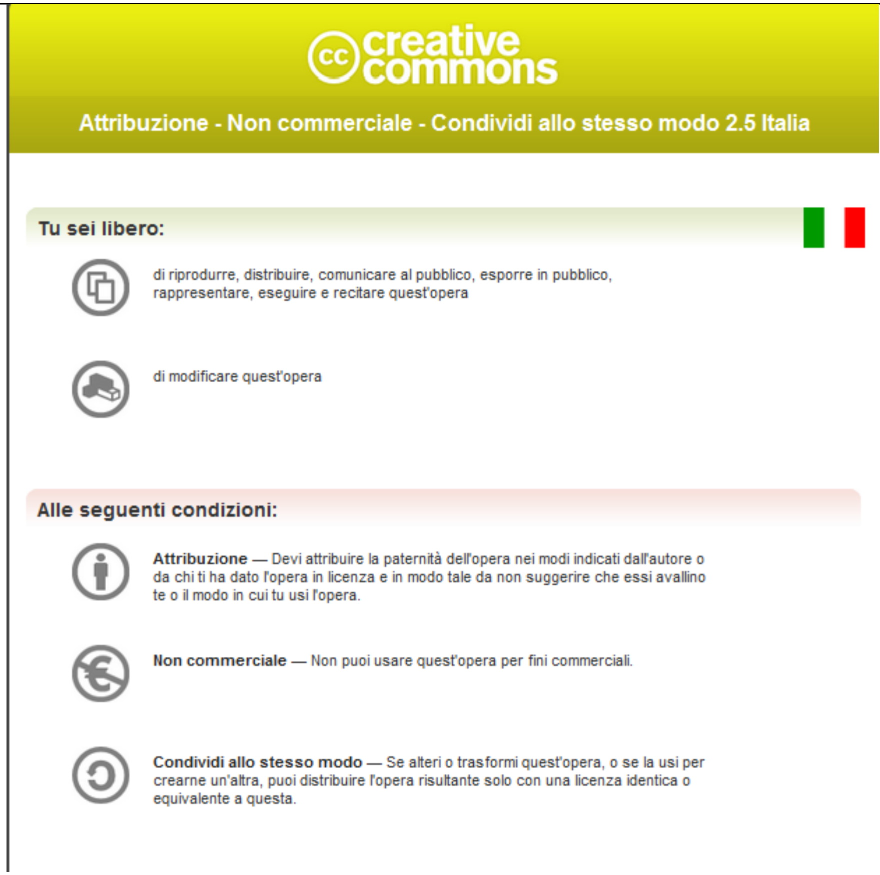
Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR - Università di Pavia

email: vittorio.casella@unipv.it

Trasformazioni di coordinate nello spazio.
Parte 1

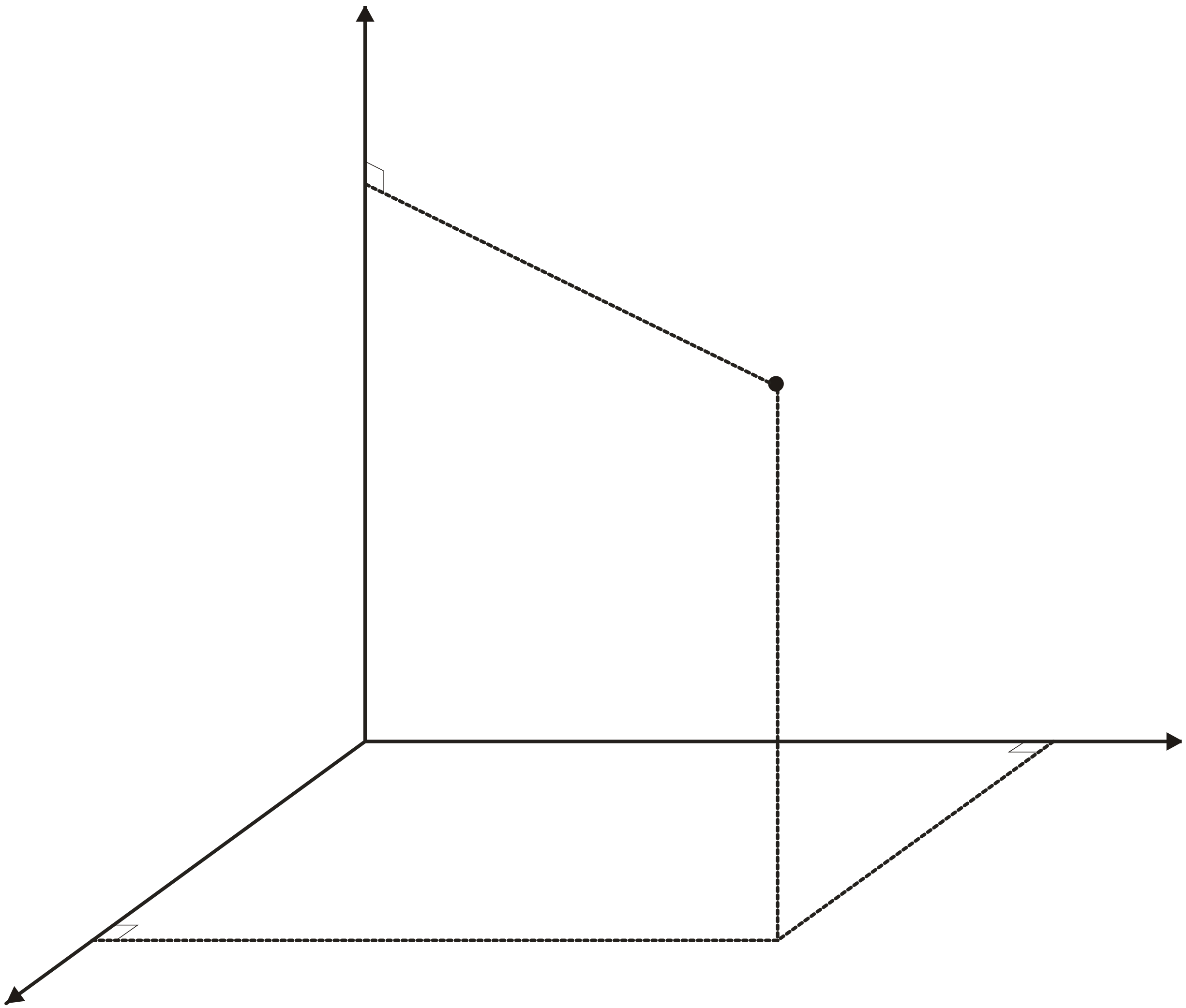
Licenza


creative commons
Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.5 Italia
Tu sei libero:
di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera
di modificare quest'opera
Alle seguenti condizioni:
Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
Non commerciale — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
Condividi allo stesso modo — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Sommario

