Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

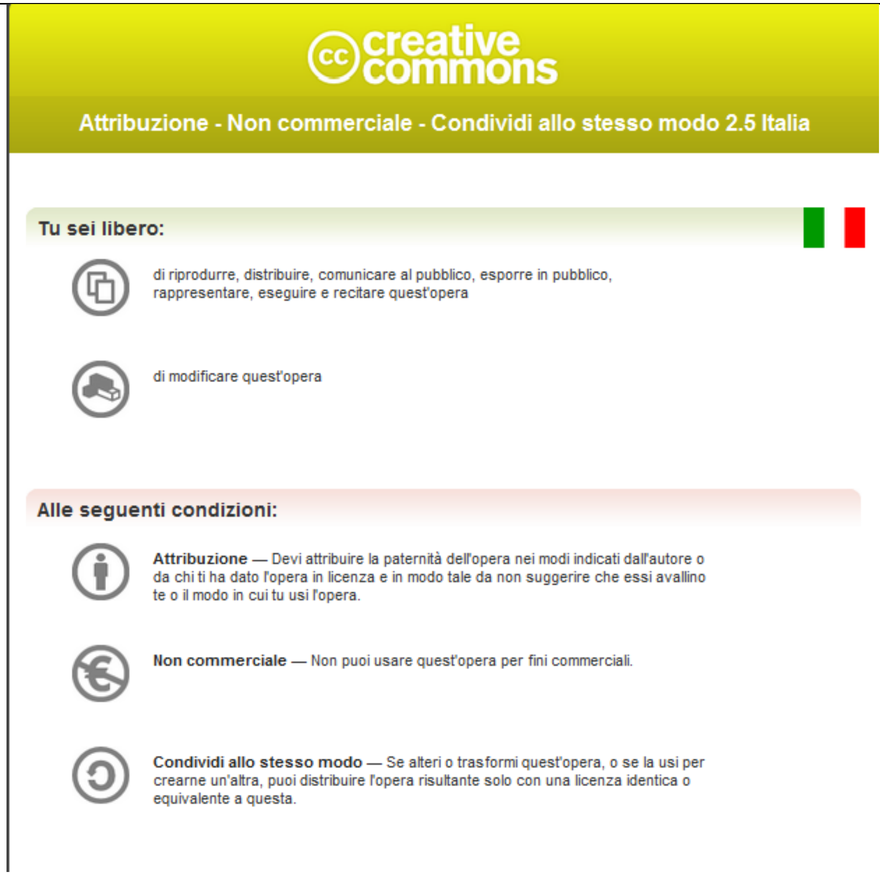
email: vittorio.casella@unipv.it

La poligonale

Licenza

La presentazione che segue è © 2011 Vittorio Casella (vittorio.casella@gmail.com) disponibile nella modalità **creative commons** (www.creativecommons.org)

Se usi figure o parti della presentazione all'interno di tue presentazioni, articoli o altri scritti, devi sempre citarne l'origine.



Introduzione

La poligonale è un metodo topografico rapido per la determinazione delle coordinate tridimensionali di punti *stazionabili* disposti lungo una spezzata.

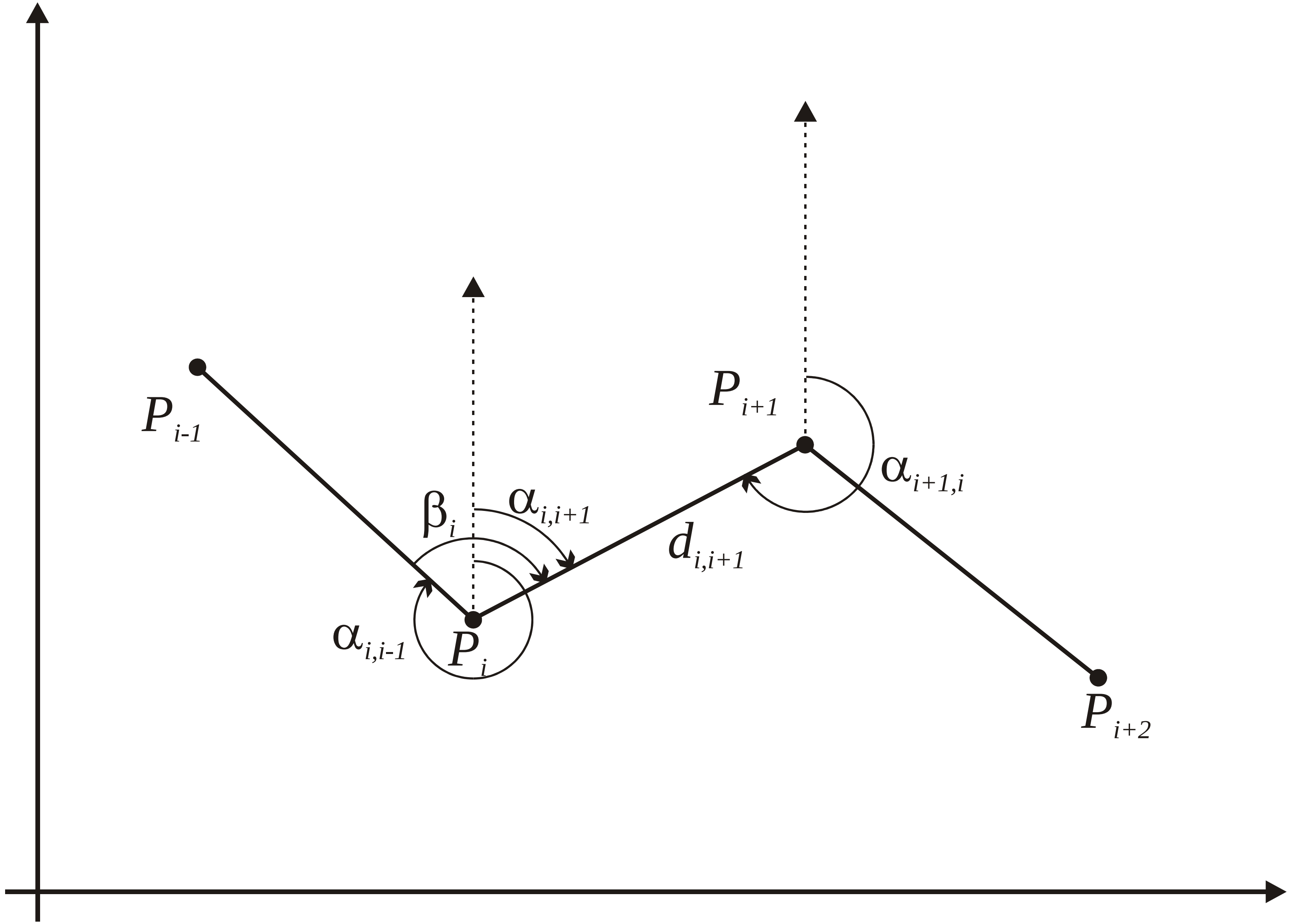
Ci deve essere intervisibilità fra coppie di punti consecutivi.

