



Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it




Variabili casuali a n componenti: calcolo delle probabilità

Licenza



La presentazione che segue è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.






Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 Italia

Tu sei libero:

-  di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera
-  di modificare quest'opera

Alle seguenti condizioni:

-  **Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
-  **Non commerciale** — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
-  **Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Esempi di vc n-dimensionali

Ci sono fenomeni aleatori che forniscono, come risultato di una estrazione, non un numero, ma un vettore:

- la determinazione con metodi topografici delle coordinate planimetriche o planoaltimetriche di un punto ha come risultato un vettore a due o tre componenti;
- la determinazione con GPS delle coordinate di un punto ha come risultato un vettore a 3 componenti;
- la compensazione di una rete (sia essa una rete di livellazione, una rete topografica classica o GPS) fornisce come risultato un vettore avente un numero anche grande di componenti.

Funzione densità di probabilità; probabilità di un insieme

Consideriamo la vc $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$. Ad essa è associata, salvo casi eccezionali, una funzione densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ si ha che

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_{\mathbf{u} \in A} d\mathbf{u} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Domanda. *Non è sufficiente considerare \mathbf{X} un aggregato di n vc monodimensionali e trattare ciascuna di esse individualmente? No, perché tale approccio trascura le correlazioni fra le varie componenti.*

Media, varianza e covarianza

La componente i -esima della vc \mathbf{X} ha media

$$\mu_i = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} u_i f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Le diverse componenti possono essere raccolte nel vettore n -dimensionale delle medie

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^t$$

La componente i -esima della vc \mathbf{X} ha varianza

$$\sigma_i^2 = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} (u_i - \mu_i)^2 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

La covarianza fra la componente i -esima e la j -esima è definita come

$$\sigma_{ij} = \int_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} d\mathbf{u} (u_i - \mu_i)(u_j - \mu_j) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$$

Vale evidentemente $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ per la commutatività del prodotto.

La matrice di varianza-covarianza

Varianze e covarianze si raccolgono nella matrice di varianza-covarianza.

$$\mathbf{C}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ & & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

La matrice è evidentemente simmetrica ed è quindi sufficiente considerarne una parte.

Coefficiente di correlazione lineare

Il coefficiente di correlazione lineare fra la componente i -esima e la j -esima è definito come

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Si tratta di una grandezza normalizzata, che stima la correlazione fra due vc indipendentemente dall'unità di misura.

Il coefficiente di correlazione lineare ρ prende valori nell'intervallo $[-1,1]$; valori prossimi a zero dicono correlazione inesistente; valori vicini a 1 in modulo dicono correlazione elevata. Valori positivi indicano una proporzionalità diretta; valori negativi indicano una proporzionalità inversa.

La densità di probabilità normale n–dimensionale

La densità di probabilità monodimensionale

$$f_N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Consideriamo ora la vc $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$ a n dimensioni. Essa è distribuita come una normale se

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (2)$$

dove $|\boldsymbol{\Sigma}|$ indica il determinante della matrice. La formula (2) è una generalizzazione della (1).

La densità di probabilità normale n-dimensionale

Dimostriamo che la formula (2) è una generalizzazione della (1). Nel caso unidimensionale si ha