1 - Introduzione e notazioni

Assi cartesiani 3D



Notazioni – SR coinvolti

Due sistemi di riferimento

(O, x, y, z)

(N, u, v, w)

Indichiamo un SR come una terna

Primo elemento: punto che rappresenta l'origine

Secondo, terzo e quarto elemento: nomi degli assi coordinati

Notazioni – coordinate dei punti

Le coordinate possono essere indicate individualmente

$$\left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

oppure si può usare un vettore tridimensionale

$$\mathbf{x}_P = \left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

NB Si usa la x con due significati diversi; la x non grassettata è una componente; la **x** in grassetto indica l'insieme delle coordinate di un punto

Coordinate di un punto P rispetto al SR (O,x,y,z)

$$\mathbf{x}_P = \left(x_P, y_P, z_P\right)^t$$

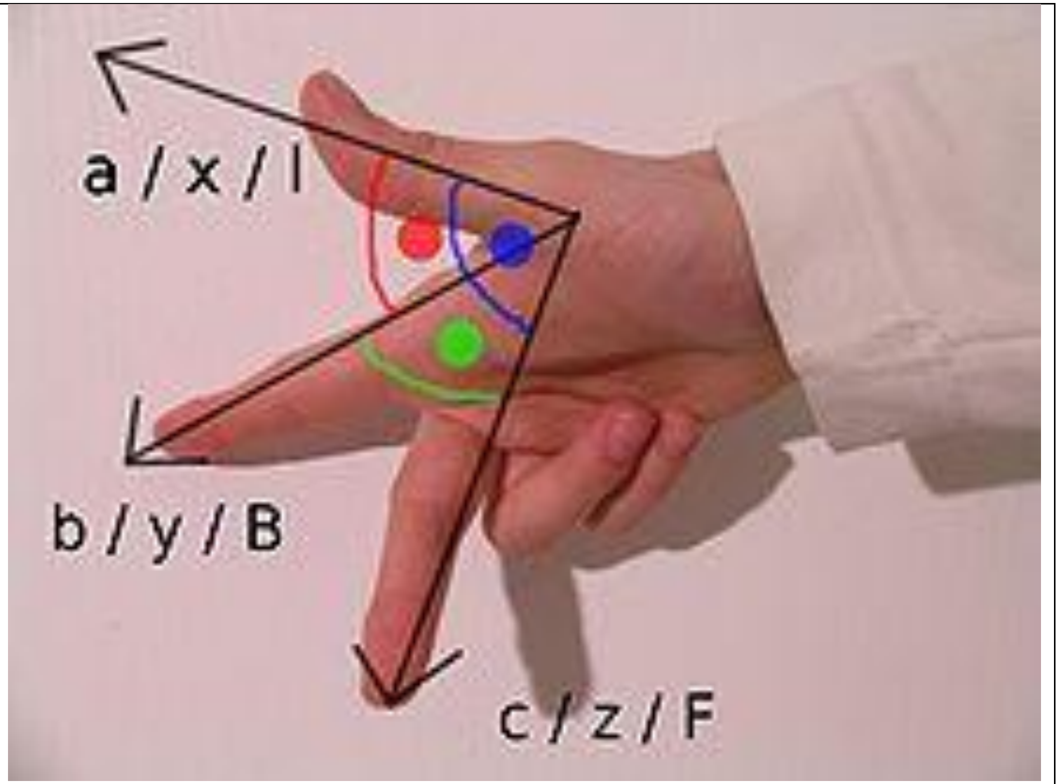
Coordinate di un punto P rispetto al SR $\left(N,u,v,w\right)$

$$\mathbf{u}_P = \left(u_P, v_P, w_P\right)^t$$

Il segno di trasposto ricorda che i vettori sono da considerare *matrici colonna*

2 - SR destrorsi e sinistrorsi nello spazio

SR destrorsi e sinistrorsi nello spazio

L'insieme infinito dei SR ortogonali che si possono creare nello spazio può essere in due sotto-insiemi disgiunti dei SR destrorsi e sinistrorsi. (O,x,y,z) è **destrorso** se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano destra, aperti in modo da essere ortogonali (O,x,y,z) è **sinistrorso** se i tre assi sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio della mano destra, aperti in modo da essere ortogonali	

3 - Generalizzazione al caso 3D delle trasformazioni di coordinate elementari

Generalizziamo al caso 3D

Consideriamo le trasformazioni di coordinate elementari già trattate e generalizziamole al caso 3D

- traslazione
- cambiamento di scala
- rotazione

3.1 - Traslazione e cambiamento di scala

La traslazione

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{u}_P + \mathbf{T} \qquad \text{diretta}$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{x}_P - \mathbf{T} \qquad \text{indiretta}$$

E' ancora l'equazione della traslazione purché si ricordi che i vettori coinvolti sono 3D

Numero dei parametri: 3

Il cambio di scala

In notazione vettoriale si ha, per la trasformazione diretta e indiretta

$$\mathbf{x}_P = \lambda \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \lambda^{-1} \mathbf{x}_P$$

Vettori 3D

Numero dei parametri: 1

Il cambio di scala anisotropo

Si introduce la matrice

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & & \\ & \lambda_y & \\ & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

e si può scrivere

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{x}_P$$

Numero dei parametri: 3

3.2 - La rotazione attorno all'asse x

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a x

- (N,u,v,w) inizialmente coincideva con (O,x,y,z)
- Successivamente gli assi v e w sono stati ruotati di un angolo ω in senso antiorario attorno all'asse $x \equiv u$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_x(\omega)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

Proprietà della matrice

Ricordiamo anzitutto che vale, per la ortogonalità della matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P &= \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P \\ \mathbf{u}_P &= \mathbf{R}_x^t(\omega)\mathbf{x}_P \end{aligned} \qquad (1)$$

