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

La prima colonna

Esplicitiamo la prima riga della seconda equazione delle (1), cioè

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{R}_x^t(\omega)\,\mathbf{x}_P$$

che è

$$u_P = r_{11}^t\, x_P + r_{12}^t\, y_P + r_{13}^t\, z_P \qquad (2)$$

Dove r_{11}^t, per esempio, rappresenta l'elemento (1,1) della matrice $\mathbf{R}_x^t$. Ma allora la (2) equivale a

$$u_P = r_{11}\, x_P + r_{21}\, y_P + r_{31}\, z_P$$

Da cui emerge che la prima colonna è

$$r_{11} = 1$$

$$r_{21} = 0$$

$$r_{31} = 0$$

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

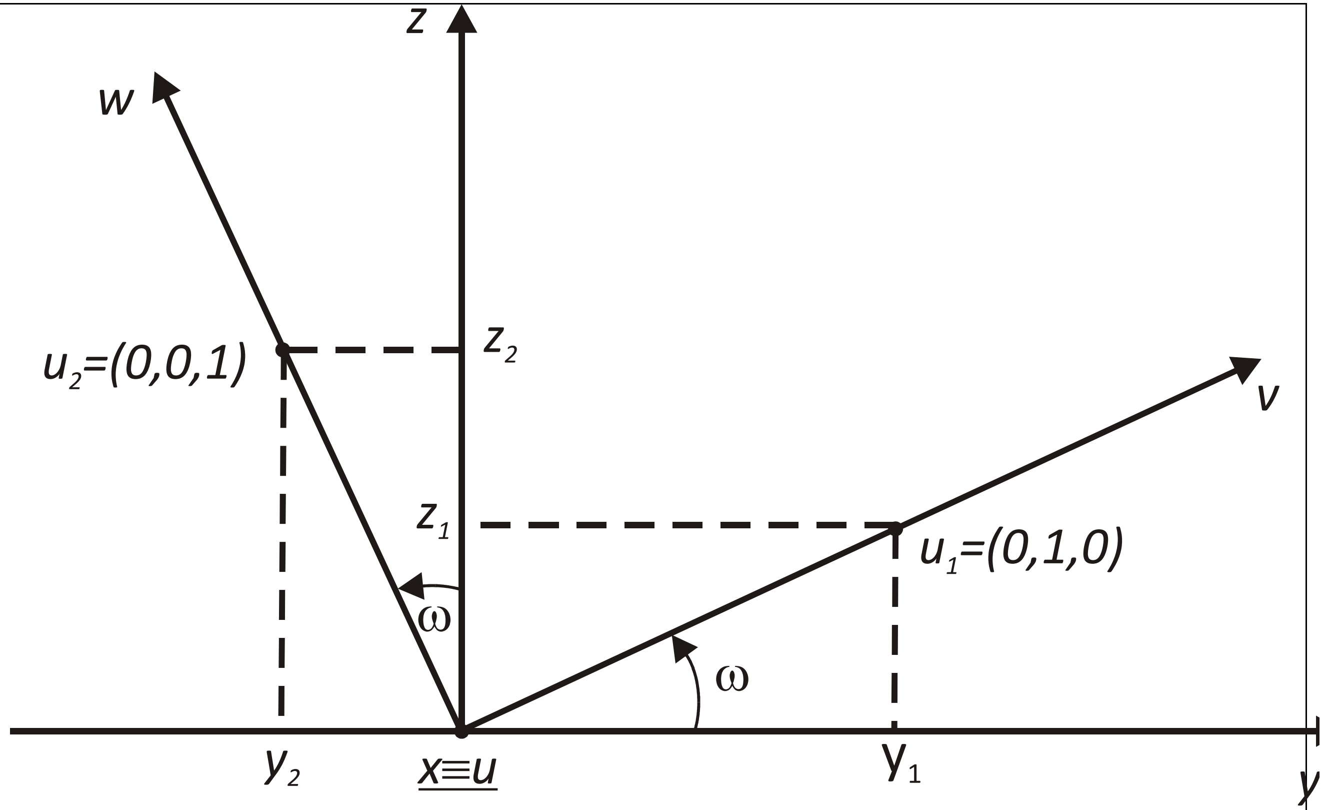
Bisogna ancora esplicitare 4 elementi.