I punti si definiscono *stazionabili* se è possibile mettere in stazione sulla loro verticale un cavalletto; i punti della facciata di un edificio, ad esempio, non sono stazionabili.

La misura di una poligonale necessita della misura di angoli e distanze, dunque richiede l'uso di un teodolite dotato di distanziometro, cosa che attualmente costituisce quasi la regola.

La poligonale è un metodo iterativo in quanto richiede la conoscenza delle coordinate di due punti consecutivi iniziali (tale affermazione, vera nella sostanza, verrà meglio specificata in seguito) e consente di determinare da questi le coordinate di un terzo punto; dal secondo e terzo si può ricavare il quarto, eccetera.

Esempio



[Calcolo_poligonale.cdr,wmf]

Simbologia

$d^*_{i,j}$	Distanza inclinata fra i punti P_i e P_j
$d_{i,j}$	Distanza orizzontale fra i punti P_i e P_j
$\alpha_{i,j}$	Angolo di direzione del segmento $\overrightarrow{P_iP_j}$
β_i	Angolo orizzontale, misurato in senso orario, formato dai segmenti $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$
$\lambda_{i,j}$	Lettura al cerchio orizzontale con lo strumento su P_i e osser-vando P_j
$\varphi_{i,j}$	Lettura al cerchio verticale con lo strumento su P_i e osser-vando P_j
h_i^s	Altezza dello strumento in stazione su P_i
h_i^p	Altezza del prisma in stazione su P_j

Terminologia

Punto di stazione

Punto indietro

Punto avanti

Lato indietro

Lato avanti

Angolo di direzione indietro

Angolo di direzione avanti

Le quantità misurate

Supponiamo ora di conoscere le coordinate dei punti P_{i-1} e P_i. Da esse si può ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i-1}$. Abbiamo inoltre ipotizzato che sia possibile mettere in stazione un teodolite sul punto P_i e osservare prima P_{i-1} (punto indietro) e poi P_{i+1} (punto avanti). Il risultato di queste collimazioni è la misura delle seguenti grandezze

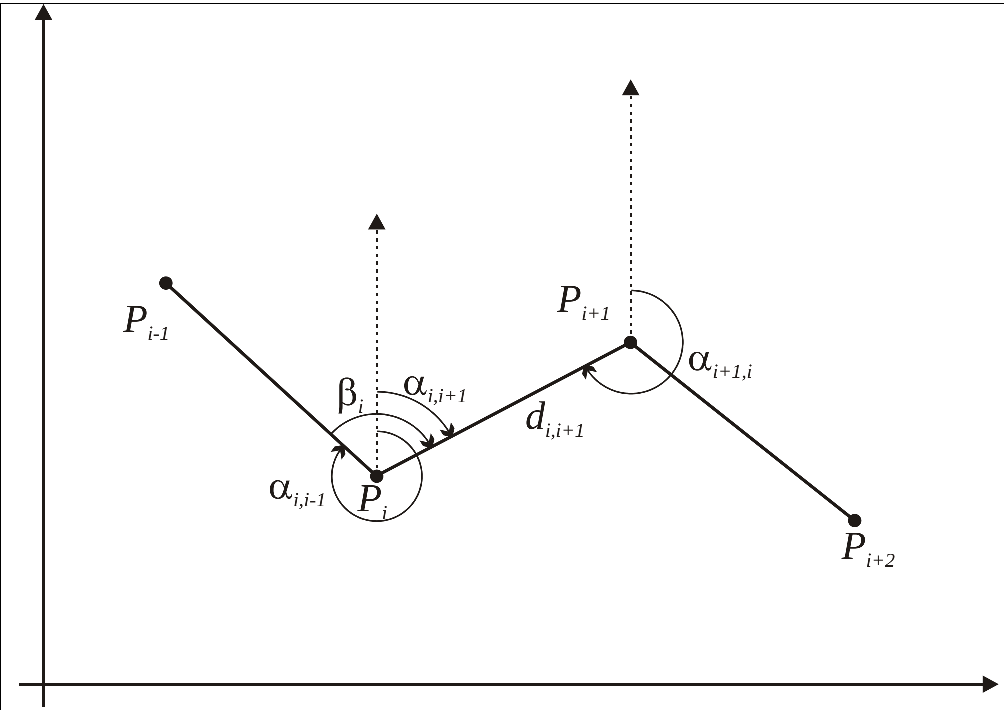
guardando il punto indietro: $d^*_{i,i-1}$, $\lambda_{i,i-1}$ e $\varphi_{i,i-1}$

guardando il punto avanti: $d^*_{i,i+1}$, $\lambda_{i,i+1}$ e $\varphi_{i,i+1}$

Devono essere misurate inoltre le altezze strumentali h_i^s, h_{i-1}^p e h_{i+1}^p.

