



## Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

email: [vittorio.casella@unipv.it](mailto:vittorio.casella@unipv.it)



# Distribuzioni di probabilità sulla retta

# Licenza


La presentazione che segue è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.






Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 Italia

Tu sei libero:

-  di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera
-  di modificare quest'opera

Alle seguenti condizioni:

-  **Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
-  **Non commerciale** — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
-  **Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

## Le misure di precisione come fenomeni aleatori

---

Le misure di precisione sono certamente fenomeni aleatori

Consideriamo ad esempio la misura di un angolo con un teodolite elettronico: l'insieme degli eventi elementari è finito ma davvero molto grande: i numeri con 4 cifre decimali compresi fra 0 e 400

Gli statistici hanno capito che è più semplice pensare che gli eventi elementari per una misura di precisione siano tutti i numeri reali

IN tale quadro non ha senso parlare di probabilità che una ripetizione di una misura dia un certo numero; ciò che interessa è la probabilità che una misura cada in un intervallo  $[a, b]$

Se per un certo fenomeno aleatorio si conosce la probabilità di ogni intervallo  $[a, b]$ , quel fenomeno è descrivibile nei termini di una variabile casuale continua

$X$

## La variabili casuali continue

---

Quando si conosce la probabilità di ogni intervallo del tipo

$$]-\infty, c] \quad \forall c$$

Si dice di essere in presenza di un vc continua  $X$ .

Resta definita la *funzione di distribuzione*

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_X(c) := P\{X \in ]-\infty, c]\}$$

che, per come è definita, ha le seguenti proprietà

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} F_X(c) = 0$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F_X(c) = 1 \tag{1}$$