La matrice $\mathbf{R}_x$

Le coppie di assi (y,z) e (v,w) sono destrorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclude

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$



[dimostrazione_rotazione_x_spazio.cdr, wmf]

Problema: il senso orario o antiorario delle matrici come viene fissato? Osservando dalla parte positiva dell’asse di rotazione.

3.3 - La rotazione attorno all'asse y

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a y

- $\left(N,u,v,w\right)$ inizialmente coincideva con (O,x,y,z)
- Successivamente gli assi u e w sono stati ruotati di un angolo φ in senso antiorario attorno all'asse $y \equiv v$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_y(\varphi)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

La seconda riga e seconda colonna

Se la rotazione avviene attorno all'asse $y \equiv v$, per ogni punto P si ha che le componenti y e v coincidono $y_P = v_P$ Sfruttando questa invarianza sia per le rotazioni dirette sia per le inverse, si arriva alla conclusione	$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{31} & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$

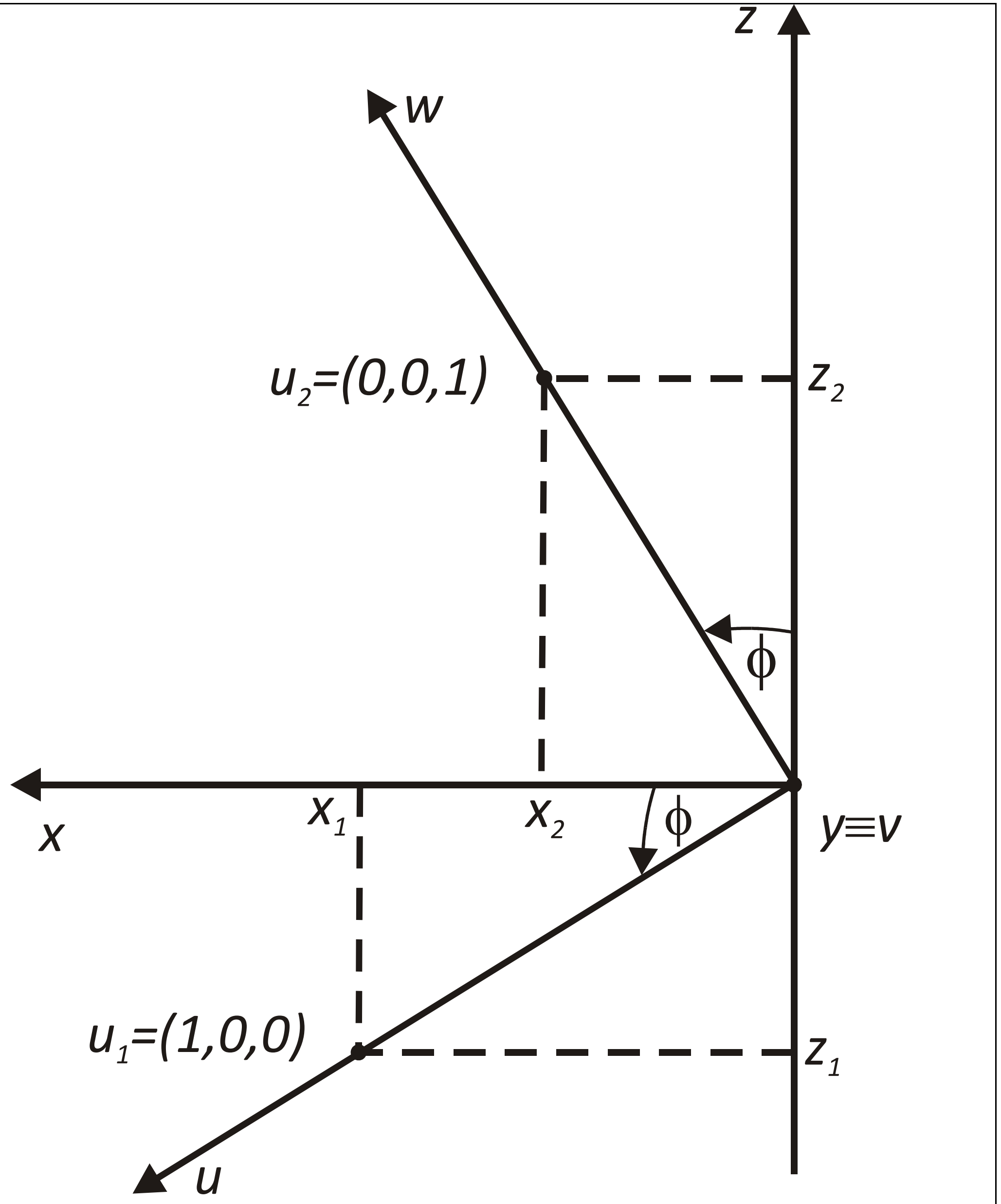
La matrice $\mathbf{R}_y$

Le coppie di assi (x,z) e (u,w) sono sinistrorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclude

$$\mathbf{R}_y(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

[dimostrazione_rotazione_y_spazio.cdr, wmf]



3.4 - La rotazione attorno all'asse z

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a z

- (N,u,v,w) inizialmente coincideva con (O,x,y,z)
- Successivamente gli assi u e v sono stati ruotati di un angolo κ in senso anti-orario attorno all'asse $z \equiv w$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_z(\kappa)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

La terza riga e seconda colonna

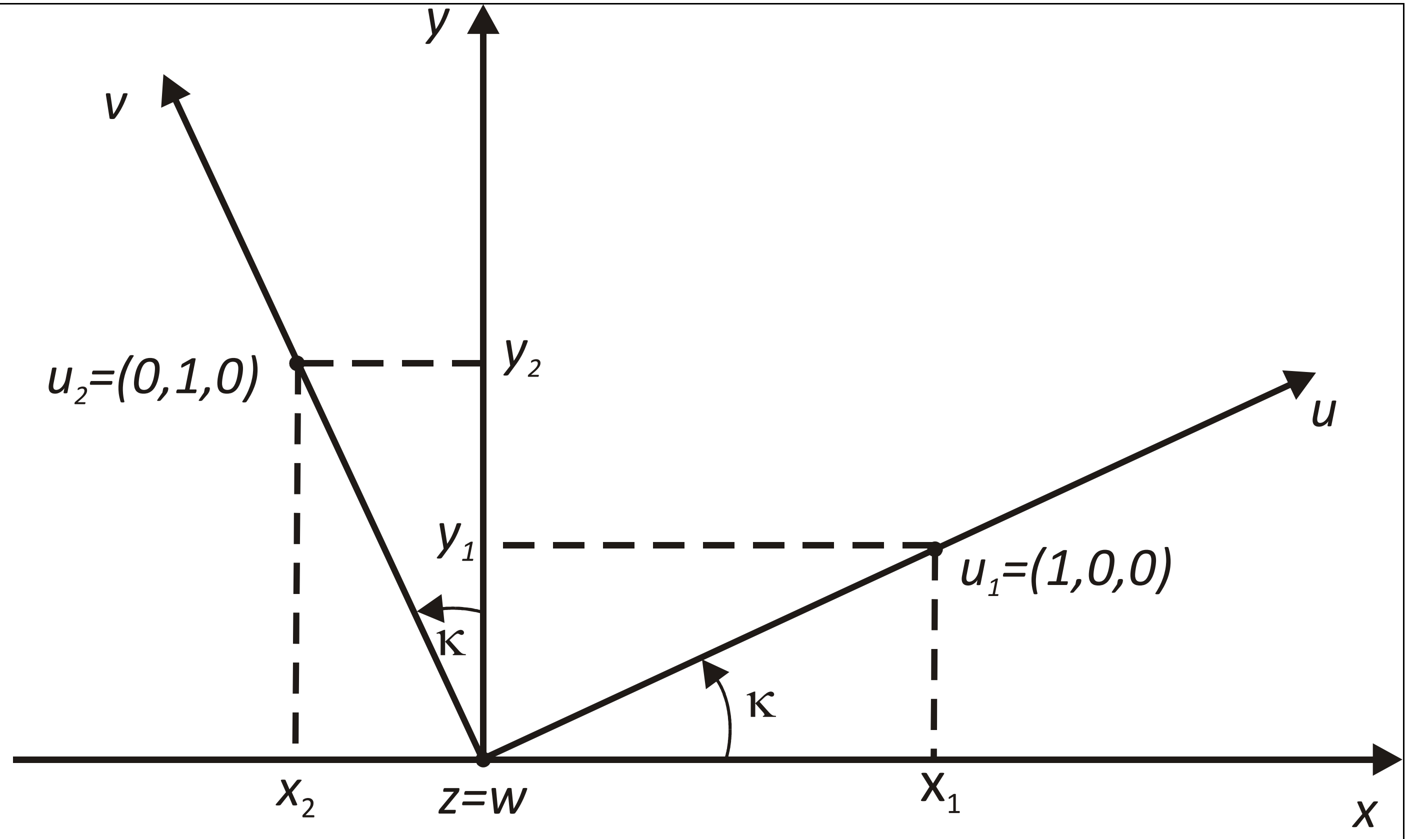
Se la rotazione avviene attorno all'asse $z \equiv w$, per ogni punto P si ha che le componenti z e w coincidono $z_P = w_P$ Sfruttando questa invarianza sia per le rotazioni dirette sia per le inverse, si arriva alla conclusione	$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\mathbf{R}_z$