Esplicitiamo gli elementi della matrice

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo ora che, se la rotazione avviene attorno all'asse $x \equiv u$, per ogni punto P si ha che le componenti x e u coincidono

$$x_P = u_P$$

La prima riga

Esplicitiamo la prima riga della prima equazione delle (1), cioè

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P$$

che è

$$x_P = r_{11} u_P + r_{12} v_P + r_{13} w_P$$

Da cui risulta che la prima riga è

$$r_{11} = 1$$

$$r_{12} = 0$$

$$r_{13} = 0$$

$$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

La prima colonna

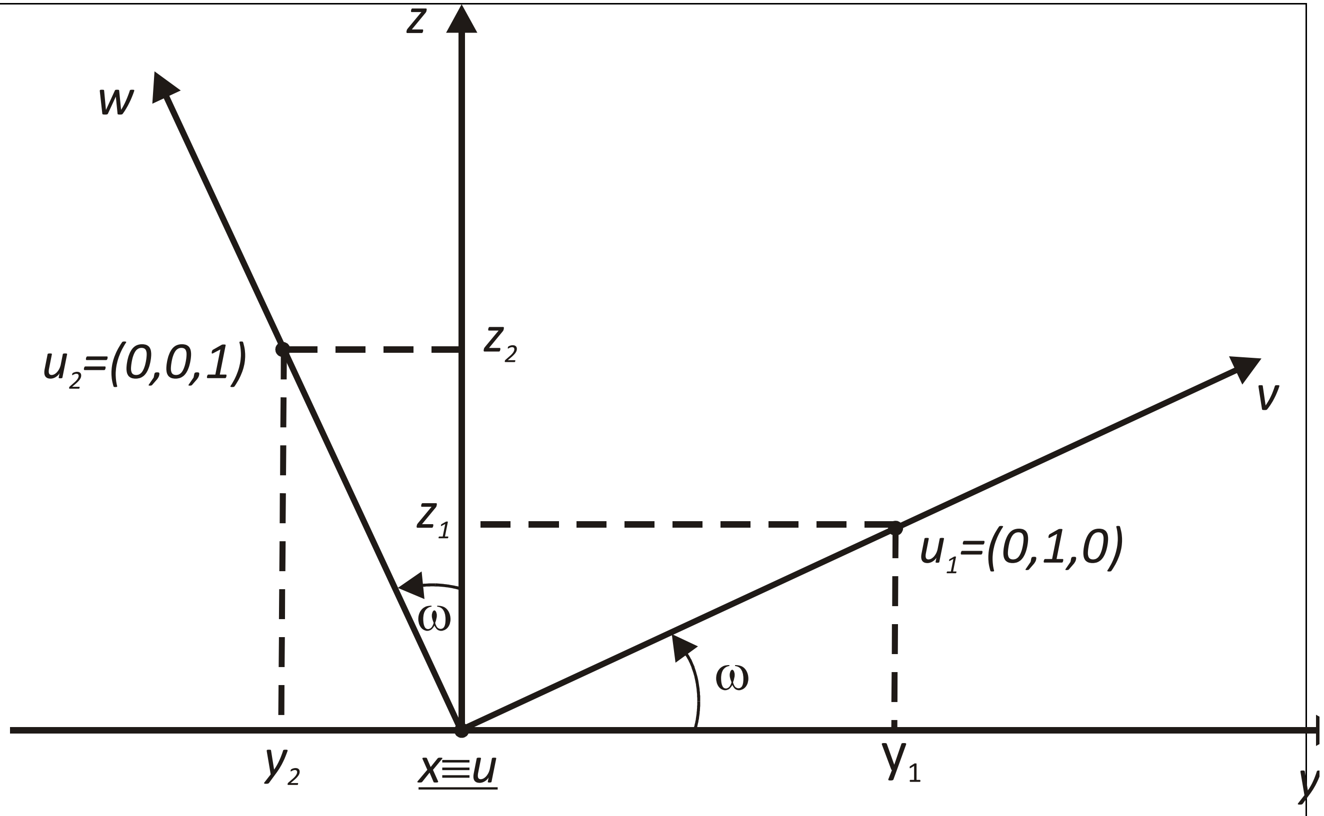
Esplicitiamo la prima riga della seconda equazione delle (1), cioè $\mathbf{u}_P = \mathbf{R}_x^t(\omega)\mathbf{x}_P$ che è $u_P = r_{11}^t x_P + r_{12}^t y_P + r_{13}^t z_P \qquad (2)$ Dove r_{11}^t, per esempio, rappresenta l'elemento (1,1) della matrice $\mathbf{R}_x^t$. Ma allora la (2) equivale a $u_P = r_{11} x_P + r_{21} y_P + r_{31} z_P$ Da cui emerge che la prima colonna è $r_{11} = 1$ $r_{21} = 0$ $r_{31} = 0$	$\mathbf{R}_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ Bisogna ancora esplicitare 4 elementi.

La matrice $\mathbf{R}_x$

Le coppie di assi (y,z) e (v,w) sono destrorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclude

$$\mathbf{R}_x(\omega)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$



[dimostrazione_rotazione_x_spazio.cdr, wmf]

Problema: il senso orario o antiorario delle matrici come viene fissato? Osservando dalla parte positiva dell’asse di rotazione.

3.3 - La rotazione attorno all'asse y

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a y

- (N, u, v, w) inizialmente coincideva con (O, x, y, z)
- Successivamente gli assi u e w sono stati ruotati di un angolo φ in senso antiorario attorno all'asse $y \equiv v$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_y(\varphi)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

La seconda riga e seconda colonna

Se la rotazione avviene attorno all'asse $y \equiv v$, per ogni punto P si ha che le componenti y e v coincidono $y_P = v_P$ Sfruttando questa invarianza sia per le rotazioni dirette sia per le inverse, si arriva alla conclusione	$\mathbf{R}_y(\varphi) = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{31} & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$