$$n = 1$$

$$\Sigma = [\sigma^2]$$

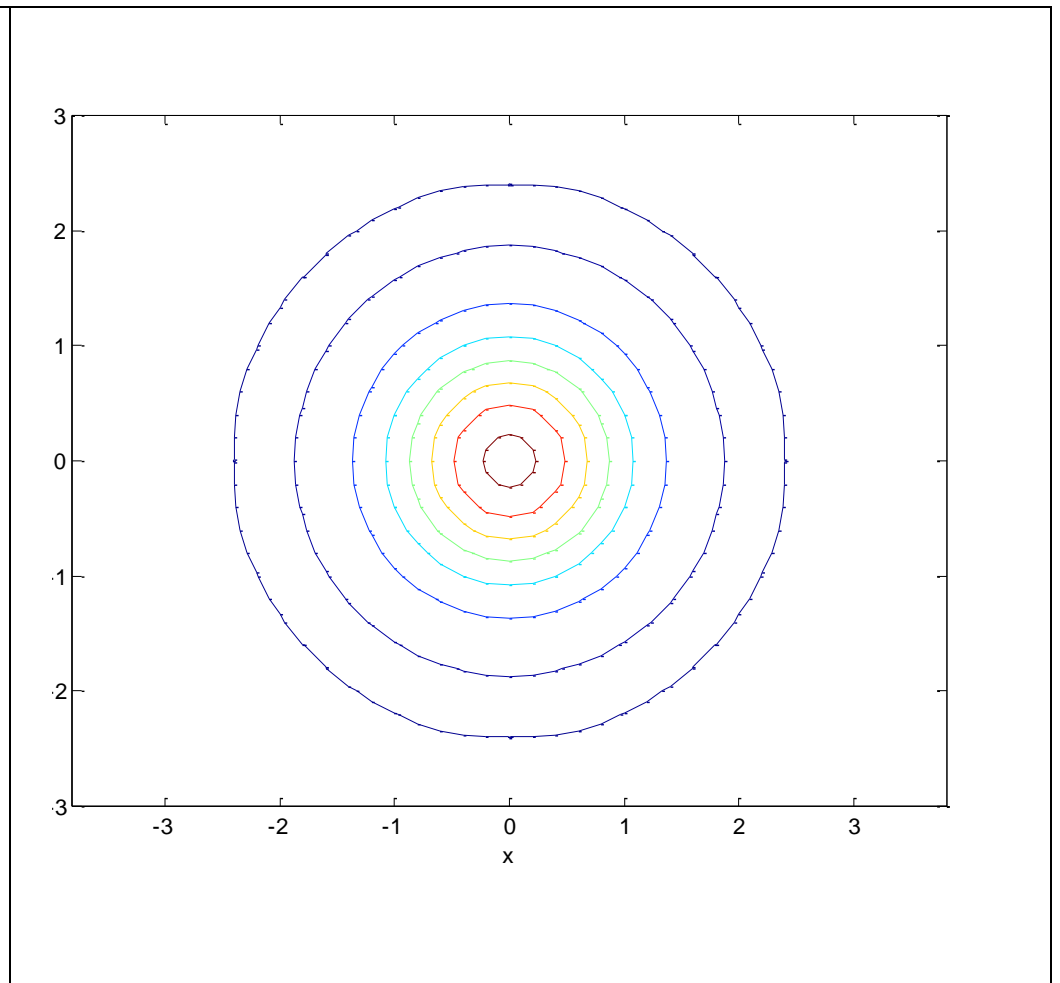