Le coppie di assi (x,y) e (u,v) sono sinistrorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclude

$$\mathbf{R}_z(\kappa)=\begin{pmatrix}\cos\kappa & -\sin\kappa & 0\\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



[dimostrazione_rotazione_z_spazio.cdr, wmf]

Sintesi

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotazione nello spazio– Definizione

- $\left(N,u,v,w\right)$ inizialmente coincide con (O,x,y,z)
- Successivamente l'orientamento degli assi di $\left(N,u,v,w\right)$ viene alterato
- L'origine non viene spostata
- L'unità di misura non viene cambiata
- L'orientamento relativo degli assi di $\left(N,u,v,w\right)$ non viene cambiato: si muovono rigidamente

Si tratta di una rotazione nello spazio

- Quanti parametri ha?
- Come la si può caratterizzare matematicamente?

Si può dimostrare che una tale rotazione è una rotazione attorno a un asse.

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D

Le seguenti affermazioni sono equivalenti e enunciano il teorema di Eulero.

Una rotazione nello spazio può essere pensata come una rotazione attorno a un asse.

Una rotazione nello spazio è rappresentata da una matrice 3x3 che può essere scomposta come prodotto di tre matrici elementari (eseguite attorno agli assi coordinati).

Numero dei parametri: 3

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D – 2

Consideriamo il secondo enunciato. Sono possibili molte scelte per le tre rotazioni elementari.

Vi sono convenzioni del tipo z-x-z, che coinvolgono due assi coordinati.

Vi sono convenzioni del tipo x-y-z, che coinvolgono tre assi.

Si tratta in ogni caso di diverse convenzioni all'interno dello stesso teorema di Eulero, tuttavia alcuni autori chiamano *angoli di Eulero* quelli corrispondenti alla convenzione z-x-z e similari; chiamano invece angoli di Cardano quelli corrispondenti alla convenzione x-y-z e similari.