Convenzioni – Il verso di percorrenza

La poligonale ha un verso di percorrenza, deciso dal rilevatore (il quale tiene conto di tale scelta quando individua i punti indietro e i punti avanti delle varie stazioni), e che i nomi *logici* assegnati ai punti in queste note tengono conto di tale verso: il punto P_2 precede P_3, eccetera. Nel casi pratici è possibile che i punti costituenti la poligonale abbiano una denominazione assegnata in precedenza con altri criteri, che potrebbe essere anche in contrasto con quella logica.

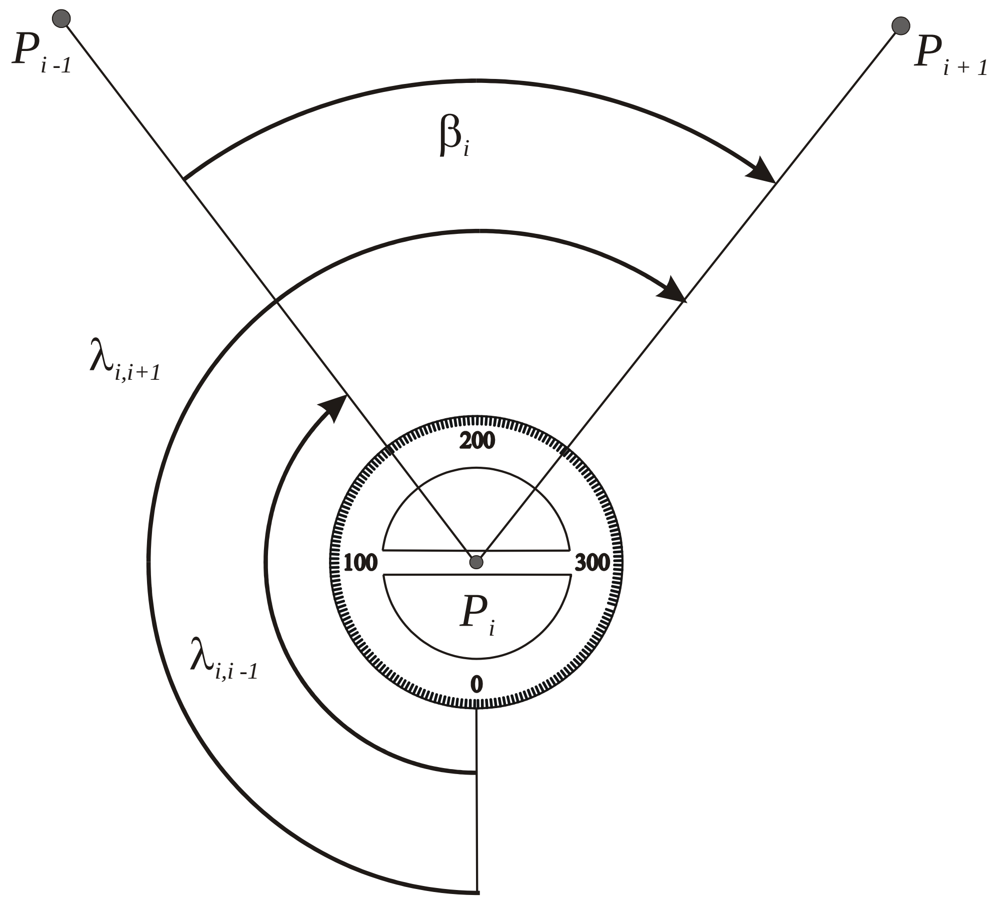


Per il calcolo della poligonale non si dovrà tenere conto della denominazione preesistente, ma si dovranno assegnare ai punti, almeno mentalmente, i nomi logici

Convenzioni – Angoli misurati in senso orario

Un'altra convenzione da fissare riguarda l'angolo interno β_i, formato dai segmenti $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$, in quanto vi sono due possibili candidati. La scelta adottata per convenzione è quella oraria, dunque β_i è l'angolo che il segmento *indietro* $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ descriverebbe se ruotasse in senso orario fino a sovrapporsi al segmento *avanti*, $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$..

La convenzione oraria è adottata dalla stragrande maggioranza degli strumenti topografici attuali, che dispongono appunto di goniometri orari.