$$F_X(a) \leq F_X(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

## La variabili casuali continue - 2

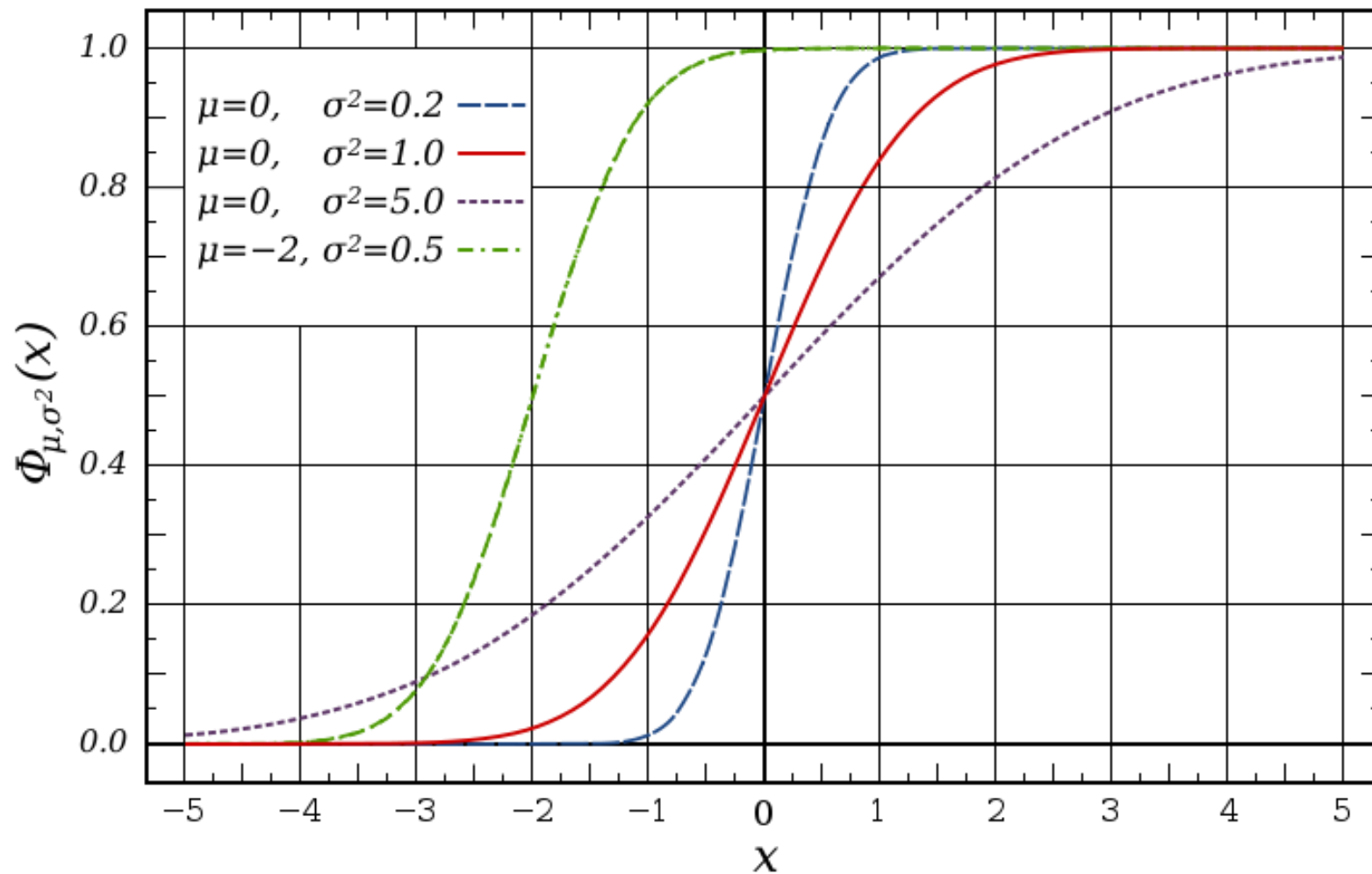
---

Viceversa, ogni funzione avente le caratteristiche (1) definisce una vc continua. Esse sono certamente infinite.

La  $F_x$  consente di calcolare la probabilità di un qualunque intervallo  $[a, b]$

$$P\{X \in [a, b]\} = F_x(b) - F_x(a) \quad (2)$$

## Esempi di funzioni di distribuzione per vc continue



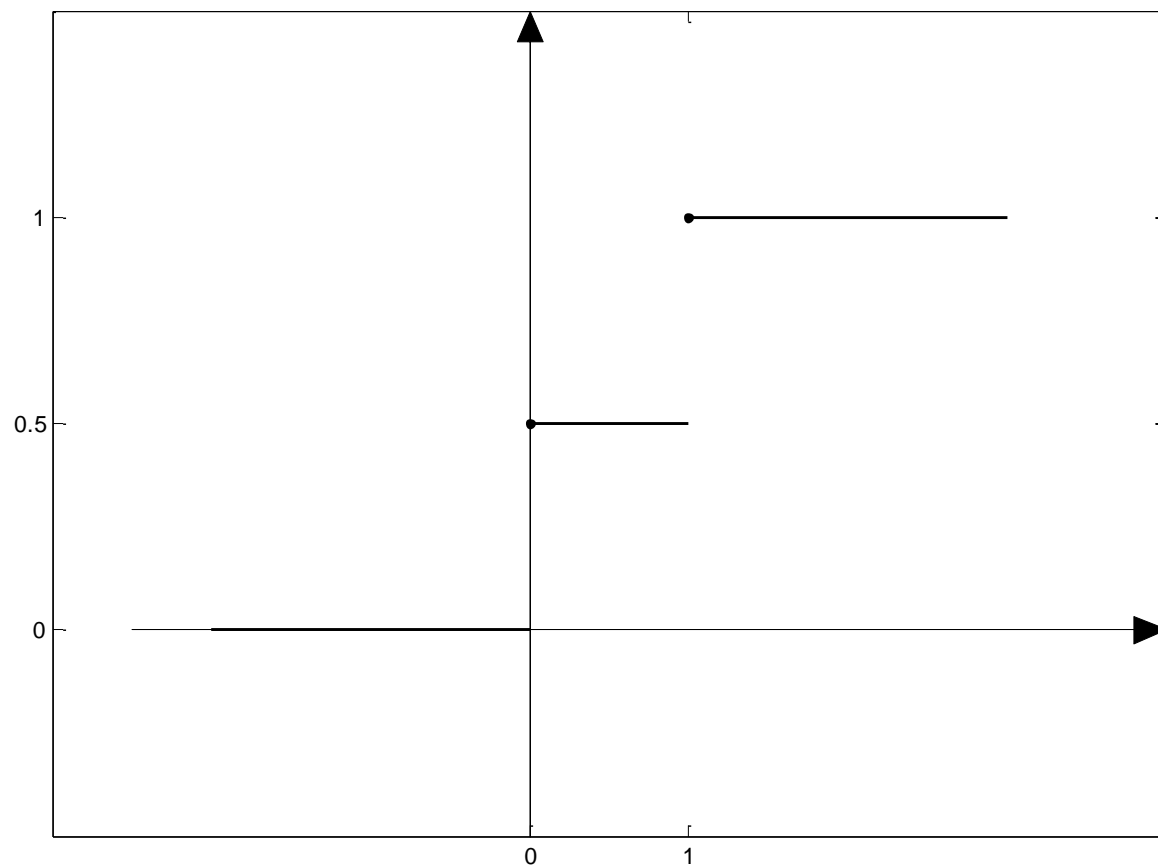
## Esempi di funzioni di distribuzione per vc discrete ma immerse nella retta