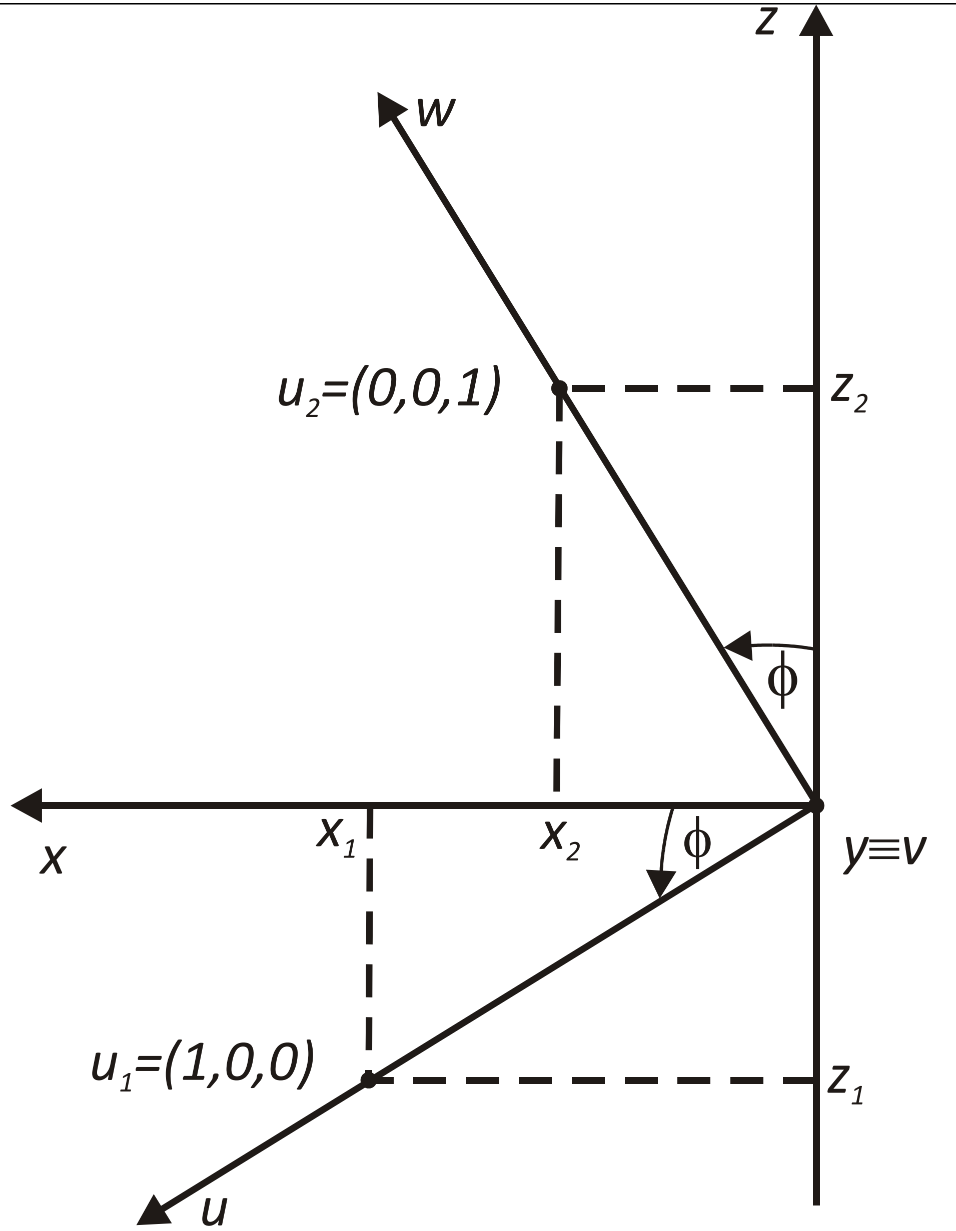
La matrice $\mathbf{R}_y$

Le coppie di assi (x,z) e (u,w) sono sini-strorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclu-de

$$\mathbf{R}_y(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

[dimostrazione_rotazione_y_spazio.cdr, wmf]



3.4 - La rotazione attorno all'asse z

Definizione

Definizione di rotazione elementare attorno a z

- (N,u,v,w) inizialmente coincideva con (O,x,y,z)
- Successivamente gli assi u e v sono stati ruotati di un angolo κ in senso anti-orario attorno all'asse $z \equiv w$
- Origine e unità di misura inalterate

Traduciamo questo formalmente, cercando una relazione del tipo

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$$

dove $\mathbf{R}_z(\kappa)$ è una matrice 3×3. Come può essere fatta?

La terza riga e seconda colonna

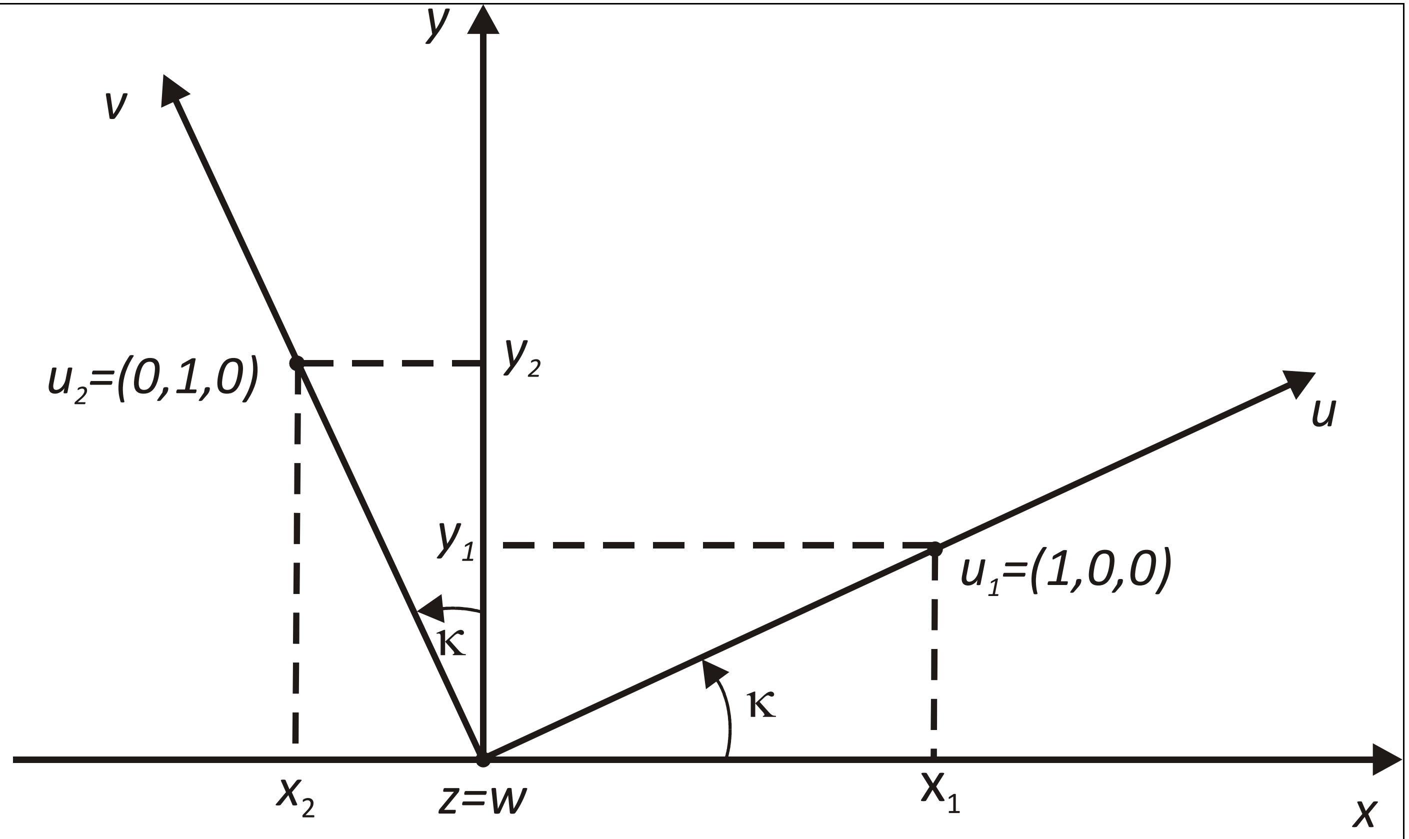
Se la rotazione avviene attorno all'asse $z \equiv w$, per ogni punto P si ha che le componenti z e w coincidono $z_P = w_P$ Sfruttando questa invarianza sia per le rotazioni dirette sia per le inverse, si arriva alla conclusione	$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\mathbf{R}_z$