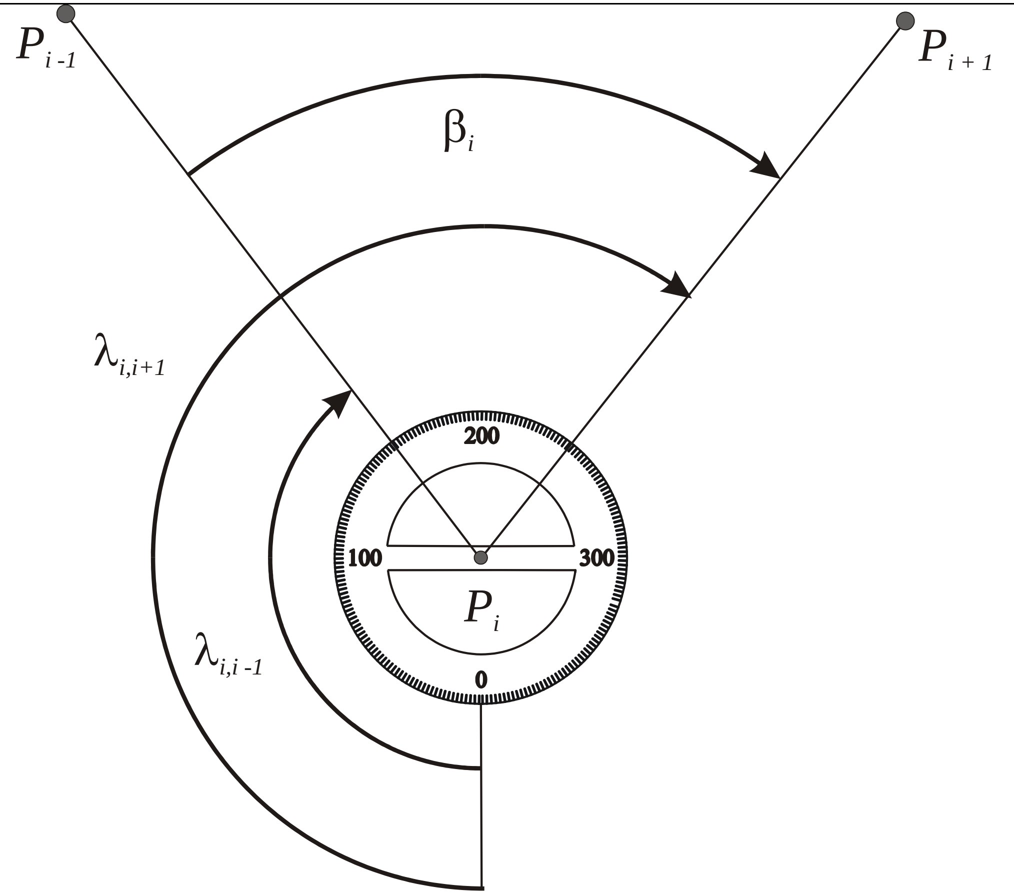


[poligonale_calcolo_angolo_interno.cdr,wmf]

Calcolo dell’angolo interno

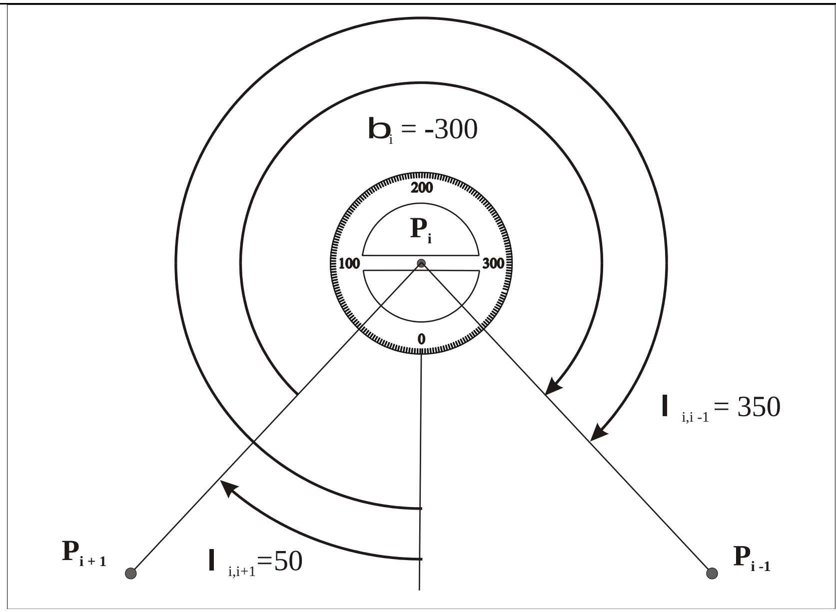
Nel quadro delle convenzioni fissate, per l’angolo interno e per il goniometro degli strumenti, l’angolo interno α_i può essere ottenuto da

$$\beta_i = \lambda_{i,i+1} - \lambda_{i,i-1} \qquad (1)$$



[poligonale_calcolo_angolo_interno.cdr,wmf]

Casi possibili

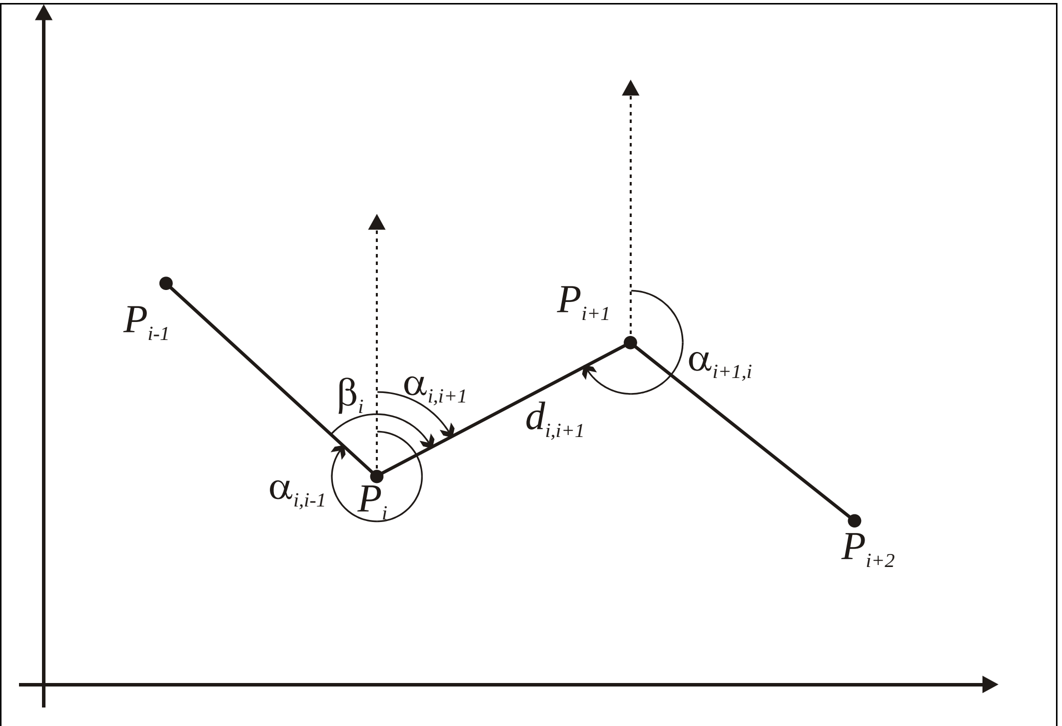
La particolare posizione dell'origine del goniometro può portare ad un angolo negativo, che deve essere normalizzato	 [poligona-le_calcolo_angolo_interno_2.cdr,wmf]