---

Funzione di distribuzione per la vc moneta in cui è stata fatta l'associazione

Testa->0

Croce->1



## La funzione densità di probabilità

---

Se la  $F_X$  di una vc  $X$  è differenziabile allora si definisce la *funzione densità di probabilità*  $f_X$  nel modo seguente

$$f_X(c) := \frac{d}{dc} F_X(c)$$

Che può essere invertita per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F_X(c) = \int_{-\infty}^c du f_X(u) \quad (3)$$

La densità di probabilità ha certe proprietà

$$f_X(c) \geq 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du f_X = 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{|u| \rightarrow +\infty} f_X = 0 \quad (4)$$



## La funzione densità di probabilità – 2

---

Viceversa ogni funzione avente le proprietà (4) definisce una vc continua.

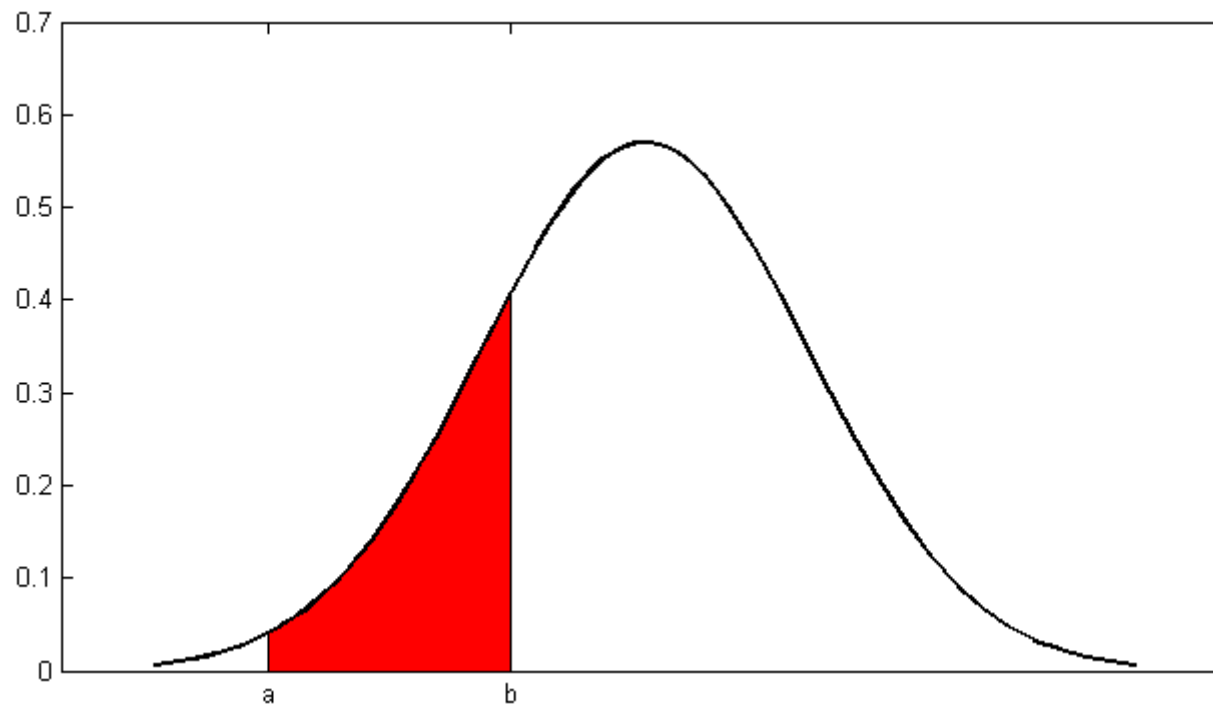
Dalla (2) e (3) si ha

$$\begin{aligned}P\{X \in [a, b]\} &= F_X(b) - F_X(a) = \\ &= \int_{-\infty}^b du f_X(u) - \int_{-\infty}^a du f_X(u) = \\ &= \int_a^b du f_X(u)\end{aligned}$$

Probabilità come area sottesa

## La funzione densità di probabilità – 3

---



[grafico\_area\_sottesa.png]

$$P\{X \in [a, b]\} = \int_a^b du f_X(u)$$

# Esempi delle densità di probabilità e delle corrispondenti funzioni di distribuzione