Le coppie di assi (x,y) e (u,v) sono destrorse.

Ripetendo le dimostrazione fatta per la matrice di rotazione nel piano si conclude

$$\mathbf{R}_z(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



[dimostrazione_rotazione_z_spazio.cdr, wmf]

Sintesi

$$\mathbf{R}_x(\omega)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega\\ 0 & \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\kappa)=\begin{pmatrix}\cos\kappa & -\sin\kappa & 0\\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La rotazione nello spazio– Definizione

- (N,u,v,w) inizialmente coincide con (O,x,y,z)
- Successivamente l'orientamento degli assi di (N,u,v,w) viene alterato
- L'origine non viene spostata
- L'unità di misura non viene cambiata
- L'orientamento relativo degli assi di (N,u,v,w) non viene cambiato: si muovono rigidamente

Si tratta di una rotazione nello spazio

- Quanti parametri ha?
- Come la si può caratterizzare matematicamente?

Si può dimostrare che una tale rotazione è una rotazione attorno a un asse.

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D

Le seguenti affermazioni sono equivalenti e enunciano il teorema di Eulero.

Una rotazione nello spazio può essere pensata come una rotazione attorno a un asse.

Una rotazione nello spazio è rappresentata da una matrice 3x3 che può essere scomposta come prodotto di tre matrici elementari (eseguite attorno agli assi coordinati).

Numero dei parametri: 3

Teorema di Eulero sulle rotazioni 3D – 2

Consideriamo il secondo enunciato. Sono possibili molte scelte per le tre rotazioni elementari.

Vi sono convenzioni del tipo z-x-z, che coinvolgono due assi coordinati.

Vi sono convenzioni del tipo x-y-z, che coinvolgono tre assi.

Si tratta in ogni caso di diverse convenzioni all'interno dello stesso teorema di Eulero, tuttavia alcuni autori chiamano *angoli di Eulero* quelli corrispondenti alla convenzione z-x-z e similari; chiamano invece angoli di Cardano quelli corrispondenti alla convenzione x-y-z e similari.