Angolo di direzione del segmento avanti

Noto β_i, si può ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i+1}$,

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i,i-1} + \beta_i \qquad (2)$$

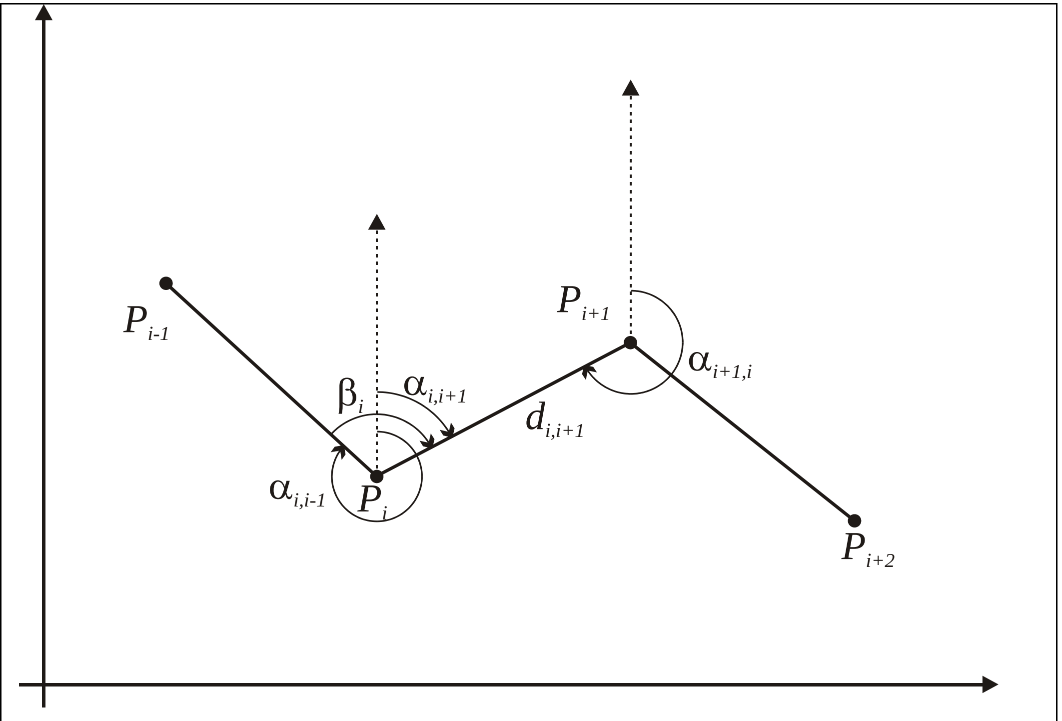
Anche $\alpha_{i,i+1}$ potrebbe richiedere la normalizzazione.



Distanza topografica rispetto al punto avanti

Si ha

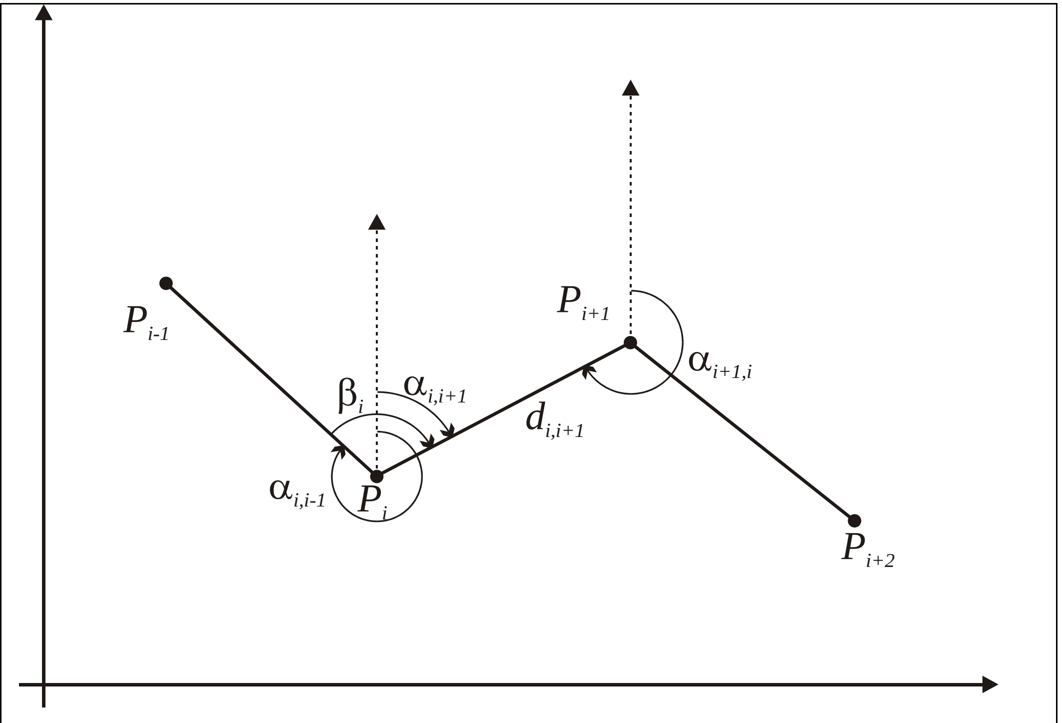
$$d_{i,i+1} = d^*_{i,i+1} \sin\varphi_{i,i+1} \qquad (3)$$