Ulteriori informazioni in

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles

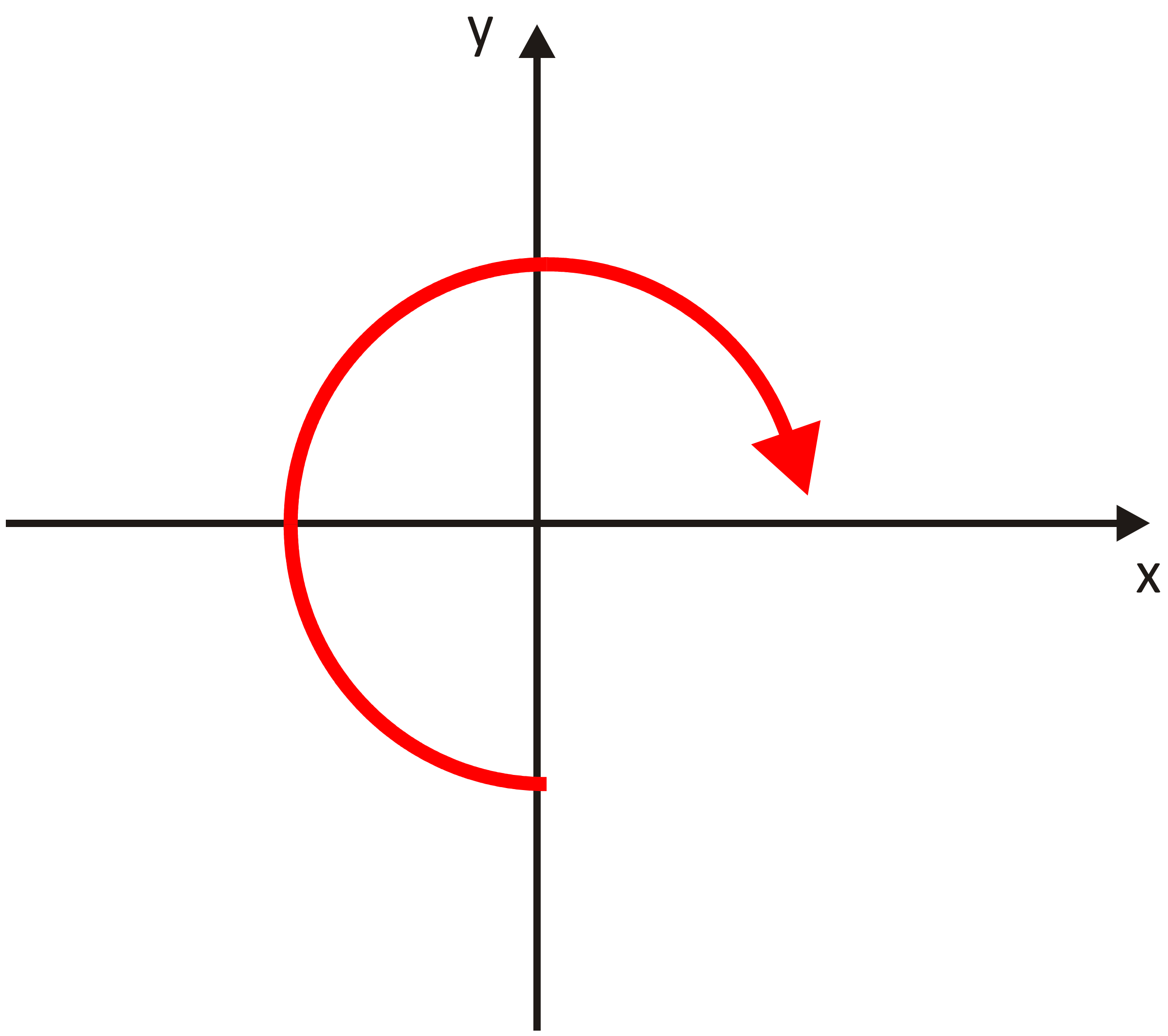
La convenzione usata in Fotogrammetria

Si tratta della convenzione più diffusa, ma non è l'unica. E' usata per esempio da Kraus nei suoi testi.

Consideriamo (O,x,y,z) e $\left(N,u,v,w\right)$, con il secondo ruotato nello spazio rispetto al primo. Il secondo si è allontanato dal primo secondo la seguente successione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno al primo asse coordinato (x)
- rotazione di φ in senso antiorario attorno al secondo asse coordinato (y)
- rotazione di κ in senso antiorario attorno al terzo asse coordinato (z)

Rotazione oraria/antioraria



[rotazione_per_magia.cdr,wmf]

Dipende dalla posizione da cui si osserva.

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fo-togrammetria

	(O,x,y,z)	
Rotazione di un angolo ω in senso antiorario rispetto a x		$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P^{(1)}$
	$\left(O,u^{(1)},v^{(1)},w^{(1)}\right)$	
Rotazione di un angolo φ in senso antiorario rispetto a $v^{(1)}$		$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_P^{(2)}$
	$\left(O,u^{(2)},v^{(2)},w^{(2)}\right)$	
Rotazione di un angolo κ in senso antiorario rispetto a $w^{(2)}$		$\mathbf{u}_P^{(2)} = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$
	$\left(O,u,v,w\right)$	

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fotogrammetria – 2

Componendo le rotazioni si ha

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$$

Definendo

$$\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right) = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa) =$$

Si ha

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)\mathbf{u}_P$$

La matrice delle rotazione 3D

Si può esplicitare

$$\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)=\mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa+\sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa-\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa-\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa+\cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Equazione delle rotazione 3D

Le matrici $\mathbf{R}_x(\omega)$, $\mathbf{R}_y(\varphi)$ e $\mathbf{R}_z(\kappa)$ sono ortogonali, come è facile verificare direttamente.

Un teorema afferma che il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale.