Ulteriori informazioni in

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles

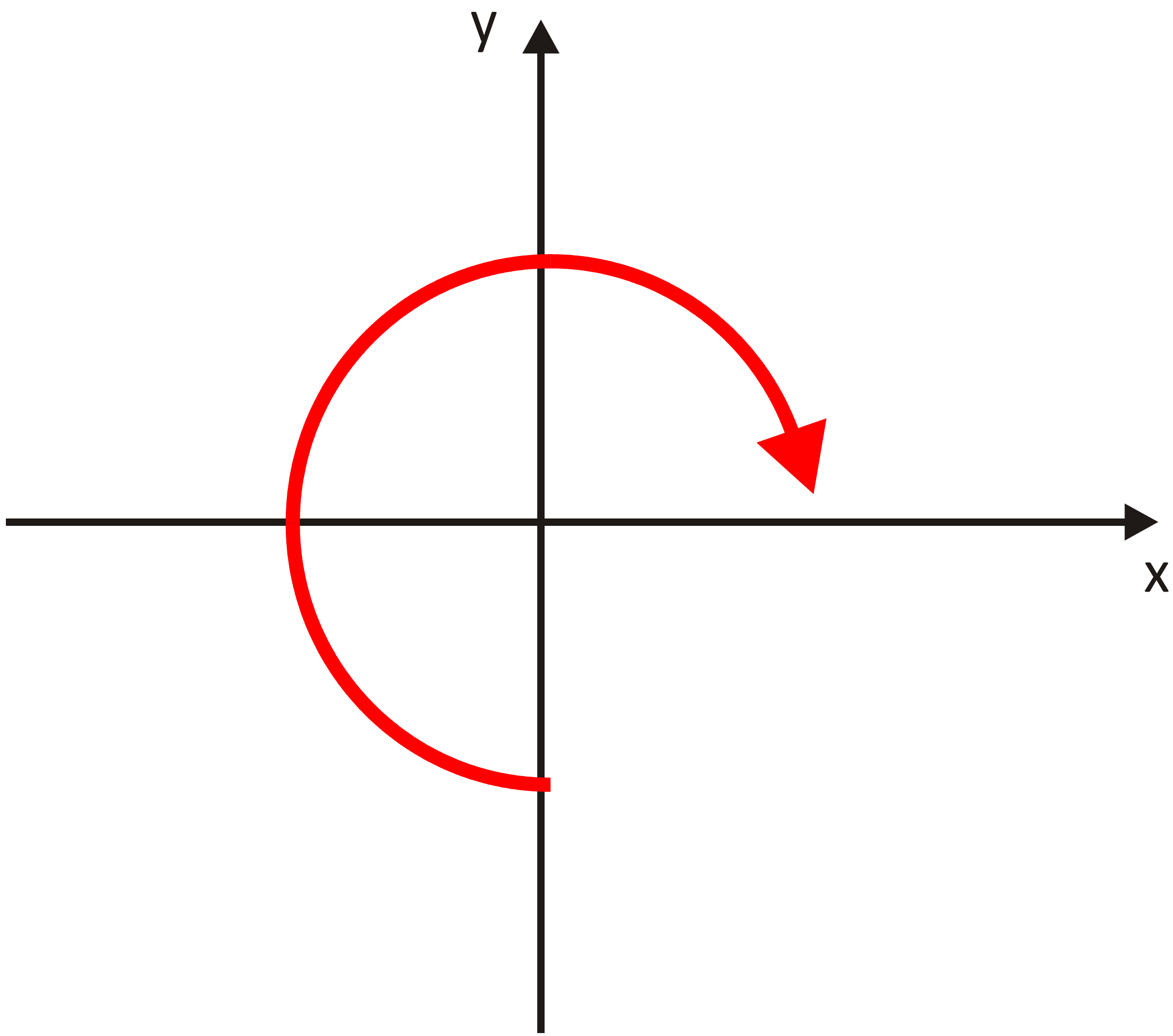
La convenzione usata in Fotogrammetria

Si tratta della convenzione più diffusa, ma non è l'unica. E' usata per esempio da Kraus nei suoi testi.

Consideriamo (O,x,y,z) e (N,u,v,w), con il secondo ruotato nello spazio rispetto al primo. Il secondo si è allontanato dal primo secondo la seguente successione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno al primo asse coordinato (x)
- rotazione di φ in senso antiorario attorno al secondo asse coordinato (y)
- rotazione di κ in senso antiorario attorno al terzo asse coordinato (z)

Rotazione oraria/antioraria



[rotazione_per_magia.cdr,wmf]

Dipende dalla posizione da cui si osserva.

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fo-togrammetria

	(O,x,y,z)		
Rotazione di un angolo ω in senso antiorario rispetto a x		$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{u}_P^{(1)}$	$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}$
	$\left(O,u^{(1)},v^{(1)},w^{(1)}\right)$		
Rotazione di un angolo φ in senso antiorario rispetto a $v^{(1)}$		$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{u}_P^{(2)}$	$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$
	$\left(O,u^{(2)},v^{(2)},w^{(2)}\right)$		
Rotazione di un angolo κ in senso antiorario rispetto a $w^{(2)}$		$\mathbf{u}_P^{(2)} = \mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$	
	$\left(O,u,v,w\right)$		

Composizione delle rotazioni elementari nella convenzione della fotogrammetria – 2

Componendo le rotazioni si ha

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)\mathbf{u}_P$$

Definendo

$$\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right) = \mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa) =$$

Si ha

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)\mathbf{u}_P$$

La matrice delle rotazione 3D

Si può esplicitare

$$\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)=\mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa+\sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa-\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa-\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa+\cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Equazione delle rotazione 3D

Le matrici $\mathbf{R}_x(\omega)$, $\mathbf{R}_y(\varphi)$ e $\mathbf{R}_z(\kappa)$ sono ortogonali, come è facile verificare direttamente.

Un teorema afferma che il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale. Se **A** e **B** sono matrici ortogonali *n*-dimensionali, esiste **AB** che ha per inversa la sua trasposta. Infatti

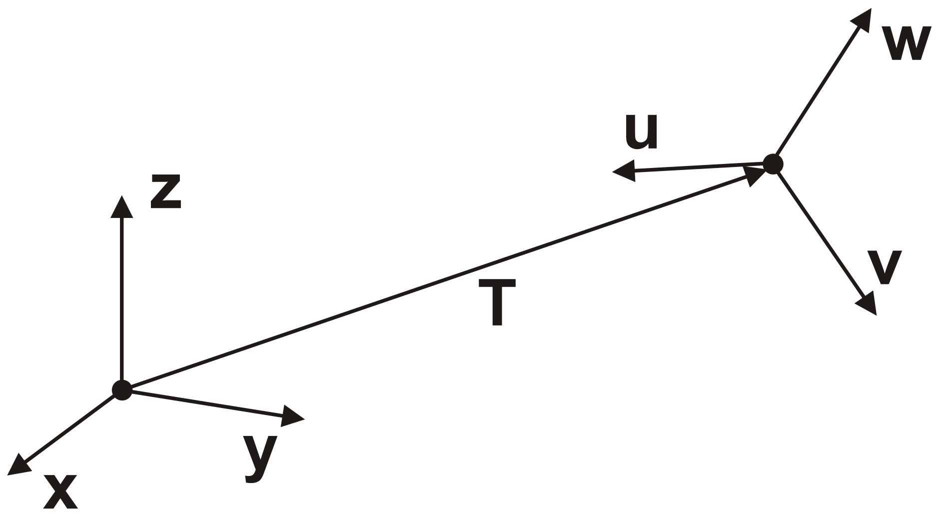
$$\left(\mathbf{AB}\right)^t\,\mathbf{AB} = \mathbf{B}^t\,\mathbf{A}^t\mathbf{AB} = \mathbf{B}^t\,\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

Si può allora concludere che le relazioni dirette e indirette per la rotazione 3D nella convenzione della fotogrammetria sono

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)\mathbf{u}_P$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{R}^t_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)\mathbf{x}_P$$

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{xyz}(\omega, \varphi, \kappa)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Le convenzioni usate in Geodesia

La convenzione scelta da IGM (Istituto Geografico Militare)

Consideriamo (O,x,y,z) e (N,u,v,w), con il secondo ruotato nello spazio rispetto al primo. Il secondo si è allontanato dal primo con la seguente successione

- rotazione di α_3 in senso orario attorno al terzo asse coordinato (z)
- rotazione di α_2 in senso orario attorno al secondo asse coordinato (y)
- rotazione di α_1 in senso orario attorno al primo asse coordinato (x)