Determinazione delle coordinate cartesiane del punto avanti

A questo punto si conoscono le coordinate polari di P_{i+1} rispetto a P_i dunque si può concludere

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + d_{i,i+1} \sin\alpha_{i,i+1} \\
y_{i+1} &= y_i + d_{i,i+1} \cos\alpha_{i,i+1} \\
z_{i+1} &= z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$



Le formule presentate fanno riferimento al generico punto *i*-esimo per sottolineare come esse possano essere adottate ripetutamente e identicamente per calcolare progressivamente i punti P_3, P_4, P_5, eccetera.

Poligonale 2D e 3D

Le formule

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + d_{i,i+1} \sin\alpha_{i,i+1} \\
y_{i+1} &= y_i + d_{i,i+1} \cos\alpha_{i,i+1} \\
z_{i+1} &= z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Risolvono il problema della poligonale per il punto P_{i+1}. Le formule complete devono essere impiegate per il calcolo della poligonale nello spazio, mentre sono sufficienti le prime due relazioni delle (5) per il calcolo della poligonale nel piano.

Poligonale 2D e 3D – 2

$$x_{i+1} = x_i + d_{i,i+1} \sin\alpha_{i,i+1}$$
$$y_{i+1} = y_i + d_{i,i+1} \cos\alpha_{i,i+1}$$
$$z_{i+1} = z_i + h_i^s - h_{i+1}^p + d_{i,i+1} \cot\left(\varphi_{i,i+1}\right)$$

Si potrebbe pensare erroneamente che altezze strumentali e angoli verticali entrino nel calcolo solo nel caso di poligonali 3D, ma questo non è vero in quanto, anche per la soluzione 2D, è necessario misurare l'angolo verticale per ricavare la distanza topografica da quella inclinata. Tuttavia nel caso bidimensionale le altezze strumentali, che costituiscono la maggior fonte di errori, sono ininfluenti: è sufficiente che strumento e prisma siano posti correttamente sulla verticale dei punti misurati.

Calcolo dei punti successivi

Con la stessa metodologia mostrata.

Ma esiste la possibilità, una volta inizializzato l'algoritmo, di evitare il calcolo dell'angolo di direzione del segmento indietro; supponiamo che, per il calcolo delle coordinate di P_3, sia stato ricavato l'angolo di direzione $\alpha_{2,1}$ dalle coordinate dei punti P_1 e P_2. Passando ora al calcolo di P_4, si potrebbe certamente ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{3,2}$ dalle coordinate, ora note, di P_2 e P_3; tuttavia l'angolo di direzione cercato $\alpha_{3,2}$ è più facilmente ricavabile dall'angolo di direzione $\alpha_{2,3}$, calcolato per la determinazione di P_3, nel modo usuale

$$\alpha_{3,2} = \alpha_{2,3} + 200$$

Problemi di qualità e controllo

Il controllo di qualità ha due scopi essenziali:

- stimare l'entità degli errori accidentali;
- individuare ed eliminare gli errori grossolani.

La metodologia rigorosa per affrontare entrambi i problemi è la compensazione, mentre la metodologia di calcolo esposta in queste note è piuttosto debole sotto questo aspetto. Si consideri ad esempio che se, collimando un punto, si commette un errore di 100 grad nella lettura al cerchio orizzontale, tutti i punti della poligonale collimati successivamente risentiranno di tale errore.

Poligonale chiusa

Il miglior strumento di controllo empirico è la *chiusura della poligonale.* Supponendo che i vertici siano n, si deve fare in modo che l'ultimo punto sia prossimo al primo, e che i due siano intervisibili. In questo modo è possibile trattare il punto P_1 come un punto supplementare, denominato, P_{n+1}, che deve essere rilevato facendo stazione su P_n. Le coordinate $\mathbf{x}_{n+1}$ e $\mathbf{x}_1$ dovrebbero coincidere, nominalmente, ma in pratica ciò non si verifica. Piccoli scostamenti sono accettabili, in quanto dovuti agli errori accidentali di misura; tali differenze consentono di stimare, anche se in modo non rigoroso, la precisione delle coordinate calcolate. Scostamenti significativi indicano invece la presenza di errori grossolani che devono essere individuati e eliminati.

Poligonale vincolata

Purtroppo non è sempre possibile, o agevole, chiudere una poligonale, a causa della conformazione del territorio su cui si opera. Una seconda possibilità di controllo è legata alla conoscenza a priori delle coordinate dei punti estremi di una poligonale aperta. Capita talvolta che misure precedenti abbiano determinato, con metodologia topografica classica o GPS, i vertici estremi di una poligonale ancora da rilevare. In tal caso il controllo può essere effettuato verificando che le coordinate dell'ultimo vertice, determinate dalla poligonale, non differiscano significativamente dalle coordinate note a priori.