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici ortogonali *n*-dimensionali, esiste $\mathbf{AB}$ che ha per inversa la sua trasposta. Infatti

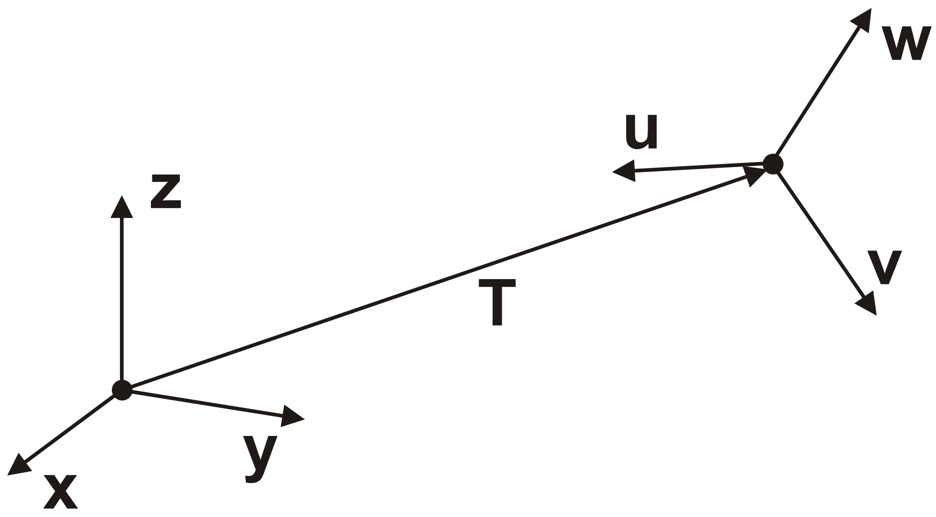
$$(\mathbf{AB})^t\,\mathbf{AB} = \mathbf{B}^t\,\mathbf{A}^t\mathbf{AB} = \mathbf{B}^t\,\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

Si può allora concludere che le relazioni dirette e indirette per la rotazione 3D nella convenzione della fotogrammetria sono

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_{xyz}(\omega,\varphi,\kappa)\mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{R}^t_{xyz}(\omega,\varphi,\kappa)\mathbf{x}_P$$

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Le convenzioni usate in Geodesia

La convenzione scelta da IGM (Istituto Geografico Militare)

Consideriamo (O,x,y,z) e (N,u,v,w), con il secondo ruotato nello spazio rispetto al primo. Il secondo si è allontanato dal primo secondo la seguente successione

- rotazione di α_3 in senso orario attorno al terzo asse coordinato (z)
- rotazione di α_2 in senso orario attorno al terzo asse coordinato (y)
- rotazione di α_1 in senso orario attorno al terzo asse coordinato (x)

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

$$\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

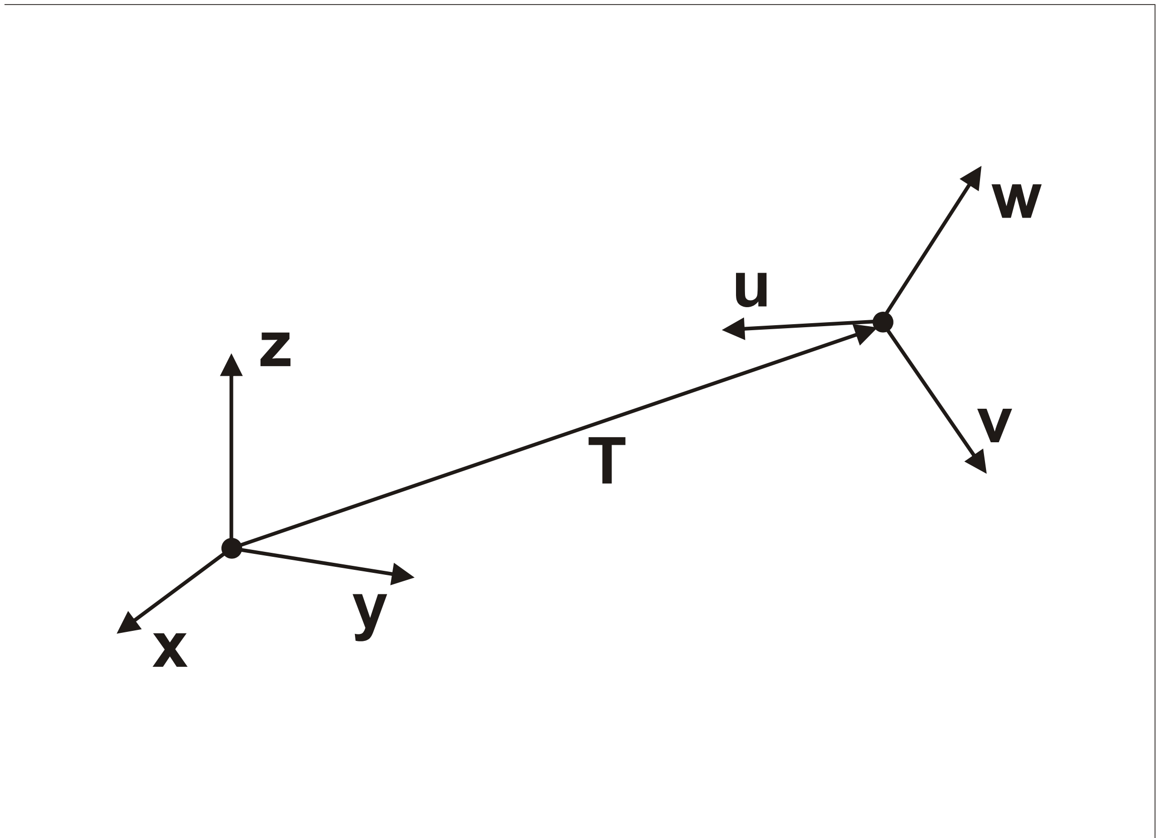
La sigla CW in pedice significa clock-wise, cioè in senso orario.