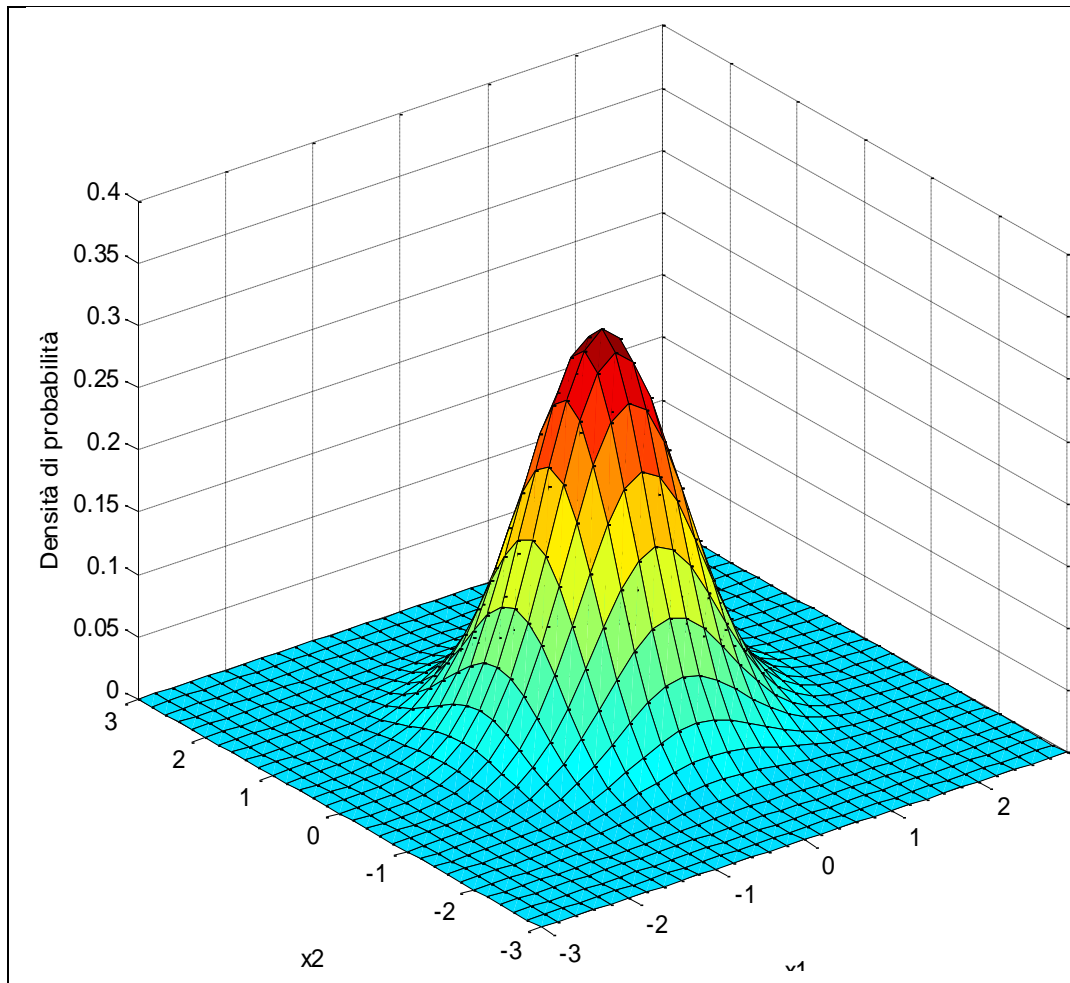
$$|\Sigma|^{1/2} = (\sigma^2)^{1/2} = \sigma$$