Esempio 1

Nome punto	x	y	z
P1	208.10	201.66	99.16
P2	282.43	282.56	100.28

Il libretto di campagna relativo alle stazioni effettuate è:

Punto stazione	Punto osservato	h_s	h_p	λ	φ	d^*
P2	P1	1.520	1.390	281.5936	100.7243	109.870
P2	P3	1.520	1.270	379.8971	99.7388	104.796
P3	P2	1.550	1.370	169.4301	100.5224	104.798
P3	P4	1.550	1.570	273.1307	100.6600	99.360
P4	P3	1.380	1.320	166.1447	99.3657	99.359
P4	P1	1.380	1.470	268.7148	100.3885	108.166

Il libretto riporta, nell'ordine: nome punto stazionato, nome punto collimato altezza strumentale, altezza prisma, lettura cerchio orizzontale, lettura cerchio verticale, distanza inclinata. Gli angoli sono misurati in gradi centesimali. Coordinate e distanze in metri.
Calcolare le coordinate 3D dei punti incogniti.

Nome punto	x	y	z
P3	203.40	351.38	100.96
P4	133.91	280.37	99.91

Esempio 1 - 2

Determiniamo l'angolo di direzione *indietro* α_{21}

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 208.10 - 282.43 = -74.33$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 201.66 - 282.56 = -80.90$$

$$\alpha'_{21} = \arctan\frac{\Delta x}{\Delta y} = 47.3072$$

$$\alpha_{21} = \alpha'_{21} + 200 = 247.3072$$

Determiniamo l'angolo interno β_2

$$\beta_2 = \lambda_{23} - \lambda_{21} = 379.8971 - 281.5936 = 98.3035$$

Determiniamo l'angolo di direzione *avanti* α_{23}

$$\alpha_{23} = \alpha_{21} + \beta_2 = 345.6107$$

Esempio 1 - 3

Determiniamo la lunghezza topografica del segmento avanti

$$d_{23} = d_{23}^{*} * \sin\varphi_{23} = 104.796 * \sin(99.7388) = 104.795$$

Concludiamo trovando le coordinate di P_3

$$x_3 = x_2 + d_{23} \sin(\alpha_{23}) = 282.43 + 104.795 \sin(345.6107) =$$
$$= 203.40$$

$$y_3 = y_2 + d_{23} \cos(\alpha_{23}) = 282.56 + 104.795 \cos(345.6107) =$$
$$= 351.38$$

$$z_3 = z_2 + h_2^S - h_3^p + d_{23} \cot(\varphi_{23}) = 100.28 + 1.52 - 1.27 +$$
$$+ 104.795 \cot(99.7388) =$$
$$= 100.96$$

Esempio 2

Nome punto	x	y	z
P1	710.138	668.500	94.576
P2	591.733	622.022	86.859

Il libretto di campagna relativo alle stazioni effettuate è:

Punto stazione	Punto osservato	h_s	h_p	λ	φ	d^*
P1	P5	1.469	1.463	180.7500	100.5198	89.412
P1	P2	1.469	1.469	32.0505	103.8575	127.434
P2	P1	1.469	1.469	399.0408	96.1425	127.434
P2	P3	1.469	1.377	72.9967	92.3669	207.863
P3	P2	1.377	1.469	174.1293	107.6331	207.863
P3	P4	1.377	1.393	277.8340	102.3411	210.981
P4	P3	1.393	1.377	210.5595	97.6589	210.981
P4	P5	1.393	1.439	303.3033	103.1799	203.151

Esempio 2 - 2

Nome punto	x	y	z
P3	737.33	475.77	111.81
P4	895.15	615.58	104.04
P5	744.21	751.16	93.85

Determiniamo l'angolo di direzione *indietro* α_{21}

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 710.138\text{-}591.733 = 118.405$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 668.500\text{-}622.022 = 46.478$$

$$\alpha'_{21} = \arctan\frac{\Delta x}{\Delta y} = 76.1870$$

$$\alpha_{21} = \alpha'_{21} = 76.1870$$

Esempio 2 - 3

Determiniamo l'angolo interno β_2

$$\beta_2 = \lambda_{23} - \lambda_{21} = \text{ 72.9967-399.0408=-326.0441}$$

che può essere normalizzato

$$\beta_2 \rightarrow \beta_2 + 400 = 73.9559$$

Determiniamo l'angolo di direzione *avanti* α_{23}

$$\alpha_{23} = \alpha_{21} + \beta_2 = 76.1870 + 73.9559 = 150.1430$$

Determiniamo la lunghezza topografica del segmento avanti

$$d_{23} = d_{23}^{*} * \sin\varphi_{23} = 207.863 * \sin(92.3669) = 206.371$$

Esempio 2 - 4

Determiniamo le coordinate di P_3

$$x_3 = x_2 + d_{23}\sin(\alpha_{23}) = 591.733 + 206.371\sin(150.1430) =$$

$$= 737.331$$

$$y_3 = y_2 + d_{23}\cos(\alpha_{23}) = 622.022 + 206.371\cos(150.1430) =$$

$$= 475.768$$

$$z_3 = z_2 + h_2^S - h_3^p + d_{23}\cot(\varphi_{23}) = 86.859\text{+}1.469\text{-}1.377 +$$