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

La matrice complessiva è

$$\mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1\right)=\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3)\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2)\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1)$$

Equazione della trasformazione a 7 parametri nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Viene detta **trasformazione di Helmert**.

Non leggere

NON LEGGERE

TODO

Dalla matrice agli angoli

Il formalismo sviluppato consente di calcolare le matrici di rotazione noti gli angoli: si pone spesso anche il problema inverso, cioè ricavare gli angoli a partire da una matrice di rotazione. Consideriamo la (3) e indichiamo con r_{ij} il valore del generico elemento di matrice. Si ha anzitutto

$$\sin\varphi \doteq r_{13} \tag{4}$$

L'equazione può essere risolta invertendo la funzione seno, cosa che viene effettuata in genere fra $-\pi/2$ e $\pi/2$; in altri termini la funzione arcsin è così definita

$$\arcsin: \quad [-1,1] \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

Indichiamo con φ_1 il valore che si ottiene invertendo il seno

$$\varphi_1 = \arcsin(r_{13})$$

Il valore ottenuto potrebbe essere positivo, se φ_1 appartiene al primo quadrante, o negativo, se si trova nel quarto.

Dalla matrice agli angoli - 2

L'equazione (4) ha una seconda soluzione, dovuta alla periodicità della funzione seno

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

In sintesi sono possibili due casi a cui corrispondono due soluzioni diverse ma equivalenti:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{caso A} \\ \varphi_2 & \varphi \in]\pi/2, 3\pi/2[\quad \text{caso B} \end{cases}$$

Per entrambi i casi considerati è possibile ricavare il valore di $\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-r_{13}^2} & \text{caso A} \\ -\sqrt{1-\sin^2\varphi} = -\sqrt{1-r_{13}^2} & \text{caso B} \end{cases}$$

Si possono allora ricavare il seno e il coseno di κ:

Dalla matrice agli angoli - 3

$$\cos\kappa = \frac{r_{11}}{\cos\phi}$$

$$\sin\kappa = -\frac{r_{12}}{\cos\phi}$$

Interpretando i due valori come le coordinate cartesiane di un punto P che si trova sulla circonferenza unitaria e tale che il segmento $\overrightarrow{OP}$ forma un angolo κ in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle ascisse si può concludere

$$\kappa = \mathrm{atan}_2\left(\frac{r_{11}}{\cos\phi}, -\frac{r_{12}}{\cos\phi}\right)$$

dove la funzione atan_2 indica la inversione della tangente che prende valori in $[-\pi,\pi]$.