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

$$\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

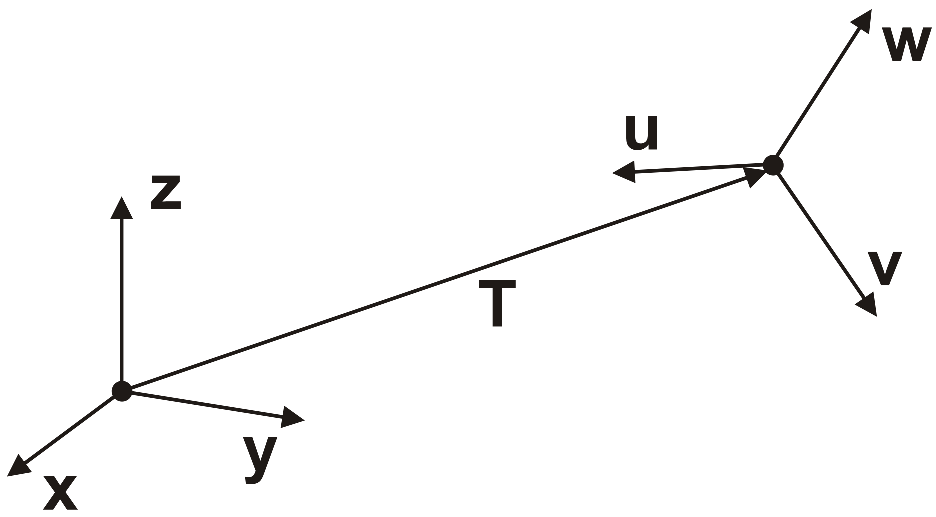
La sigla CW in apice significa clock-wise, cioè in senso orario.

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

La matrice complessiva è

$$\mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1\right)=\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3)\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2)\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1)$$

Equazione della trasformazione a 7 parametri nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Viene detta **trasformazione di Helmert**.

4 - Le matrici di rotazione infinitesimali

Che cosa sono

In certe situazioni gli angoli sono prossimi a zero: orientamento relativo in fotogrammetria; trasformazioni di datum in geodesia. Può essere interessante trovare matrici che ben approssimano quelle rigorose per angoli piccoli; tali matrici sono dette **matrici infinitesime**.

La matrice infinitesima per la convenzione della Fotogrammetria

La matrice completa è

$$\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)=\mathbf{R}_x(\omega)\mathbf{R}_y(\varphi)\mathbf{R}_z(\kappa)=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa+\sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa-\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa-\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa+\cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

La matrice infinitesima per la convenzione della Fotogrammetria - 2

Indicando gli angoli con $\delta\omega$, $\delta\varphi$, δk il cui significato è semplicemente che gli angoli considerati sono prossimi a zero, si può sviluppare in serie di Taylor al primo ordine, attorno a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ e ottenere la matrice infinitesima

$$\delta\mathbf{R}_{xyz}\left(\delta\omega,\delta\varphi,\delta\kappa\right)=\begin{bmatrix} 1 & -\delta\kappa & \delta\varphi \\ \delta\kappa & 1 & -\delta\omega \\ -\delta\varphi & \delta\omega & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\delta\mathbf{R}_{xyz}$ indica semplicemente che la matrice è una buona approssimazione di $\mathbf{R}_{xyz}\left(\omega,\varphi,\kappa\right)$ solo per valori *piccoli* degli angoli.

La matrice infinitesima è **antisimmetrica**.

La matrice infinitesima per la convenzione della Fotogrammetria - 3

Il risultato può essere ottenuto ad esempio usando, all'interno degli elementi di matrice, gli sviluppi

$$\cos(x) = 1 + o(x)$$

$$\sin(x) = 1 - x + o(x)$$

effettuando i prodotti e scartando i termini infinitesimi di ordine superiore, come ad esempio $\delta\omega\,\delta\kappa$.

In realtà è stato fatto usando le capacità di calcolo simbolico di Matlab, come evidenziato dallo script `rotazioni_3d_kraus.m`

Perchè le matrici infinitesime?

Si tratta di approssimazioni: perché usarle se si conoscono le matrici vere?

Perché quelle infinitesime sono estremamente più semplici e contengono funzioni lineari degli angoli.

Fra le altre conseguenze, sebbene la composizione fra rotazioni non sia in generale commutativa, in quanto le stesse rotazioni, applicate in ordine diverso, producono risultati diversi, la composizione fra rotazioni infinitesime è commutativa: *le matrici infinitesime commutano*.

La matrice infinitesima per la convenzione della Geodesia

La matrice delle rotazioni infinitesimali è

$$\delta \mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\delta\alpha_3, \delta\alpha_2, \delta\alpha_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione di Helmert infinitesimale

La trasformazione di Helmert può essere scritta, per angoli *piccoli*,

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_P$$

Il coefficiente di scala è in genere molto prossimo a 1 (1 significa che non vi è deformazione), del tipo

$$\lambda = 1.0000045$$

Spesso si introduce il parametro K, misurato in ppm (parti per milione) in modo che sia

$$\lambda = 1 + 10^{-6} K$$

Nel caso in esempio si avrebbe

$$K = 4.5 \text{ ppm}$$

La trasformazione di Helmert infinitesimale - 2

In conclusione la trasformazione di Helmert infinitesimale è

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \left(1 + 10^{-6}\,K\right)\begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & -\delta\alpha_2 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{u}_P$$

Convenzioni nelle trasformazioni 3D

Verso delle rotazioni

Posizione da cui giudico il verso delle rotazioni

Ordine delle trasformazioni (traslazione, scala, rotazione)

Ordine delle rotazioni

Famiglia dei SR, destrorsi o sinistrorsi

Non leggere

NON LEGGERE

TODO

Dalla matrice agli angoli

Il formalismo sviluppato consente di calcolare le matrici di rotazione noti gli angoli: si pone spesso anche il problema inverso, cioè ricavare gli angoli a partire da una matrice di rotazione. Consideriamo la (3) e indichiamo con r_{ij} il valore del generico elemento di matrice. Si ha anzitutto

$$\sin\varphi \doteq r_{13} \tag{4}$$

L'equazione può essere risolta invertendo la funzione seno, cosa che viene effettuata in genere fra $-\pi/2$ e $\pi/2$; in altri termini la funzione arcsin è così definita

$$\arcsin: \quad [-1,1] \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

Indichiamo con φ_1 il valore che si ottiene invertendo il seno

$$\varphi_1 = \arcsin(r_{13})$$

Il valore ottenuto potrebbe essere positivo, se φ_1 appartiene al primo quadrante, o negativo, se si trova nel quarto.