$$\Sigma^{-1} = \sigma^{-2}$$

$$(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu) = \sigma^{-2} (x - \mu)^t (x - \mu) = \sigma^{-2} (x - \mu)^2$$

CVD

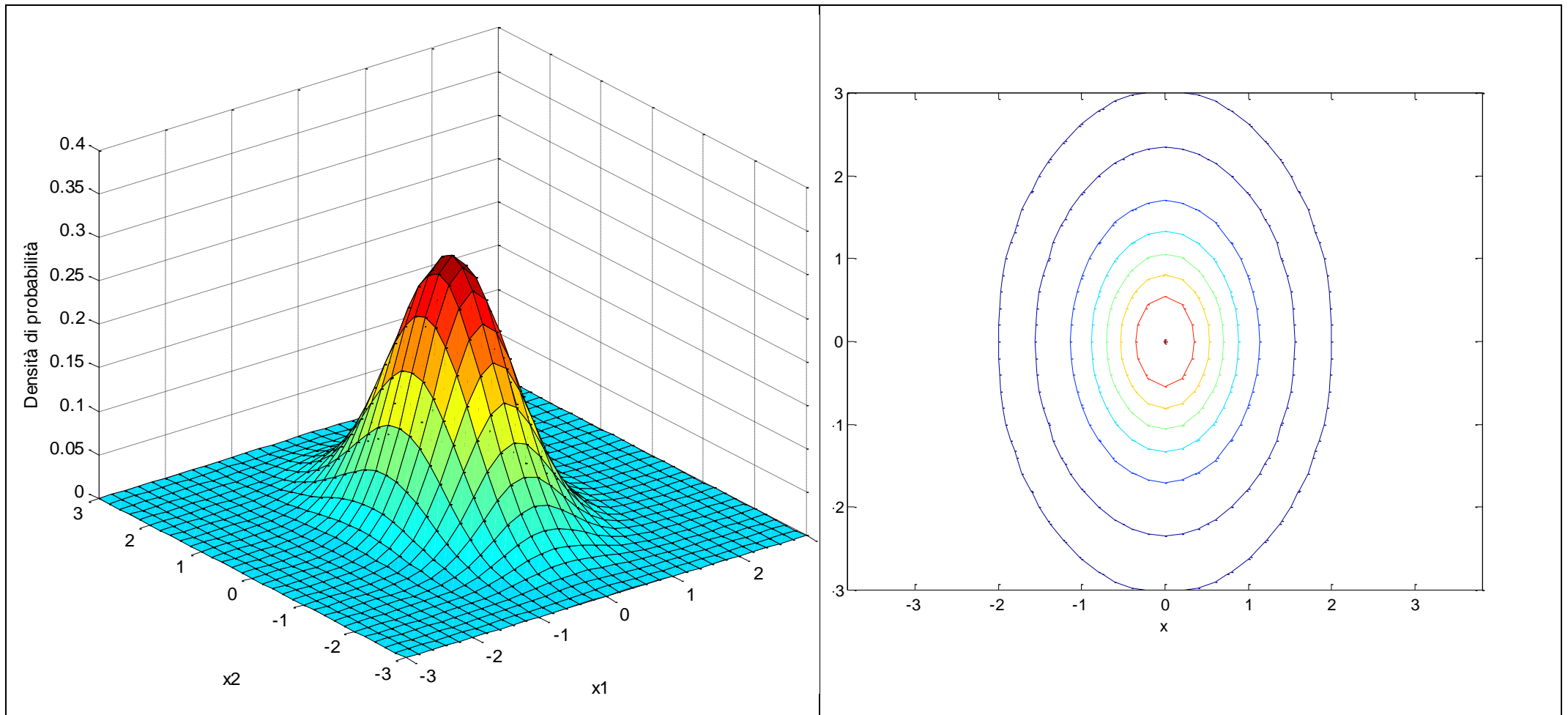
Esempi – 1



[grafico_normale_2d_2.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