Dalla matrice agli angoli - 4

Considerazioni analoghe consentono di scrivere

$$\cos\omega = \frac{R_{33}}{\cos\varphi}$$

$$\sin\omega = -\frac{R_{23}}{\cos\varphi}$$

e portano alla conclusione

$$\omega = \text{atan}_2\left(\frac{R_{33}}{\cos\varphi}, -\frac{R_{23}}{\cos\varphi}\right)$$

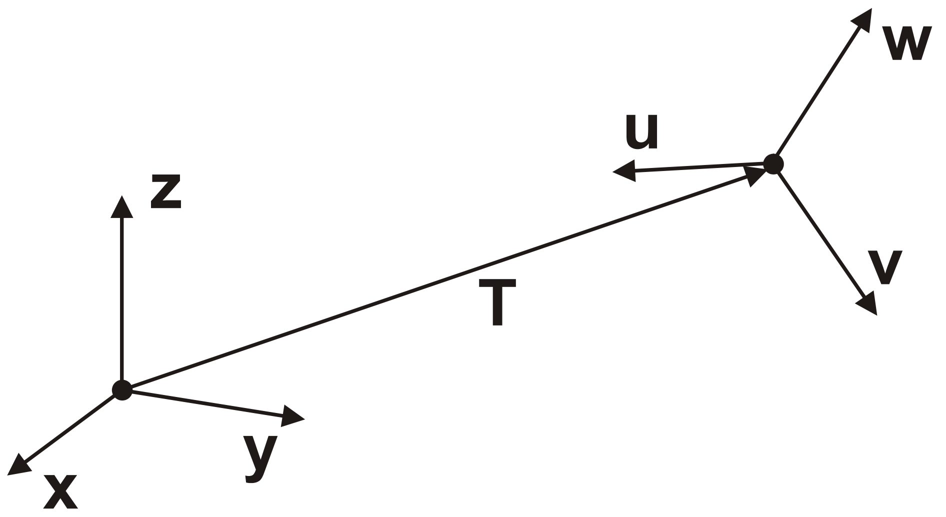
Dalla matrice agli angoli - 5

In sintesi la soluzione è

Caso A	Caso B
$\varphi = \arcsin(r_{13})$	$\varphi = \pi - \arcsin(r_{13})$
$\cos\phi = \sqrt{1 - r_{13}^2}$	$\cos\varphi = -\sqrt{1 - r_{13}^2}$
$\kappa = \operatorname{atan}_2\left(\dfrac{r_{11}}{\cos\varphi}, -\dfrac{r_{12}}{\cos\varphi}\right)$	$\kappa = \operatorname{atan}_2\left(\dfrac{r_{11}}{\cos\varphi}, -\dfrac{r_{12}}{\cos\varphi}\right)$
$\omega = \operatorname{atan}_2\left(\dfrac{r_{33}}{\cos\varphi}, -\dfrac{r_{23}}{\cos\varphi}\right)$	$\omega = \operatorname{atan}_2\left(\dfrac{r_{33}}{\cos\varphi}, -\dfrac{r_{23}}{\cos\varphi}\right)$

Esistono insomma due terne di angoli equivalenti ma diverse.

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Convenzioni nelle trasformazioni 3D

Verso delle rotazioni

Posizione da cui giudico il verso delle rotazioni

Ordine delle trasformazioni (traslazione, scala, rotazione)

Ordine delle rotazioni

Famiglia dei SR, destrorsi o sinistrorsi

Teorema sulle rotazioni 3D – 2b

	(O,x,y,z)	
Rotazione di un angolo α_3 in senso orario rispetto a z		
	$\left(O,u^{(1)},v^{(1)},w^{(1)}\right)$	
Rotazione di un angolo α_2 in senso orario rispetto a $v^{(1)}$		
	$\left(O,u^{(2)},v^{(2)},w^{(2)}\right)$	
Rotazione di un angolo α_1 in senso orario rispetto a $u^{(2)}$		
	$\left(O,u,v,w\right)$	

Teorema sulle rotazioni 3D - 3

In generale in Fotogrammetria le rotazioni seguono la convenzione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno a *x*
- rotazione di φ in senso antiorario attorno a *y*
- rotazione di κ in senso antiorario attorno a *z*

In Geodesia si usa prevalentemente

- rotazione di α_3 in senso orario attorno a *z*
- rotazione di α_2 in senso orario attorno a *y*
- rotazione di α_1 in senso orario attorno a *x*

Talvolta il Geodesia si usano le rotazioni antiorarie

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

$$\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right) = \mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3)\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2)\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1)$$