Dalla matrice agli angoli - 2

L'equazione (4) ha una seconda soluzione, dovuta alla periodicità della funzione seno

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1$$

In sintesi sono possibili due casi a cui corrispondono due soluzioni diverse ma equivalenti:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{caso A} \\ \varphi_2 & \varphi \in]\pi/2, 3\pi/2[\quad \text{caso B} \end{cases}$$

Per entrambi i casi considerati è possibile ricavare il valore di $\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-r_{13}^2} & \text{caso A} \\ -\sqrt{1-\sin^2\varphi} = -\sqrt{1-r_{13}^2} & \text{caso B} \end{cases}$$

Si possono allora ricavare il seno e il coseno di κ:

Dalla matrice agli angoli - 3

$$\cos\kappa = \frac{r_{11}}{\cos\phi}$$

$$\sin\kappa = -\frac{r_{12}}{\cos\phi}$$

Interpretando i due valori come le coordinate cartesiane di un punto P che si trova sulla circonferenza unitaria e tale che il segmento $\overrightarrow{OP}$ forma un angolo κ in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle ascisse si può concludere

$$\kappa = \operatorname{atan}_2\left(\frac{r_{11}}{\cos\phi}, -\frac{r_{12}}{\cos\phi}\right)$$

dove la funzione atan_2 indica la inversione della tangente che prende valori in $[-\pi, \pi]$.

Dalla matrice agli angoli - 4

Considerazioni analoghe consentono di scrivere

$$\cos\omega = \frac{R_{33}}{\cos\varphi}$$

$$\sin\omega = -\frac{R_{23}}{\cos\varphi}$$

e portano alla conclusione

$$\omega = \mathrm{atan}_2\left(\frac{R_{33}}{\cos\varphi}, -\frac{R_{23}}{\cos\varphi}\right)$$

Dalla matrice agli angoli - 5

In sintesi la soluzione è

Caso A

$$\varphi = \arcsin(r_{13})$$

$$\cos\phi = \sqrt{1-r_{13}^2}$$

$$\kappa = \operatorname{atan}_2\left(\frac{r_{11}}{\cos\varphi}, -\frac{r_{12}}{\cos\varphi}\right)$$

$$\omega = \operatorname{atan}_2\left(\frac{r_{33}}{\cos\varphi}, -\frac{r_{23}}{\cos\varphi}\right)$$

Caso B

$$\varphi = \pi - \arcsin(r_{13})$$

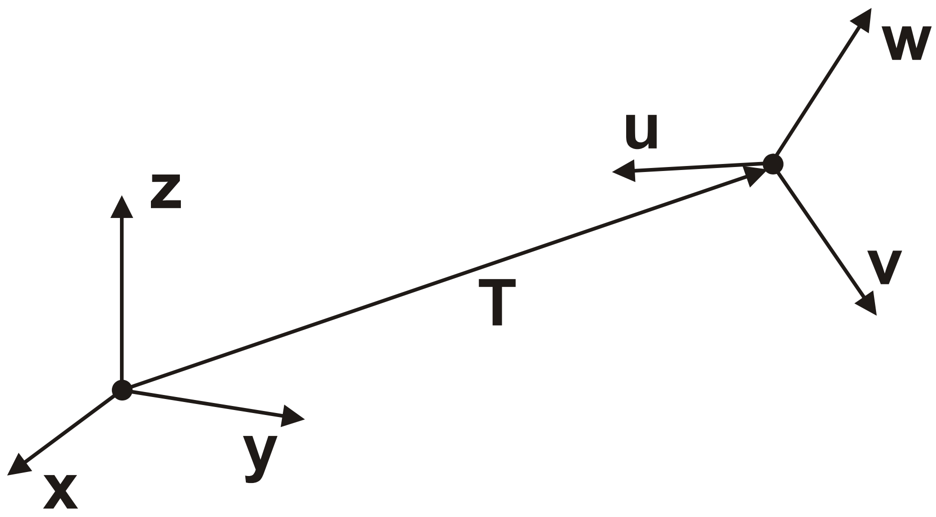
$$\cos\varphi = -\sqrt{1-r_{13}^2}$$

$$\kappa = \operatorname{atan}_2\left(\frac{r_{11}}{\cos\varphi}, -\frac{r_{12}}{\cos\varphi}\right)$$

$$\omega = \operatorname{atan}_2\left(\frac{r_{33}}{\cos\varphi}, -\frac{r_{23}}{\cos\varphi}\right)$$

Esistono insomma due terne di angoli equivalenti ma diverse.

Equazione della rototraslazione con cambiamento di scala nello spazio



$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right)\mathbf{u}_P$$

Numero dei parametri: 7

Convenzioni nelle trasformazioni 3D

Verso delle rotazioni

Posizione da cui giudico il verso delle rotazioni

Ordine delle trasformazioni (traslazione, scala, rotazione)

Ordine delle rotazioni

Famiglia dei SR, destrorsi o sinistrorsi

Teorema sulle rotazioni 3D – 2b

	(O,x,y,z)	
Rotazione di un angolo α_3 in senso orario rispetto a z		
	$\left(O,u^{(1)},v^{(1)},w^{(1)}\right)$	
Rotazione di un angolo α_2 in senso orario rispetto a $v^{(1)}$		
	$\left(O,u^{(2)},v^{(2)},w^{(2)}\right)$	
Rotazione di un angolo α_1 in senso orario rispetto a $u^{(2)}$		
	$\left(O,u,v,w\right)$	

Teorema sulle rotazioni 3D - 3

In generale in Fotogrammetria le rotazioni seguono la convenzione

- rotazione di ω in senso antiorario attorno a *x*
- rotazione di φ in senso antiorario attorno a *y*
- rotazione di κ in senso antiorario attorno a *z*

In Geodesia si usa prevalentemente

- rotazione di α_3 in senso orario attorno a *z*
- rotazione di α_2 in senso orario attorno a *y*
- rotazione di α_1 in senso orario attorno a *x*

Talvolta il Geodesia si usano le rotazioni antiorarie

Matrici delle rotazioni elementari e matrice complessiva (nella convenzione della Geodesia)

$$\mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{zyx}^{cw}\left(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\right) = \mathbf{R}_z^{cw}(\alpha_3)\mathbf{R}_y^{cw}(\alpha_2)\mathbf{R}_x^{cw}(\alpha_1)$$