$$+ 206.371\cot(92.3669) =$$

$$= 111.814$$

Esempio 2 - 5

Determiniamo P_4. Angolo di direzione indietro

$$\alpha_{32} = \alpha_{23+200} = 150.1430 + 200 = 350.1430$$

Angolo interno

$$\beta_3 = 103.7047$$

Angolo di direzione avanti

$$\alpha_{34} = 53.8477$$

Lunghezza topografica del segmento avanti

$$d_{34} = 210.838$$

Coordinate

$$x_4 = 895.149$$

$$y_4 = 615.576$$

$$Z_4 = 104.041$$

Esempio 2 - 6

Determiniamo P_5. Angolo di direzione indietro

$\alpha_{43} = 253.8477$

Angolo interno

$\beta_4 = 92.7438$

Angolo di direzione avanti

$\alpha_{45} = 346.5915$

Lunghezza topografica del segmento avanti

$d_{45} = 202.898$

Coordinate

$x_5 = 744.207$

$y_5 = 751.163$

$Z_5 = 93.852$

Inquadramento della poligonale

Una poligonale può essere inquadrata in un sistema di riferimento locale oppure in uno generale. Si opera in un riferimento locale quando lo scopo della poligonale è unicamente determinare le coordinate di punti in modo che siano coerenti fra di loro, senza alcuna connessione al contesto generale. Se si rilevano in questo modo i vertici di un appezzamento di terreno, sarà poi possibile ricavare dalle loro coordinate le distanze fra i vari vertici, l'area e il perimetro. Tali coordinate non forniranno tuttavia alcuna informazione su dove si trovi, nel contesto del territorio nazionale, l'appezzamento rilevato. Se lo scopo del rilevamento è proprio quest'ultimo, come nel caso di un accatastamento, sarà necessario procedere nella seconda modalità, cioè fare riferimento a un sistema di riferimento generale.

Inquadramento della poligonale - 2

Quando una **poligonale** viene **inquadrata localmente**, il sistema di riferimento viene definito durante i calcoli. Questa fase richiede la comprensione dell'importante *nesso fra invarianza e indeterminazione*. Le misure topografiche che si fanno per rilevare una poligonale sono invarianti rispetto a una traslazione nello spazio e a una rotazione nel piano, corrispondenti a un totale di 4 gradi di libertà. Ciò significa ad esempio che le misure topografiche fatte per connettere certi punti fornirebbero gli stessi valori, a meno degli errori di misura, anche se i punti venissero traslati di una quantità arbitraria.

Inquadramento della poligonale - 3

All’invarianza corrisponde un’indeterminazione: se le misure sono invarianti per una traslazione, esse non consentono di fissare tale traslazione. In altri termini esse permettono di determinare la posizione relativa dei punti, ma non consentono di stabilire dove essi, visti come un tutto rigido, si trovino effettivamente. Quando si elaborano misure invarianti per un certo numero di gradi di libertà, è dunque necessario introdurre lo stesso numero di informazioni aggiuntive rispetto alle misure, in modo da fissare le indeterminazioni e ottenere le coordinate.

Inquadramento della poligonale - 4

Il rilevamento topografico, il GPS e la Fotogrammetria offrono importanti e significativi esempi del nesso invarianza-indeterminazione. Nel caso della poligonale è necessario come detto fissare 4 gradi di libertà corrispondenti a una traslazione nello spazio, nel caso di poligonale 3D, (che diventa traslazione nel piano nel caso di poligonale 2D), e a una rotazione nel piano.

La corrispondente indeterminazione può essere fissata in infiniti modi e fra i più usati vi è quello di assegnare al primo punto delle coordinate a piacere

$$P_1 = \left(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)} \right)$$

per fissare la traslazione, e vincolare il secondo vertice a stare sull'asse delle x, ponendo

$$P_2 = \left(x_1 + d_{1,2}, y_1, z_1 + \Delta z_{1,2} \right)$$

Inquadramento della poligonale - 5

Sono ovviamente possibili molte altre scelte, come ad esempio vincolare il secondo vertice a stare sull'asse y, corrispondente alla scelta

$$P_2 = \left(x_1, y_1 + d_{1,2}, z_1 + \Delta z_{1,2}\right)$$

o fissare in modo arbitrario il valore dell'angolo di direzione $\alpha_{1,2}$, corrispondente a

$$P_2 = \left(x_1 + d_{1,2}\sin\left(\alpha_{1,2}\right), y_1 + d_{1,2}\cos\left(\alpha_{1,2}\right), z_1 + \Delta z_{1,2}\right)$$

Una volta determinate le coordinate dei primi due punti, il calcolo può procedere nel modo usuale.

Inquadramento della poligonale - 6

Se si deve inquadrare la poligonale in un sistema di **riferimento generale**, è necessario disporre delle coordinate di almeno due punti. La discussione fatta su invarianza e indeterminazione evidenzia come questa non sia esattamente la condizione necessaria, tuttavia essa rappresenta la situazione operativa più diffusa.

Se due punti sono i primi della poligonale, o, per meglio dire, se è possibile usarli come tali, il problema è ricondotto a quello già affrontato. Se invece i punti occupano posizioni distinte e qualunque della poligonale, sarà necessario operare in due passi: risolvere la poligonale rispetto a un sistema locale creato ad hoc; convertire le coordinate dal sistema locale a quello generale mediante rototraslazione stimata mediante i punti doppi, cioè i punti di cui si conoscono sia le coordinate locali sia quelle generali. Si sottolinea come sia opportuno che due punti di coordinate note costituiscano gli estremi della poligonale, in quanto ciò ne massimizza la capacità di controllo.

Inquadramento della poligonale - 7

Rapporto fra due soluzioni di poligonale corrispondenti agli stessi dati, ma ad i-nizializzazioni diverse

I due insiemi di coordinate sono rototraslati.

TODO

Inizializzazione poligonale

calcolo della stessa con altri inizializzazioni

sovrapposizione delle due soluzioni con rototraslazione

Esempio svolto su inizializzazione

Disegni poligonale con punti doppi