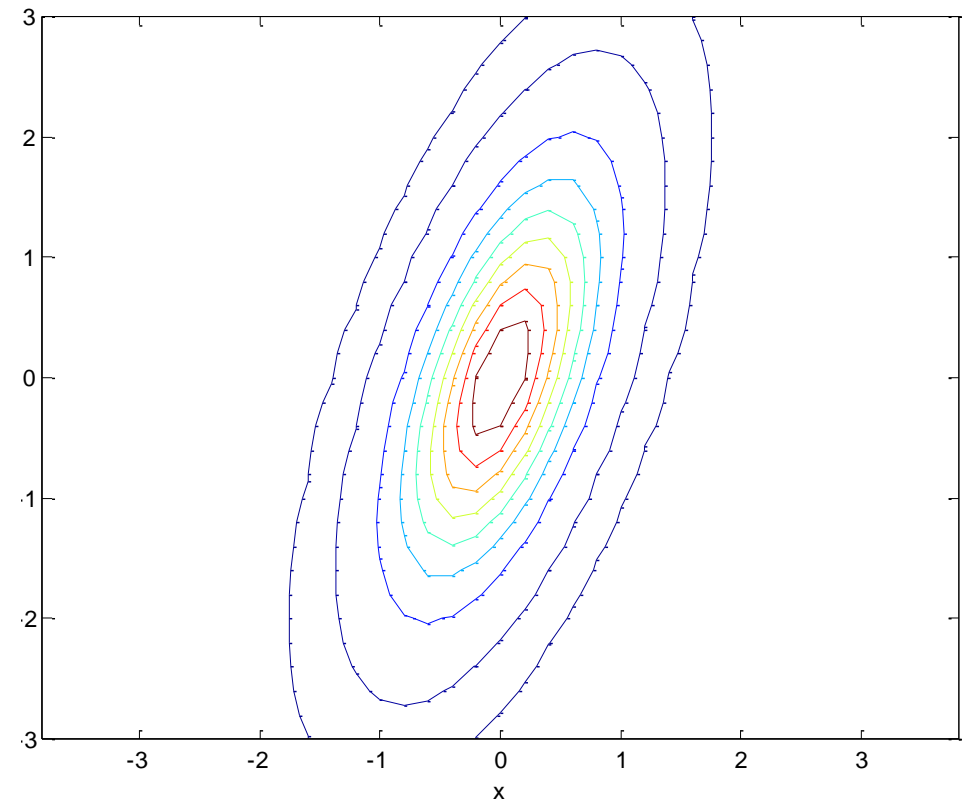
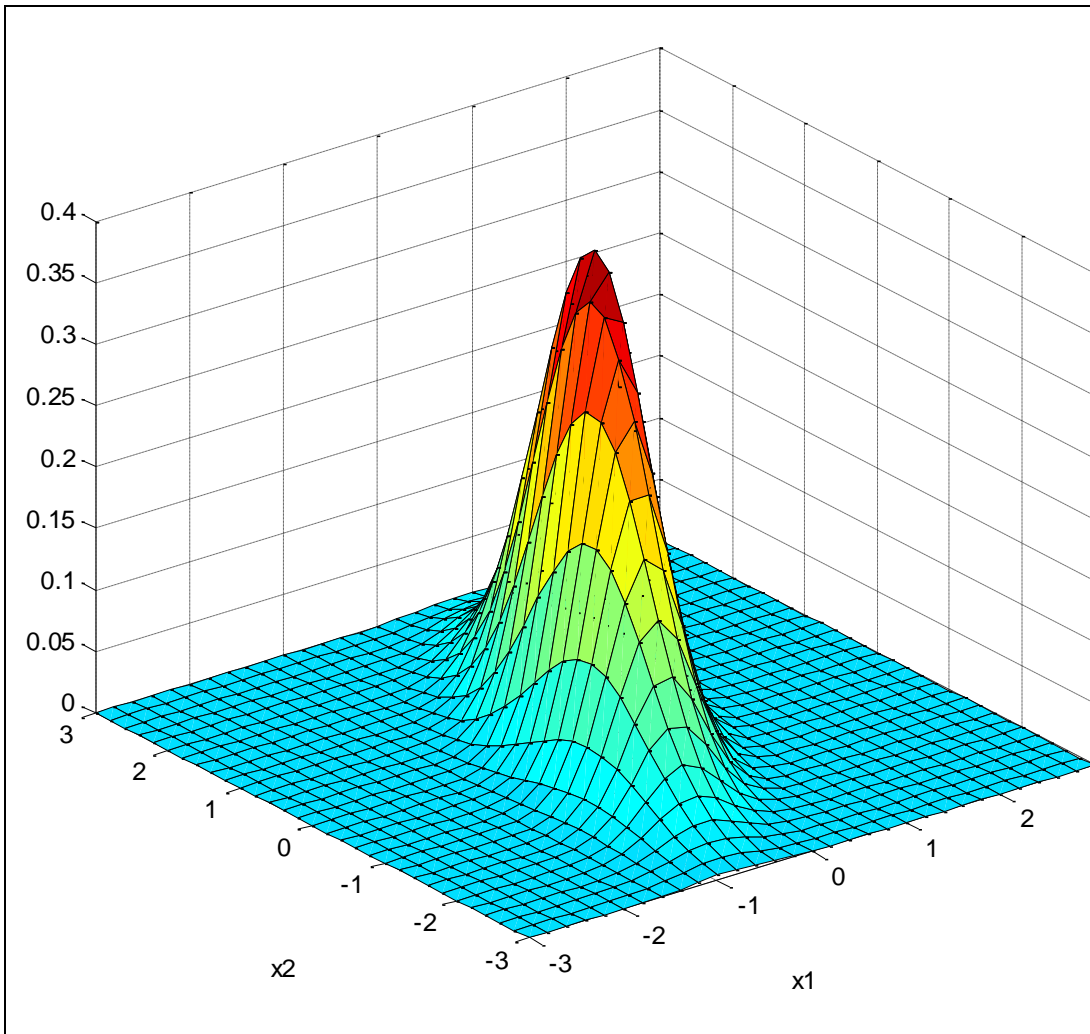
Esempi – 2



[grafico_normale_2d_3.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Esempi – 3



[grafico_normale_2d_1.m]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.30 \\ 0.30 & 1.00 \end{bmatrix}$$